あもんノート

　ユークリッド幾何学、ニュートン力学から、相対論、宇宙論、量子論、場の量子論、素粒子論、そして超ひも理論まで、理論物理学を簡潔にかつ幅広く網羅したノートです。TOP へは下の URL をクリックして行けます。専用の画像掲示板で、ご意見、ご質問等も受け付けております。

http://amonphys.web.fc2.com/

目 次

第30章　ひも理論入門 **3**
30.1　相対論的粒子の作用 3
30.2　e=1ゲージ 4
30.3　粒子の物理的状態とon-shell性 5
30.4　南部・後藤作用とポリヤコフ作用 6
30.5　共形ゲージと共形対称性 8
30.6　ひもの運動 9
30.7　ユークリッド化と複素座標 10
30.8　ゴーストの運動 12
30.9　共形カレントと共形保存量 13
30.10 ヴィラソロ代数と中心電荷 15
30.11 ひも理論のBRS電荷 17
30.12 タキオンと重力子 19
30.13 2次元のスピノルと超ひも理論 21
30.14 ひも理論の発展 23

第30章　ひも理論入門

ひも理論 (弦理論, string theory) は、もともとはハドロンの性質を説明するために考案された理論ですが、その後、量子重力を含む理論になり得ることが指摘され、特にグラスマン座標を導入したひも理論は超ひも理論 (超弦理論, superstring theory) と呼ばれ、万物の理論の有力候補と考えられています。ここではまず簡単な相対論的粒子の系で特異系の量子論を復習し、次に同様な方法でひも理論を構成し、その性質を見てゆくことにしましょう。

30.1　相対論的粒子の作用

質量 m の**相対論的粒子**の作用は、世界線の長さ $\times(-m)$ で、

$$S_m = -m\int d\tau$$

と書かれるのでした。ここで τ は固有時間です。世界線上の適当なパラメータを λ, 世界線各部のローレンツ座標を $x^\mu(\lambda)$, ローレンツ計量を $\eta_{\mu\nu}$ とすれば、ミンコフスキー計量構造：$d\tau^2 = \eta_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu$ に注意して、

$$S_m = -m\int d\lambda\,\sqrt{\dot{x}\cdot\dot{x}}$$

と書くこともできます。ドットは λ 微分、センタードットはローレンツ計量による内積を意味します (図30.1)。

そうすると、ラグランジアンは $L = -m\sqrt{\dot{x}\cdot\dot{x}}$ であり、x^μ の正準共役変数は、

$$p_\mu = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}^\mu} = -\frac{m\dot{x}_\mu}{\sqrt{\dot{x}\cdot\dot{x}}}$$

となり、正準変数の間に $p\cdot p = m^2$ という拘束条件を生じてしまいます。このため正準量子化を行えません。こうした困難が生じるのは、世界線のパラメータ λ の与え方が任意で、**再パラメータ化** (reparameterization)：$\lambda' = \lambda - \theta$ に関して作用 S_m が不変だからです。ここで θ は λ に依存した無限小量です。すなわち系がローカル対称性を持っていて、特異系になっているからです。誘導される x^μ の無限小変換式 (リー微分) は、

$$\delta x^\mu = \theta\dot{x}^\mu.$$

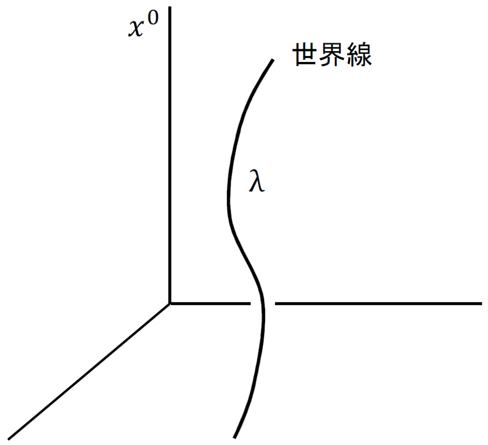

図 30.1: 世界線

このローカル対称性を固定しなければ正準量子論が得られないのは当然でしょう。

いま、$e(\lambda)$ を補助変数として、

$$S = -\frac{1}{2}\int d\lambda \left(\frac{\dot{x}\cdot\dot{x}}{e} + m^2 e\right)$$

