あもんノート

ユークリッド幾何学、ニュートン力学から、相対論、量子論、素粒子論、宇宙論、そして超ひも理論まで、理論物理学を簡潔にかつ幅広く網羅したノートです。TOP へは下の URL をクリックして行けます。専用の画像掲示板で、ご意見、ご質問等も受け付けております。

http://amonphys.web.fc2.com/

目 次

第 12 章　連続群論入門

場の量子論に進むにあたって当面必要となる連続群についてここに手短にまとめておきます。無限小量という物理で特になじみのある概念を用いて端的に記述します。特に量子物理で重要となる回転群とユニタリ群について詳しく触れます。

12.1　リー群

群 G があって、その元が局所的に実数の組で特徴づけられるとき、すなわち G が多様体を成すとき、G を**リー群**、あるいは**連続群**といいます。実数パラメータの個数 (多様体の次元) をそのリー群の**次元**といいます。

例えば、行列式が 0 でない n 次複素正方行列の全体は、行列の積演算のもとで群を成し、また、局所的に実数パラメータで記述できるのでリー群です。これは $GL(n,\mathbf{C})$ と書かれます。一方、行列式が 1 の n 次複素正方行列の全体もリー群を成し、こちらは $SL(n,\mathbf{C})$ と書かれます。明らかに $SL(n,\mathbf{C})$ は $GL(n,\mathbf{C})$ の部分群です。

n 次複素正方行列で与えられる代表的なリー群を表にまとめておきます：

記号	名称	条件	次元
$GL(n,\mathbf{C})$	n 次複素一般線形群	$\det A \neq 0$	$2n^2$
$SL(n,\mathbf{C})$	n 次複素特殊線形群	$\det A = 1$	$2n^2-2$
$U(n)$	n 次ユニタリ群	$A^\dagger A = \delta$	n^2
$SU(n)$	n 次特殊ユニタリ群	$A^\dagger A = \delta$, $\det A = 1$	n^2-1

同様に、n 次実正方行列で与えられるリー群として、以下のようなものが考えられるでしょう：

記号	名称	条件	次元
$GL(n,\mathbf{R})$	n 次実一般線形群	$\det A \neq 0$	n^2
$SL(n,\mathbf{R})$	n 次実特殊線形群	$\det A = 1$	n^2-1
$O(n)$	n 次直交群	$A^T A = \delta$	$n(n-1)/2$
$SO(n)$	n 次回転群	$A^T A = \delta$, $\det A = 1$	$n(n-1)/2$

δ は単位行列、$\mathbf{R}$ は実数全体の集合、$\mathbf{C}$ は複素数全体の集合を意味します。詳細はこれから説明します。

12.2 リー代数と構造定数

あるリー群 G の単位元 δ の近傍の元を考えましょう。それは無限小の実数を ϵ として、$\delta+\epsilon X$ と表せます。これが G の元になっているという要請から、X の集合が得られるでしょう。その集合を $<G>$ と書き、G の**リー代数**といいます。

次の 2 つの命題がわかるでしょう。

$$(X \in <G> \wedge a \in \mathbf{R}) \Rightarrow aX \in <G> .$$

[証明] 仮定より ϵ を無限小量として $\delta+\epsilon X \in G$. ここで $\epsilon=\epsilon' a$ とおけば、ϵ' は無限小量であり、$\delta+\epsilon' aX \in G$. よって $aX \in <G>$. [証明終]

$$X, Y \in <G> \Rightarrow X+Y \in <G> .$$

[証明] 仮定と G の閉性より、$(\delta+\epsilon X)(\delta+\epsilon Y) \in G$. 展開して ϵ の高次項を落とし、$\delta+\epsilon(X+Y) \in G$. よって $X+Y \in <G>$. [証明終]

