

あもんノート

ユークリッド幾何学、ニュートン力学から、相対論、宇宙論、量子論、場の量子論、素粒子論、そして超ひも理論まで、理論物理学を簡潔にかつ幅広く網羅したノートです。TOP へは下の URL をクリックして行けます。専用の画像掲示板で、ご意見、ご質問等も受け付けております。

<http://amonphys.web.fc2.com/>

目次

第 23 章	ゼータ関数	3
23.1	三角関数の部分分数展開	3
23.2	ゼータ関数とガンマ関数	4
23.3	ゼータ関数に関する積分公式	5
23.4	ガンマ関数の相反公式と解析接続	6
23.5	ゼータ関数の解析接続とリーマン予想	9
23.6	アベル・プラナの和公式	10

第23章 ゼータ関数

ゼータ関数に関連した公式、およびその証明をここにまとめておきます。リーマン予想は物理とはあまり関係しませんが、興味深いと思われるので簡単に触れておきます。

23.1 三角関数の部分分数展開

三角関数 \tan に関して、次のようなシンプルな公式が成り立ちます。

$$\frac{1}{\tan z} = \sum_{k \in \mathbf{Z}} \frac{1}{z - \pi k}.$$

これを三角関数の部分分数展開といいます。 \mathbf{Z} は整数全体の集合を意味します。

[証明] $f(z) = 1/\tan z$ とすると、 f は πk ($k \in \mathbf{Z}$) に1位の極を持ち、留数は全て1であることが簡単にわかります。よって S を複素平面全体とすると、留数定理から、

$$\int_{\partial S} d\zeta \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} = 2\pi i \left(f(z) + \sum_{k \in \mathbf{Z}} \frac{1}{\pi k - z} \right).$$

一方、 ∂S として0を中心とする無限に大きな円をとれば、

$$\int_{\partial S} d\zeta \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} = \lim_{R \rightarrow \infty} \int_0^{2\pi} i R e^{i\theta} d\theta \frac{f(R e^{i\theta})}{R e^{i\theta} - z} = i \lim_{R \rightarrow \infty} \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{\tan(R e^{i\theta})}$$

ですが、 \tan が奇関数であることに注意すると、 $0 \sim \pi$ の寄与と $\pi \sim 2\pi$ の寄与がちょうど打ち消しあい、この積分は0になることがわかります。よって $f(z) = \sum_{k \in \mathbf{Z}} 1/(z - \pi k)$. [証明終]

上の公式を少し変形すると、

$$\frac{1}{\tan z} - \frac{1}{z} = \sum_{k=\pm 1, \pm 2, \dots} \frac{1}{z - \pi k}$$

ですが、辺々 z で微分すると、

$$\frac{1}{\sin^2 z} - \frac{1}{z^2} = \sum_{k=\pm 1, \pm 2, \dots} \frac{1}{(z - \pi k)^2}.$$

さらに z で2回微分すると、

$$\frac{1}{\sin^4 z} - \frac{2}{3 \sin^2 z} - \frac{1}{z^4} = \sum_{k=\pm 1, \pm 2, \dots} \frac{1}{(z - \pi k)^4}$$

を得ます。これらの式で $z \rightarrow 0$ の極限を考えると、

$$\sin z = z - \frac{1}{6} z^3 + \frac{1}{120} z^5 + \dots,$$

$$(1 + ax + bx^2 + \dots)^n = 1 + nax + \frac{n}{2} ((n-1)a^2 + 2b) x^2 + \dots$$

に注意して、

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}, \quad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^4} = \frac{\pi^4}{90}$$

を得るでしょう。

(余談) ちなみにこれら級数の値は、フーリエ展開におけるパーセバルの等式から導くこともでき、その方が計算はいくぶん簡単です(関数論と応用数学の章参照)。しかし三角関数の部分分数展開に基づくこちらの方が系統的と考えられます。