という作用を考えると、これは元の作用 S_m と等価です。実際このとき e に関する運動方程式は、

$$e = \frac{\sqrt{\dot{x}\cdot\dot{x}}}{m}$$

となるため、これを S に戻せば S_m が得られます。しかしいぜんとして S は、

$$\delta x^\mu = \theta \dot{x}^\mu, \quad \delta e = \dot{\theta} e + \theta \dot{e}$$

という再パラメータ化に対して不変です。

30.2 e=1 ゲージ

そこで、生成汎関数：

$$Z[J] = \int \mathcal{D}x\mathcal{D}e\ e^{iS+J\cdot x} \Big/ \int \mathcal{D}x\mathcal{D}e\ e^{iS}$$

から再パラメータ化の自由度を抜き出し、この自由度を固定する処理を行いましょう (ゲージ固定)。特に $e=1$ に固定するなら、恒等式、

$$\int \mathcal{D}\theta\ \mathrm{Det}\,\frac{\delta e}{\delta \theta}\,\delta\left[e-1\right] = 1$$

および、

$$\mathrm{Det}\,\frac{\delta e}{\delta\theta} = \mathrm{Det}\left(e\frac{d}{d\lambda} + \dot{e}\right) = \int \mathcal{D}c\mathcal{D}b\,\exp\left(\int d\lambda\, b \left(e\,\frac{d}{d\lambda} + \dot{e}\right) c\right)$$

に注意して、

$$Z[J] = \int \mathcal{D}x\mathcal{D}c\mathcal{D}b\; e^{i\tilde{S}+J\cdot x} \Big/ \int \mathcal{D}x\mathcal{D}c\mathcal{D}b\; e^{i\tilde{S}},$$

$$\tilde{S} = \int d\lambda\, \tilde{L}, \quad \tilde{L} = -\frac{1}{2}\left(\dot{x}\cdot\dot{x} + m^2\right) - ib\dot{c}$$

を得るでしょう。このゲージ固定を特に **e=1 ゲージ**といいます。c, b は実グラスマン数の変数で、ゴーストを意味します。

有効ラグランジアン $\tilde{L}$ から得られる正準共役変数は、

$$\frac{\partial \tilde{L}}{\partial \dot{x}^\mu} = -\dot{x}_\mu, \quad \frac{\partial \tilde{L}}{\partial \dot{c}} = -ib$$

なので、今度の場合は拘束条件はなく、

$$[x^\mu, \dot{x}^\nu] = -i\eta^{\mu\nu}, \quad [x^\mu, x^\nu] = [\dot{x}^\mu, \dot{x}^\nu] = 0,$$

および、簡便量子化、

$$\{c, b\} = -1, \quad \{c, c\} = \{b, b\} = 0,$$

により正準量子論を得ることができます (他は可換)。運動方程式は、

$$\ddot{x}^\mu = 0, \quad \dot{c} = \dot{b} = 0$$

となるので、$\dot{x}^\mu$, c, b はそれぞれ保存量です。ハミルトニアンは、

$$\tilde{H} = \frac{\partial \tilde{L}}{\partial \dot{x}^\mu}\,\dot{x}^\mu + \frac{\partial \tilde{L}}{\partial \dot{c}}\,\dot{c} - \tilde{L} = \frac{1}{2}\left(-\dot{x}\cdot\dot{x} + m^2\right)$$

となり、これも確かに保存量になっています。

ネーターの定理の観点から、系の 4 元運動量は $\dot{x}^\mu$ です。ここでのハミルトニアン $\tilde{H}$ は世界線の再パラメータ化のグローバル部分 (並進部分) からくる保存量であり、系のエネルギーとは異なるので注意してください。