これらの命題によりリー代数 $<G>$ は実ベクトル空間を成します。その基底を T_a $(a=1,2,\cdots,N)$ と書けば、$<G>$ の元は、θ_a を実数 (ベクトルの成分) として、

$$X=\theta_a T_a \tag{1}$$

と表すことができます (縮約規則を用いています)。

さらに次の 2 つの命題がいえます。

$$X \in <G> \Rightarrow e^X \in G. \tag{2}$$

[証明] 仮定と G の閉性より自然数 n に対して $(\delta+\epsilon X)^n \in G$. ここで ϵ は無限小量だから、$\delta+\epsilon X=e^{\epsilon X}$ に注意して $e^{n\epsilon X} \in G$. $n\epsilon=1$ となるように n を選べば与題を得る。[証明終]

$$X, Y \in <G> \Rightarrow [X, Y] \in <G> . \tag{3}$$

[証明] 仮定から $e^{\epsilon X} e^{\epsilon Y} e^{-\epsilon X} e^{-\epsilon Y} \in G$. 指数関数を展開して ϵ の高次項を落として $\delta+\epsilon^2[X, Y] \in G$. よって $[X, Y] \in <G>$. [証明終]

(3) により、リー代数は交換子を積とみなすことで環を成します。このためリー代数は**リー環**とも呼ばれます。基底 T_a に対して、

$$[T_a, T_b]=f_{abc} T_c$$

とおいたとき、f_{abc} は**構造定数**と呼ばれます。構造定数は、考えている基底において、リー代数の演算構造を完全に決定しています。一方、(1)(2) より、

$$A(\theta) = e^{\theta_a T_a} \in G.$$

すなわち、リー代数の基底 T_a からリー群 G の少なくとも単位元を含む部分群が生成されるということです。これにより同じ構造定数のリー代数から生成された 2 つのリー群は準同型になります (*)。

あるリー群が与えられたとき、これと準同型なリー群を探すことは、物理学において特に重要な作業です。それは、ある変換に対して、ある量（例えば力学変数）がどのように振る舞うかということを矛盾なく決定する手段だからです。見つかった準同型なリー群が、M 次正方行列ならば、これをもとのリー群の M 次元**表現**といいます。もちろん、表現の次元と、リー群の多様体としての次元 (基底 T_a の個数 N) は一般に別物です。

一方、元のリー群がすでに正方行列であるとき、これを**定義表現**、もしくは**基本表現**といいます。

(*注) 2 つの群 G, G' が**準同型**であるとは、$\forall ab \in G\,(f(ab) = f(a)f(b))$ を満たす写像 $f : G \to G'$ が存在することで、f を**準同型写像**といいます。さらに f が全単射 (一対一対応) のとき、これを**同型写像**といい、このとき G と G' は**同型**であるといいます。

12.3 直交群と回転群

リー群の簡単な例は n 次**直交群** $O(n)$ $(n \geq 2)$ で、

$$A^T A = \delta$$

を満たす n 次実正方行列 A が成す群です (δ は単位行列)。上式の両辺に関して行列式をとれば、$\det A^T = \det A$ に注意して、

$$(\det A)^2 = 1 \quad \therefore \det A = \pm 1.$$

よって $O(n)$ は 2 つの非連結部分からなり、特に $\det A = +1$ の部分は単位元を含み、部分群を成します。これを n 次**回転群** $SO(n)$ と呼びます。$O(n)$ の元全体は $SO(n)$ の元全体と、それらに**反転行列**：

$$P = \mathrm{diag}(1, \cdots, 1, -1)$$

を乗じたものになります。

$SO(n)$ のリー代数を構成するために、単位元の近傍を考え、

$$A = \delta + \epsilon X \quad (\epsilon \text{ は無限小量})$$

とおくと、

$$X^T = -X$$

を得ます。これが $<SO(n)>$ の条件であり、要するに反対称の n 次正方行列であるということです。よって $<SO(n)>$ の基底の個数は $n(n-1)/2$ であり、これが $SO(n)$ の次元です。

12.4 SO(2)

例えば $n=2$ のとき、$X^T = -X$ の一般解は、θ を任意の実数として、

$$X = \theta T, \quad T = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

と書けます。基底 T が 1 つであることから構造定数は 0 です。よって、

$$SO(2) = \{\, e^{\theta T} \mid \theta \in \mathbf{R} \,\}$$

ですが、$[X, Y] = 0 \Rightarrow [e^X, e^Y] = 0$ に注意すると、$SO(2)$ は 1 次元の可換群であることがわかります。