23.2 ゼータ関数とガンマ関数

一般に、

$$\zeta(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^x} \quad (x > 1)$$

でリーマンのゼータ関数を定義します。そうすると、

$$\zeta(2) = \frac{\pi^2}{6}, \quad \zeta(4) = \frac{\pi^4}{90}, \quad \dots$$

偶数におけるゼータ関数の値はこのように π を用いて表されるわけです。一方、奇数のゼータ関数についてはこのような計算ができません。奇数のゼータ関数については近似値が知られているだけで、それらが無理数になるかどうかも一般にはわかっていません。ただし $\zeta(3)$ が無理数であることはアペリーの奇跡的な証明によりわかっています。また、 $\zeta(5)$, $\zeta(7)$, $\zeta(9)$, $\zeta(11)$ のうち、少なくとも1つは無理数であることもわかっています。近似値は、

$$\zeta(3) \sim 1.20205, \quad \zeta(5) \sim 1.03692, \quad \dots$$

ところで全ての正の整数は、素数の列を p_1, p_2, \dots として、 $p_1^{n_1} p_2^{n_2} \dots$ と表されます。ここで n_i は0以上の整数です。よって、ゼータ関数は、

$$\zeta(x) = \sum_{n_1=0}^{\infty} \sum_{n_2=0}^{\infty} \dots (p_1^{n_1} p_2^{n_2} \dots)^{-x} = \prod_{i=1}^{\infty} \left(\sum_{n_i=0}^{\infty} p_i^{-x n_i} \right) = \prod_{i=1}^{\infty} \frac{1}{1 - p_i^{-x}}$$

と表すこともできます (オイラー積)。すなわち、

$$\zeta(x) = \frac{1}{1-2^{-x}} \frac{1}{1-3^{-x}} \frac{1}{1-5^{-x}} \frac{1}{1-7^{-x}} \cdots \quad (x > 1)$$

ということです。このためゼータ関数は素数の性質と深く関係していると考えられます。

一方、ガンマ関数は、

$$\Gamma(x) = \int_0^{\infty} dt t^{x-1} e^{-t} \quad (x > 0)$$

で定義され、

$$\Gamma(1) = 1, \quad \Gamma(x+1) = x\Gamma(x), \quad \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \epsilon \Gamma(\epsilon) = 1$$

という性質を持つのでした。特に正の整数 n に対して、

$$\Gamma(n) = (n-1)!$$

23.3 ゼータ関数に関する積分公式

次の2つの積分公式は重要で、物理では主に統計力学で用いられます。

$$\int_0^{\infty} dt \frac{t^{x-1}}{e^t - 1} = \zeta(x)\Gamma(x), \quad \int_0^{\infty} dt \frac{t^{x-1}}{e^t + 1} = (1 - 2^{1-x})\zeta(x)\Gamma(x).$$

[証明]

$$\begin{aligned} \int_0^{\infty} dt \frac{t^{x-1}}{e^t - 1} &= \int_0^{\infty} dt \frac{t^{x-1} e^{-t}}{1 - e^{-t}} = \int_0^{\infty} dt t^{x-1} e^{-t} \sum_{n=0}^{\infty} (e^{-t})^n \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^{\infty} dt t^{x-1} e^{-(n+1)t} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n+1)^x} \int_0^{\infty} ds s^{x-1} e^{-s} = \zeta(x)\Gamma(x). \end{aligned}$$

途中、積分変数を $s = (n+1)t$ に置換しました。同様にして、

$$\int_0^{\infty} dt \frac{t^{x-1}}{e^t + 1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(n+1)^x} \int_0^{\infty} ds s^{x-1} e^{-s}$$

を得ますが、ここで、

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(n+1)^x} &= 1^{-x} - 2^{-x} + 3^{-x} - 4^{-x} + \cdots \\ &= 1^{-x} + 2^{-x} + 3^{-x} + \cdots - 2(2^{-x} + 4^{-x} + 6^{-x} + \cdots) \\ &= \zeta(x) - 2 \cdot 2^{-x} \zeta(x) = (1 - 2^{1-x})\zeta(x) \end{aligned}$$

に注意して与題後式を得ます。[証明終]

上の公式から、

$$\int_0^{\infty} dt \frac{t^{\epsilon}}{e^t + 1} = (1 - 2^{-\epsilon}) \zeta(1 + \epsilon) \Gamma(1 + \epsilon)$$

ですが、左辺の積分は $\epsilon \rightarrow 0$ で $\log 2$ を与えることが初等的にわかるので、

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \epsilon \zeta(1 + \epsilon) = 1$$

を得ます。すなわち $\zeta(x)$ は $x \rightarrow 1$ で発散し、その留数は 1 です。

[例題] $\int_0^{\infty} dt \frac{t^x}{\cosh^2 t} = 2^{1-x} (1 - 2^{1-x}) \zeta(x) \Gamma(x + 1)$ を証明せよ。

[解] $\cosh t = (e^t + e^{-t})/2$ に注意して、

$$\begin{aligned} \text{左辺} &= 4 \int_0^{\infty} dt \frac{t^x}{(e^t + e^{-t})^2} = 4 \int_0^{\infty} dt \frac{t^x e^{-2t}}{(1 + e^{-2t})^2} \\ &= 4 \int_0^{\infty} dt t^x e^{-2t} \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k e^{-2tk} \sum_{l=0}^{\infty} (-1)^l e^{-2tl} \\ &= 4 \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{l=0}^{\infty} (-1)^{k+l} \int_0^{\infty} dt t^x e^{-2(k+l+1)t} \\ &= 4 \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{l=0}^{\infty} \frac{(-1)^{k+l}}{(2(k+l+1))^{x+1}} \int_0^{\infty} ds s^x e^{-s} \\ &= \frac{\Gamma(x+1)}{2^{x-1}} \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{l=0}^{\infty} \frac{(-1)^{k+l}}{(k+l+1)^{x+1}}. \end{aligned}$$

ここで $k+l=n$ と置くと、 $n=0, 1, 2, \dots$ であり、各 n の値は 2 重和の中で $(n+1)$ 回現れるので、

$$\text{左辺} = \frac{\Gamma(x+1)}{2^{x-1}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(n+1)^x} = \frac{\Gamma(x+1)}{2^{x-1}} (1 - 2^{1-x}) \zeta(x). \quad [\text{解終}]$$

23.4 ガンマ関数の相反公式と解析接続

$0 < \operatorname{Re} z < 1$ を満たす複素数 z に対して、

$$\Gamma(z) \Gamma(1-z) = \frac{\pi}{\sin(\pi z)}$$

が成り立ちます。これをガンマ関数の相反公式といいます。

[証明] ガンマ関数の定義から、

$$\begin{aligned}\Gamma(z)\Gamma(1-z) &= \int_0^\infty ds \int_0^\infty dt t^{z-1} e^{-t} s^{-z} e^{-s} \\ &= \int_0^\infty ds \int_0^\infty s dx (sx)^{z-1} e^{-sx} s^{-z} e^{-s} \\ &= \int_0^\infty ds \int_0^\infty dx x^{z-1} e^{-(x+1)s} = \int_0^\infty dx \frac{x^{z-1}}{x+1}\end{aligned}$$

ですが、図 23.1 に示す経路 C に対して、

$$\begin{aligned}\int_C d\zeta \frac{\zeta^{z-1}}{\zeta+1} &= \int_r^R dx \frac{x^{z-1}}{x+1} + e^{i2\pi z} \int_R^r dx \frac{x^{z-1}}{x+1} \\ &\quad + \int_0^{2\pi} iRe^{i\theta} d\theta \frac{(Re^{i\theta})^{z-1}}{Re^{i\theta}+1} + \int_{2\pi}^0 ire^{i\theta} d\theta \frac{(re^{i\theta})^{z-1}}{re^{i\theta}+1}.\end{aligned}$$