$SO(2)$ の元を具体的に書けば、

$$\begin{aligned} A(\theta) &= e^{\theta T} = \exp\begin{pmatrix} 0 & -\theta \\ \theta & 0 \end{pmatrix} = \exp\left\{ U \begin{pmatrix} i\theta & 0 \\ 0 & -i\theta \end{pmatrix} U^\dagger \right\} \\ &= U \begin{pmatrix} e^{i\theta} & 0 \\ 0 & e^{-i\theta} \end{pmatrix} U^\dagger = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}. \quad \text{ここで} \quad U = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -i & i \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

U は対角化のためのユニタリ行列です。結果はよく知られた 2 次元の回転行列になります。あるいは、

$$T^n = \begin{cases} \delta & (n = 0 \bmod 4) \\ T & (n = 1 \bmod 4) \\ -\delta & (n = 2 \bmod 4) \\ -T & (n = 3 \bmod 4) \end{cases}$$

に注意して、

$$\begin{aligned} A(\theta) = e^{\theta T} &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} (\theta T)^n \\ &= \delta + \theta T - \frac{1}{2!}\theta^2\delta - \frac{1}{3!}\theta^3 T + \frac{1}{4!}\theta^4\delta + \frac{1}{5!}\theta^5 T + \cdots \\ &= \cos\theta\,\delta + \sin\theta\, T = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \end{aligned}$$

のように導出することもできます。

$SO(2)$ と準同型な群はいくらでも考えられますが、簡単な例として1次元表現を考えましょう。例えば基底を 1 とすれば $\left\{e^{\theta}\right\}$. これはスケール変換 $\mathbf{R}^{+}$ を意味します。基底を i とすれば $\left\{e^{i\theta}\right\}$. これは**位相変換**を意味し、1次ユニタリ行列が成す群とみなせるので、$U(1)$ と書きます：

$$U(1) = \{\, e^{i\theta} \,|\, \theta \in \mathbf{R} \,\}.$$

前者は非コンパクト群ですが、後者はコンパクト群です。また、これらが準同型であることは、いずれの表現においても、

$$A(\theta)A(\phi) = A(\theta + \phi)$$

となっていることからわかります。

ちなみに基底を 0 にとれば $\{\delta\}$. これは単位元だけからなる群ですが、それは全ての群と準同型であり、自明な例になっています。

12.5 SO(3) とパウリ行列

$n = 2$ は自明すぎて、連続群論の有難みが伝わってこないかと思います。次に $n = 3$ の場合を考えてみましょう。

$n = 3$ のときは、$X^T = -X$ の一般解は、

$$X = \theta_a T_a, \quad a = 1, 2, 3,$$

$$T_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad T_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad T_3 = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

と書けます。すなわち、3次元レビ・チビタを ϵ_{abc} として、

$$(T_a)_{bc} = \epsilon_{bac}$$

ということです。このような基底 T_a を用いて、$SO(3)$ は、

$$SO(3) = \{\, e^{\theta_a T_a} \,|\, \theta_a \in \mathbf{R},\, a = 1, 2, 3 \,\}$$

と表されることになります。また、

$$[T_a, T_b] = \epsilon_{abc} T_c$$

が確かめられるので、$<SO(3)>$ の構造定数は ϵ_{abc} です。$SO(3)$ は3次元の非可換群であることがわかります。

ここで角運動量代数が、

$$[J_a, J_b] = i\epsilon_{abc} J_c$$

であったことに注意すると (量子力学の章参照)、ちょうど代数 $-iJ_a$ の構造定数が ϵ_{abc} です。よって J_a の角運動量固有状態における表現行列、

$$(R_a^{(l)})_{mm'} = < l, m | J_a | l, m' >$$

を作れば、$-iR_a^{(l)}$ も各 l に対して同じ構造定数 ϵ_{abc} を持つはずです。すなわち $\{e^{-i\theta_a R_a^{(l)}}\}$ が $SO(3)$ と準同型で、各 l に対してそれぞれ $(2l+1)$ 次元表現になります。