被積分関数は多価で、カット(切断)を実軸正の部分に取りました。 $r \rightarrow 0, R \rightarrow \infty$ という極限をとれば、 $0 < \operatorname{Re} z < 1$ であるため後ろの2項が消えて、

$$\int_C d\zeta \frac{\zeta^{z-1}}{\zeta+1} = (1 - e^{i2\pi z}) \int_0^\infty dx \frac{x^{z-1}}{x+1}.$$

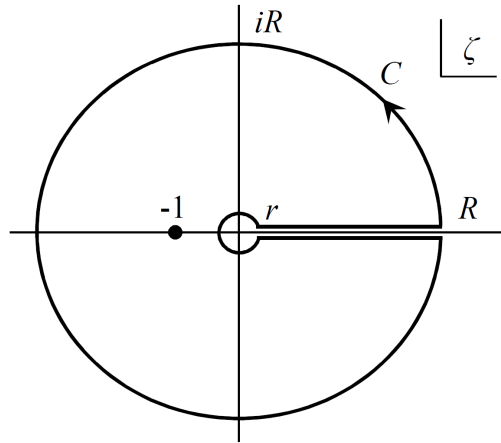


図 23.1: 相反公式

一方、留数定理から、

$$\int_C d\zeta \frac{\zeta^{z-1}}{\zeta+1} = 2\pi i (e^{i\pi})^{z-1} = -2\pi i e^{i\pi z}$$

なので、これらと比較して、

$$\int_0^\infty dx \frac{x^{z-1}}{x+1} = \frac{-2\pi i e^{i\pi z}}{1 - e^{i2\pi z}} = \frac{\pi}{\sin(\pi z)} \quad \therefore \Gamma(z)\Gamma(1-z) = \frac{\pi}{\sin(\pi z)}. \quad \text{[証明終]}$$

例えば相反公式で $z = 1/2$ とすると、

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$$

を得るでしょう。これはガウス積分の評価からも知られていた結果です。

また、相反公式をその適用範囲を超え、いわば“意図的に乱用”することにより、ガンマ関数 $\Gamma(z)$ の定義域を $\operatorname{Re} z > 0$ から 0 以下の整数を除く複素数全体になめらかに拡張できることに注意してください。このような正則性を保持した定義域の拡張を一般に解析接続といいます。解析接続による定義域の拡張は一意的であることが知られています(一致の定理)。図 23.2 に実軸上のガンマ関数のグラフを示します(*)。

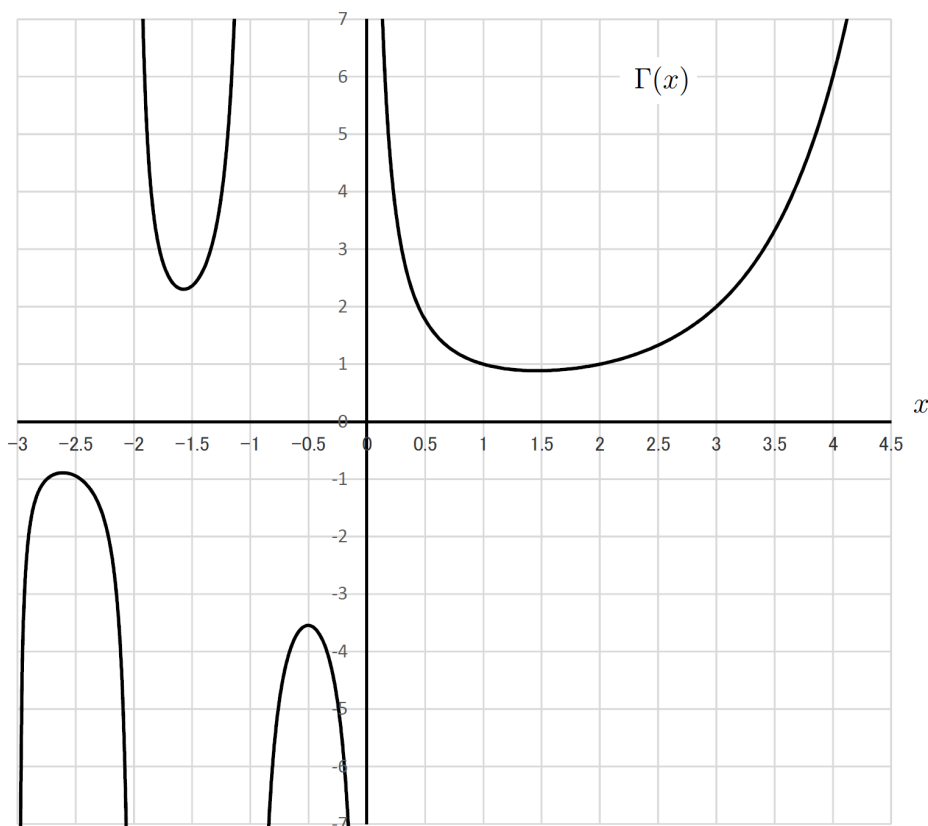


図 23.2: ガンマ関数

(*注) 数値計算の際には $t = 0$ における特異性を解析的に処理し、

$$\Gamma(z) = \begin{cases} \frac{\epsilon^z}{z} + \int_{\epsilon}^{\Lambda} dt t^{z-1} e^{-t} & \left(\operatorname{Re} z \geq \frac{1}{2}\right) \\ \frac{\pi}{\sin(\pi z)\Gamma(1-z)} & \left(\operatorname{Re} z < \frac{1}{2}\right) \end{cases}$$

($\epsilon \rightarrow 0, \Lambda \rightarrow \infty$) とするのが良いでしょう。

23.5 ゼータ関数の解析接続とリーマン予想

複素数 z に対して、

$$I(z) = \int_C d\zeta \frac{\zeta^{z-1}}{e^\zeta - 1}$$

で $I(z)$ を定義します。ここで C は図 23.3 のように、実軸正の無限遠方から 0 を囲って周回する経路です。 z が整数でない場合、被積分関数は多価ですが、この場合カットを実軸正の部分に取ることにします。

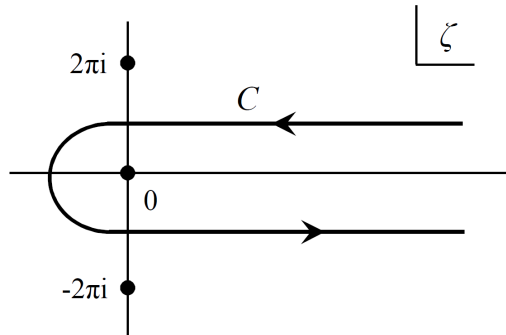


図 23.3: ゼータ関数における積分経路

正則な領域で C を変形することにより、 $I(z)$ は、

$$I(z) = \int_{\infty}^r dx \frac{x^{z-1}}{e^x - 1} + \int_0^{2\pi} d\theta \frac{i(re^{i\theta})^z}{e^{re^{i\theta}} - 1} + e^{i2\pi z} \int_r^{\infty} dx \frac{x^{z-1}}{e^x - 1} \quad (0 < r < 2\pi)$$

と表せますが、ここで $r \rightarrow 0$ の極限をとると、 $\operatorname{Re} z > 1$ においては第 2 項が消えて、

$$I(z) = (e^{i2\pi z} - 1) \int_0^{\infty} dx \frac{x^{z-1}}{e^x - 1} = (e^{i2\pi z} - 1)\zeta(z)\Gamma(z)$$

$$\therefore \zeta(z) = \frac{1}{\Gamma(z)(e^{i2\pi z} - 1)} \int_C d\zeta \frac{\zeta^{z-1}}{e^\zeta - 1}$$