計算のために、角運動量代数に関する次の公式を思い出しましょう。

$$J_1 = \frac{1}{2}(J_+ + J_-), \quad J_2 = \frac{1}{2i}(J_+ - J_-),$$

$$J_\pm | l, m > = \sqrt{(l \mp m)(l \pm m + 1)}\, | l, m \pm 1 >, \quad J_3 | l, m > = m | l, m > .$$

具体的には、まず $l = 0$ のときは、

$$R_a^{(0)} = 0$$

となるので、自明な1次元表現 $\{\delta\}$ が得られます。これは物理においては**スカラー表現**と呼ばれます。

$l = 1/2$ のときは、

$$| + > = | \frac{1}{2,} + \frac{1}{2} >, \quad | - > = | \frac{1}{2,} - \frac{1}{2} >$$

という略記を用いて、

$$< + | J_1 | - > = \frac{1}{2,} \quad < - | J_1 | + > = \frac{1}{2,}$$

$$< + | J_2 | - > = -\frac{i}{2,} \quad < - | J_2 | + > = \frac{i}{2,}$$

$$< + | J_3 | + > = \frac{1}{2,} \quad < - | J_3 | - > = -\frac{1}{2}$$

で、その他の成分は0ですから、

$$R_a^{(1/2)} = \frac{\sigma_a}{2,} \quad \sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

が得られます。σ_a は**パウリ行列**と呼ばれます。性質：

$$\sigma_a^\dagger = \sigma_a, \quad \mathrm{tr}\, \sigma_a = 0$$

および、一般に正方行列 M に対して $\det e^M = e^{\mathrm{tr}M}$ であることに注意すると (関数論と応用数学の章参照)、$\{e^{-i\theta_a\sigma_a/2}\}$ は行列式が1の2次ユニタリ行列が作るリー群 $SU(2)$ であることがわかるでしょう：

$$SU(2) = \{\, e^{-i\theta_a\sigma_a/2} \,|\, \theta_a \in \mathbf{R},\, a = 1, 2, 3 \,\}.$$

これが $SO(3)$ の2次元表現で、物理においては**スピノル表現**と呼ばれます。

$l = 1$ のときも同様に計算すれば、

$$R_a^{(1)} = \tau_a, \quad \tau_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix},\ \tau_2 = \frac{i}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix},\ \tau_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

となり、$\{e^{-i\theta_a\tau_a}\}$ が3次元表現で、物理では**ベクトル表現**と呼ばれます。

以下同様に、4次元表現、5次元表現、$\cdots$ と作れるわけです。一般に $R_a^{(l)}$ の第3成分 (z 成分) は対角行列で、

$$(R_3^{(l)})_{mm'} = m\delta_{mm'}$$

となることは定義から明らかです。

12.6 ロドリゲスの回転公式

$SO(3)$ の元 $e^{\theta_a T_a}$ は、

$$\theta_a = \theta n_a, \quad n_a n_a = 1$$

において、方向ベクトル n_a を軸とした角度 θ の回転の変換行列を意味することになります。計算は少々大変ですが、行列 $n_a T_a$ が、

$$n_a T_a = U\mathrm{diag}(0, i, -i)U^\dagger,$$

$$U = \begin{pmatrix} n_1 & \gamma(n_1n_3 + in_2) & \gamma(n_1n_3 - in_2) \\ n_2 & \gamma(n_2n_3 - in_1) & \gamma(n_2n_3 + in_1) \\ n_3 & -\gamma(n_1^2 + n_2^2) & -\gamma(n_1^2 + n_2^2) \end{pmatrix}, \quad \gamma = \frac{1}{\sqrt{2(n_1^2 + n_2^2)}}$$

のように、ユニタリ行列 U により対角化されることに注意すると、

$$e^{\theta_a T_a} = e^{\theta n_a T_a} = U\mathrm{diag}(1, e^{i\theta}, e^{-i\theta})U^\dagger$$

$$= \begin{pmatrix} \cos\theta + n_1^2(1-\cos\theta) & n_1n_2(1-\cos\theta) - n_3\sin\theta & n_1n_3(1-\cos\theta) + n_2\sin\theta \\ n_2n_1(1-\cos\theta) + n_3\sin\theta & \cos\theta + n_2^2(1-\cos\theta) & n_2n_3(1-\cos\theta) - n_1\sin\theta \\ n_3n_1(1-\cos\theta) - n_2\sin\theta & n_3n_2(1-\cos\theta) + n_1\sin\theta & \cos\theta + n_3^2(1-\cos\theta) \end{pmatrix}$$