を得ます。ここで $\operatorname{Re} z > 1$ ですが、この式によりゼータ関数の定義域を $z = 1$ を除く複素数全体に解析接続します。相反公式を使えば、

$$\zeta(z) = \frac{\Gamma(1-z)}{2\pi i e^{i\pi z}} \int_C d\zeta \frac{\zeta^{z-1}}{e^\zeta - 1}$$

と表すこともできます。

例えば $z = -n$ ($n = 0, 1, 2, \dots$) のとき、

$$\zeta(-n) = \frac{(-1)^n n!}{2\pi i} \int_C d\zeta \frac{\zeta^{-n-1}}{e^\zeta - 1}$$

ですが、ここで被積分関数が $\zeta = 0$ に $(n+2)$ 位の極を持つことに注意すれば、留数定理から、

$$\zeta(-n) = \frac{(-1)^n}{n+1} \left(\frac{d}{d\zeta} \right)^{n+1} \frac{\zeta}{e^\zeta - 1} \Big|_{\zeta=0}$$

を得ます。これを計算して、

$$\begin{aligned} \zeta(0) &= -\frac{1}{2}, & \zeta(-1) &= -\frac{1}{12}, & \zeta(-2) &= 0, \\ \zeta(-3) &= \frac{1}{120}, & \zeta(-4) &= 0, & \zeta(-5) &= -\frac{1}{252}, \quad \dots \end{aligned}$$

が得られるでしょう。負の偶数 z において $\zeta(z) = 0$ となることが見てとれますが、これら z をゼータ関数の自明な零点といいます。

一方、

負の偶数でない z において $\zeta(z) = 0$ ならば $\operatorname{Re} z = 1/2$ である

(ゼータ関数の非自明な零点は実部が $1/2$ の複素数に限られる)

という予想があり、これはリーマン予想と呼ばれます。リーマン予想の真偽は特に整数論において重要なのですが、1859年にリーマンにより提示されて以降、多くの数学者の努力もむなしく、いまだその証明も反証もできていません。第一級の未解決問題で、ミレニアム懸賞問題の1つになっています。ちなみに実部が $1/2$ の非自明な零点は無限に存在することが知られています。

図 23.4 に実軸上のゼータ関数のグラフを示します (*).

(*注) 数値計算の際には、積分経路 C を単位円を含む経路とし、

$$\zeta(z) = \Gamma(1-z) \left(\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{2\pi} \frac{e^{iz(\theta-\pi)}}{e^{e^{i\theta}} - 1} + \frac{\sin(\pi z)}{\pi} \int_1^\infty dt \frac{t^{z-1}}{e^t - 1} \right)$$

とするのが良いでしょう。ガンマ関数とあわせ、Excel VBA における数値計算のコードを「あもんノート/数値計算 for VBA」に置いておきます。URL: <http://amonphys.web.fc2.com/>

23.6 アベル・プラナの和公式

$\operatorname{Re} z \geq 0$ で正則で、かつ遠方で高々ポリノミアル(多項式的)な関数 f に対して、すなわち、 $\exists k \in \mathbf{Z} \left(\lim_{|z| \rightarrow \infty} f(z) z^k = 0 \right)$ を満たす関数 f に対して、

$$\sum_{n=0}^{\infty} f(n) - \int_0^{\infty} dx f(x) = \frac{f(0)}{2} + i \int_0^{\infty} dy \frac{f(iy) - f(-iy)}{e^{2\pi y} - 1}$$