を得るでしょう。これが一般的な3次回転行列の形で、**ロドリゲスの回転公式**と呼ばれます。

12.7 SO(4) と SO(5)

さらに高次の回転群を考えてみましょう。

$n=4$ のときは、$X^T=-X$ の一般解は、

$$X=\begin{pmatrix} 0 & -\theta_3 & \theta_2 & \phi_1 \\ \theta_3 & 0 & -\theta_1 & \phi_2 \\ -\theta_2 & \theta_1 & 0 & \phi_3 \\ -\phi_1 & -\phi_2 & -\phi_3 & 0 \end{pmatrix}=\theta_a T_a+\phi_a S_a$$

のように与えられ、ここで、

$$(T_a)_{ij}=\epsilon_{iaj4},\quad (S_a)_{ij}=\delta_{ai}\delta_{4j}-\delta_{aj}\delta_{4i},\quad a=1,2,3$$

が $<SO(4)>$ の 6 つの基底となります：

$$SO(4)=\{\,e^{\theta_a T_a+\phi_a S_a}\,|\,\theta_a,\phi_a\in\mathbf{R},\,a=1,2,3\,\}.$$

リー代数の構造は、

$$[T_a,T_b]=\epsilon_{abc}T_c,\quad [T_a,S_b]=\epsilon_{abc}S_c,\quad [S_a,S_b]=\epsilon_{abc}T_c$$

となることが確かめられるので、

$$T_a\to-\frac{i}{2}\sigma_a,\quad S_a\to\pm\frac{i}{2}\sigma_a\quad(\sigma_a\text{ はパウリ行列})$$

が上のリー代数を満たすことがわかります。すなわち、$\{\,e^{-(i/2)(\theta_a\mp\phi_a)\sigma_a}\,\}$ が複号のどちらにおいても $SO(4)$ の 2 次元表現になります。

また、$n=5$ のときは、

$$(T_a)_{ij}=\epsilon_{iaj45},\quad (S_a)_{ij}=\delta_{ai}\delta_{4j}-\delta_{aj}\delta_{4i},$$

$$(S'_a)_{ij}=\delta_{ai}\delta_{5j}-\delta_{aj}\delta_{5i},\quad (R)_{ij}=\delta_{4i}\delta_{5j}-\delta_{4j}\delta_{5i}$$

として、

$$SO(5)=\{\,e^{\theta_a T_a+\phi_a S_a+\phi'_a S'_a+\omega R}\,|\,\theta_a,\phi_a,\phi'_a,\omega\in\mathbf{R},\,a=1,2,3\,\}.$$

リー代数の構造は、

$$[T_a,T_b]=\epsilon_{abc}T_c,\quad [S_a,S_b]=\epsilon_{abc}T_c,\quad [S'_a,S'_b]=\epsilon_{abc}T_c,$$

$$[T_a,S_b]=\epsilon_{abc}S_c,\quad [T_a,S'_b]=\epsilon_{abc}S'_c,\quad [T_a,R]=O,$$

$$[S_a,S'_b]=-\delta_{ab}R,\quad [S_a,R]=S'_a,\quad [S'_a,R]=-S_a$$

となります(O は零行列)。これには2次元表現がなく、

$$T_a \to -\frac{i}{2}\begin{pmatrix}\sigma_a & 0\\ 0 & \sigma_a\end{pmatrix},\quad S_a \to -\frac{i}{2}\begin{pmatrix}0 & \sigma_a\\ \sigma_a & 0\end{pmatrix},$$

$$S'_a \to \frac{1}{2}\begin{pmatrix}0 & -\sigma_a\\ \sigma_a & 0\end{pmatrix},\quad R \to \frac{i}{2}\begin{pmatrix}\delta & 0\\ 0 & -\delta\end{pmatrix}$$

が $<SO(5)>$ の4次元表現を与えることが確かめられるでしょう。ここでパウリ行列が、

$$[\sigma_a, \sigma_b] = 2i\epsilon_{abc}\sigma_c,\quad \{\sigma_a, \sigma_b\} = 2\delta_{ab}\delta$$

という性質を持つことに注意。$\{A, B\} = AB + BA$ は**反交換子**です。

12.8 随伴表現

ヤコビ恒等式:

$$[A, [B, C]] + [B, [C, A]] + [C, [A, B]] = 0.$$

および構造定数の定義 $[T_a, T_b] = f_{abc}T_c$ に注意すると、

$$f_{bcd}f_{ade} + f_{cad}f_{bde} + f_{abd}f_{cde} = 0$$

を得ますが、構造定数の定義から $f_{bac} = -f_{abc}$ であることに注意すると、

$$f_{cad}f_{dbe} - f_{cbd}f_{dae} = f_{abd}f_{cde}$$

と書けます。よって、

$$(F_a)_{bc} = f_{bac}$$

という実行列の組 F_a を定義すると、これは考えているリー群のリー代数の基底になっています。その表現次元はリー群の次元と同一です。これを**随伴表現**(**アジョイント表現**) といいます。

3次回転群 $SO(3)$ の場合は、定義表現としての T_a が、同時に随伴表現を与えることに注意して下さい。どんなリー群にも、そのリー群と同じ次元の実表現があるというわけです。例えば $SU(2)$ から出発して、これを定義表現と考えて随伴表現を作れば、それは $SO(3)$ になるわけです。

[例題] $SO(4) = \{\, e^{\theta_A T_A} \,|\, \theta_A \in \mathbf{R},\ A = 1, 2, \cdots, 6\,\}$ の随伴表現を作れ。ここで、

$$(T_a)_{ij} = \epsilon_{iaj4},\ \ (T_{a'})_{ij} = \delta_{ai}\delta_{4j} - \delta_{aj}\delta_{4i},\ \ a = 1, 2, 3,\ \ a' = a + 3 = 4, 5, 6.$$

[解] リー代数の構造は、

$$[T_a, T_b] = \epsilon_{abc}T_c,\quad [T_a, T_{b'}] = \epsilon_{abc}T_{c'},\quad [T_{a'}, T_{b'}] = \epsilon_{abc}T_c$$

となるので、構造定数は、

$$f_{abc} = f_{ab'c'} = f_{a'bc'} = f_{a'b'c} = \epsilon_{abc} \quad (\text{他は}\,0\,).$$

よって $(F_A)_{BC} = f_{BAC}$ に対し、

$$F_a = \begin{pmatrix} E_a & O \\ O & E_a \end{pmatrix}, \quad F_{a'} = \begin{pmatrix} O & E_a \\ E_a & O \end{pmatrix}, \quad (E_a)_{bc} = \epsilon_{bac}$$

が確かめられ、このとき $\{\, e^{\theta_A F_A} \,\}$ が $SO(4)$ の随伴表現(6次元の実表現)になります。[解終]

12.9 ユニタリ群と特殊ユニタリ群

n次**ユニタリ群** $U(n)$ は、

$$A^\dagger A = \delta$$

を満たすn次複素正方行列 A が成す群です。$A = \delta + \epsilon X$ (ϵ は無限小量) とおくと、

$$X^\dagger = -X$$

を得るので、X はn次反エルミート行列です。よって T_μ をn次エルミート行列の基底として、一般解は、

$$X = -i\theta_\mu T_\mu$$

です。T_μ は**生成子**と呼ばれます。n次エルミート行列の実自由度は n^2 なので、T_μ の個数は n^2 です。便宜上、ギリシャ文字の添字は 0 から n^2-1 まで走るものとしましょう。そうすると $U(n)$ は、

$$U(n) = \{ e^{-i\theta_\mu T_\mu} \,|\, \theta_\mu \in \mathbf{R},\, \mu = 0, 1, \cdots, n^2-1 \}$$

と表されることになります。

$n \geq 2$ のとき、複数ある生成子 T_μ を互いに直交するように選びます。すなわち $\mu \neq \nu$ のとき、

$$(T^*_\mu)_{ij}(T_\nu)_{ij} = 0 \quad \therefore\ (T_\mu)_{ji}(T_\nu)_{ij} = 0 \quad \therefore\ \mathrm{tr}(T_\mu T_\nu) = 0.$$