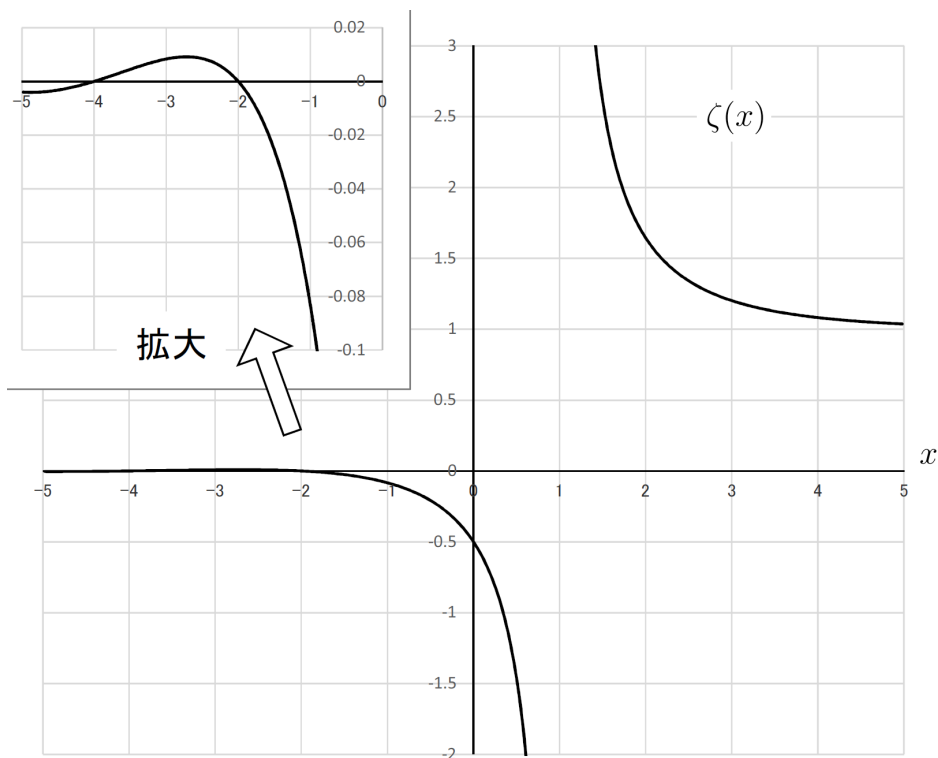


図 23.4: ゼータ関数

が成り立ちます。これをアベル・プラナの和公式といいます。

特に $f(x) = x, x^3$ とすると、

$$\sum_{n=1}^{\infty} n - \int_0^{\infty} dx x = -\frac{1}{12}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} n^3 - \int_0^{\infty} dx x^3 = \frac{1}{120}$$

という極めてトリッキーな式が得られますが、これらの式は一部の物理 (カシミール効果の理論) において実際に用いられます。

以下、アベル・プラナの和公式の証明です。

[証明] 経路 Γ を図 23.5 左のようにとると、留数定理から、

$$\sum_{n \in \mathbf{Z}} \int_{\Gamma} dz \frac{f(z)}{z-n} = 2\pi i \sum_{n=0}^{\infty} f(n)$$

ですが、ここで三角関数の部分分数展開: $\frac{\pi}{\tan(\pi z)} = \sum_{n \in \mathbf{Z}} \frac{1}{z-n}$ を用いれば、

$$\sum_{n=0}^{\infty} f(n) = \frac{1}{2i} \int_{\Gamma} dz \frac{f(z)}{\tan(\pi z)}$$

となります。右辺の積分は、

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma} dz \frac{f(z)}{\tan(\pi z)} &= \int_R^{\epsilon} idy \frac{f(iy)}{\tan(i\pi y)} + \int_{\epsilon}^R -idy \frac{f(-iy)}{\tan(-i\pi y)} \\ &\quad + \int_{\pi/2}^{3\pi/2} i\epsilon e^{i\theta} d\theta \frac{f(\epsilon e^{i\theta})}{\tan(\pi \epsilon e^{i\theta})} + I_1 - I_2 \\ &= -i \int_0^{\infty} dy \frac{f(iy) - f(-iy)}{\tan(i\pi y)} + if(0) + I_1 - I_2 \end{aligned}$$

と評価され、ここで、

$$I_k = \int_{C_k} dz \frac{f(z)}{\tan(\pi z)} \quad (k = 1, 2)$$

で、 C_1 は R から iR に向かう第1象限の経路、 C_2 は R から $-iR$ に向かう第4象限の経路です ($R \rightarrow \infty$)。よって、

$$\sum_{n=0}^{\infty} f(n) = \frac{f(0)}{2} - \frac{1}{2} \int_0^{\infty} dy \frac{f(iy) - f(-iy)}{\tan(i\pi y)} - \frac{i}{2} (I_1 - I_2) \quad (1)$$

です。

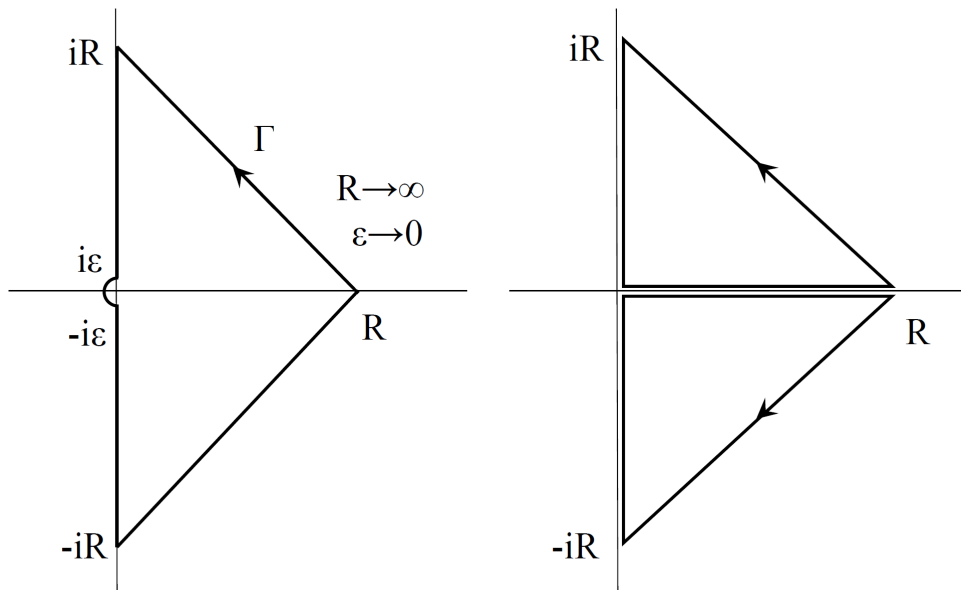


図 23.5: アベル・プラナの和公式

一方、関数 f を図 23.5 右の2つの経路で積分すれば、コーシーの定理から、それぞれ、

$$\begin{aligned} \int_0^{\infty} dx f(x) + \int_{\infty}^0 idy f(iy) + J_1 &= 0, \\ \int_0^{\infty} dx f(x) + \int_{\infty}^0 -idy f(-iy) + J_2 &= 0, \quad J_k = \int_{C_k} dz f(z) \end{aligned}$$

ですが、これら2式を加えることで、

$$\int_0^{\infty} dx f(x) = \frac{i}{2} \int_0^{\infty} dy (f(iy) - f(-iy)) - \frac{1}{2} (J_1 + J_2) \quad (2)$$

を得ます。(1)−(2)を作り、関数 f が遠方で高々ポリノミアルであることから、

$$iI_1 - J_1 = \int_{C_1} dz \left(\frac{i}{\tan(\pi z)} - 1 \right) f(z) = \int_{C_1} dz \frac{2}{e^{-i2\pi z} - 1} f(z) = 0,$$

$$iI_2 + J_2 = \int_{C_2} dz \left(\frac{i}{\tan(\pi z)} + 1 \right) f(z) = \int_{C_2} dz \frac{-2}{e^{i2\pi z} - 1} f(z) = 0$$

となることに注意すれば与題が得られます。[証明終]

索引

あ	
<hr/>	
アベル・プラナの和公式.....	11
一致の定理.....	8
オイラー積.....	5
か	
<hr/>	
解析接続.....	8
さ	
<hr/>	
三角関数の部分分数展開.....	3
ゼータ関数.....	4
相反公式.....	7
ら	
<hr/>	
リーマン予想.....	10