また、T_0 を単位行列に選ぶと、それは全ての正方行列と可換なので、

$$U(n) = \{ e^{-i\theta_0} e^{-i\theta_a T_a} \} = U(1) \times \{ e^{-i\theta_a T_a} \}$$

です。ここで $a = 1, 2, \cdots, n^2-1$ です。$T_0,\, T_a$ の直交性から $\mathrm{tr}\, T_a = 0$ なので、$e^{-i\theta_a T_a}$ は行列式が 1 で、その集合は**特殊ユニタリ群** $SU(n)$ を成すことがわかります。すなわち $n \geq 2$ のとき、

$$U(n) = U(1) \times SU(n),$$

$$SU(n) = \{e^{-i\theta_a T_a} \,|\, \theta_a \in \mathbf{R},\; a = 1, \cdots, n^2-1\}$$

と直積分解されるわけです。

生成子 T_a は、

$$\mathrm{tr}(T_a T_b) = \frac{1}{2}\,\delta_{ab}$$

で規格化するのが慣習です。例えば $SU(2)$ の場合、$T_a = \sigma_a/2$ でしたが、これが上式を満たしていることに注意してください。

一方、$<SU(n)>$ の構造定数を f_{abc} とすると、

$$[-iT_a, -iT_b] = f_{abc}(-iT_c) \qquad \therefore\; [T_a, T_b] = i f_{abc} T_c.$$

ですが、これらから、

$$\mathrm{tr}\left([T_a, T_b]\, T_c\right) = \frac{i}{2}\, f_{abc}$$

を得るでしょう。これとトレースの性質から f_{abc} が添字 a, b, c について完全反対称であることがわかります。

12.10 SU(3) とゲルマン行列

例えば $SU(3)$ の場合、生成子は $T_a = \lambda_a/2$. ここで、

$$\lambda_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \lambda_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i & 0 \\ i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \lambda_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\lambda_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \lambda_5 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\lambda_6 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \lambda_7 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i \\ 0 & i & 0 \end{pmatrix}, \quad \lambda_8 = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

は**ゲルマン行列**と呼ばれます。このとき T_a は全てトレース 0 のエルミート行列で、規格直交性 $\mathrm{tr}(T_a T_b) = (1/2)\delta_{ab}$ を満たすことに注意してください。$SU(3)$ は、

$$SU(3) = \{e^{-i\theta_a \lambda_a/2} \,|\, \theta_a \in \mathbf{R},\; a = 1, 2, \cdots, 8\,\}$$

と表されることになります。

また、$<SU(3)>$ の構造定数 f_{abc} に対し、

$$\mathrm{tr}\left(\left[\lambda_a, \lambda_b\right] \lambda_c\right) = 4if_{abc}$$

ですが、完全反対称性から f_{abc} の独立な成分は ${}_8C_3 = 56$ 個です。 $a < b < c$ を満たす代表成分を上式から計算すると、少し面倒ですが、

$$f_{123} = 1, \quad f_{147} = \frac{1}{2,} \quad f_{156} = -\frac{1}{2,} \quad f_{246} = \frac{1}{2,} \quad f_{257} = \frac{1}{2,}$$

$$f_{345} = \frac{1}{2,} \quad f_{367} = -\frac{1}{2,} \quad f_{458} = \frac{\sqrt{3}}{2,} \quad f_{678} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

で、他は全て 0 になることが確かめられます $^{(*)}$。

$SU(n)$ の表現を作る処方、すなわち $SU(n)$ の**表現論**は、テンソル法やヤング図と呼ばれる方法により一般的に確立していますが、ここでは基本的な範囲に留めることにし、これは紹介しないことにします。それでも例えば素粒子論を十分に理解できます。一方、$SO(3)$ の表現論は、いわばたまたま角運動量代数の固有ベクトルの構成と等価になっていたことに注意してください。

(*注) Excel VBA による計算プログラムのソースを「あもんノート/数値計算 for VBA」に置いておきます。URL: http://amonphys.web.fc2.com/

索 引