30.3 粒子の物理的状態と on-shell 性

ハミルトニアン $\tilde{H}$ が保存量であることに注意して、物理的状態空間を、

$$\mathcal{V}_{\text{phys}} = \{\, |f> \mid \tilde{H}|f> = 0 \,\}$$

で定義しましょう。$\tilde{H}$ は世界線の再パラメータ化の並進部分の生成子なので、この仮定は、物理的状態、すなわち我々の量子世界が、パラメータ λ の並進変換に対し不変であることを意味しています。パラメータ λ は物理的な量ではないので、この仮定はいたって自然です。

いま、4元運動量 $\dot{x}^\mu$ の固有値 k^μ を与える固有ベクトルを $|k\!>$ とすると、

$$\dot{x}^\mu|k\!> = k^\mu|k\!>$$

ですが、これが物理的状態にあるとすれば、$\tilde{H}|k\!>=0$ から、

$$k\cdot k = m^2$$

です。すなわち物理的状態においては、4元運動量 $\dot{x}^\mu$ の固有値は必ず on-shell にあるというわけです。

ちなみに ξ を無限小のグラスマン数として、

$$\delta_{\mathrm{B}} x^\mu = \xi c\dot{x}^\mu, \quad \delta_{\mathrm{B}} c = 0, \quad \delta_{\mathrm{B}} b = \frac{i\xi}{2}\left(\dot{x}\cdot\dot{x} - m^2\right)$$

で BRS 変換を定義すると、

$$\delta_{\mathrm{B}}\tilde{L} = -\frac{\xi}{2}\frac{d}{d\lambda}\big(c(\dot{x}\cdot\dot{x} + m^2)\big)$$

が確かめられるので、有効作用 $\tilde{S}$ は BRS 変換に対して不変です。ネーターの定理から得られる保存量は、

$$Q_{\mathrm{B}} = \frac{1}{2}c(-\dot{x}\cdot\dot{x} + m^2) = c\tilde{H}$$

となり、BRS 電荷と呼ばれます。明らかに $Q_{\mathrm{B}}^2 = 0$ で、すなわち BRS 電荷のベキ零性が成立します。

特に初期条件として $b|f\!>=0$ を仮定すると、$\{c, b\} = -1$ から $c|f\!>\neq 0$ がわかるので、このとき $Q_{\mathrm{B}}|f\!>=0 \Leftrightarrow \tilde{H}|f\!>=0$ であることに注意してください。すなわち物理的状態は、一般に特異系でそうであるように、$Q_{\mathrm{B}}|f\!>=0$ で与えられると考えることもできます。

(余談) たかが1粒子の量子力学が相対論的な場合はそれが特異系であるために、このようにレベルの高い話になります。相対論的な場合は粒子よりむしろスカラー場の量子論の方が、ローカル対称性を持たないため、初等的なレベルで済むわけです。

30.4 南部・後藤作用とポリヤコフ作用

それでは**ひも理論**に進みましょう。

空間的にひも状の物体はミンコフスキー時空において2次元の面を描くことになります。これを**世界面**といいます。世界面上の適当なパラメータ (2次元座標) を σ^α $(\alpha = 0, 1)$, 世界面各部のローレンツ座標を $X^\mu(\sigma)$ とすると、微小固有時間 $d\tau$ に対して、

$$d\tau^2 = \eta_{\mu\nu}dX^\mu dX^\nu = \eta_{\mu\nu}\frac{\partial X^\mu}{\partial\sigma^\alpha}\frac{\partial X^\nu}{\partial\sigma^\beta}d\sigma^\alpha d\sigma^\beta.$$

よって世界面における2次元計量は、

$$\bar{g}_{\alpha\beta} = \eta_{\mu\nu}\frac{\partial X^{\mu}}{\partial\sigma^{\alpha}}\frac{\partial X^{\nu}}{\partial\sigma^{\beta}} = \partial_{\alpha}X\cdot\partial_{\beta}X$$

となります。ここでもセンタードットはローレンツ内積を意味します。図30.2に閉じたひも (**閉弦**, closed string) の世界面を図示します。ひも理論では、輪ゴムのように閉じたひもと、2つの端を持つ開いたひも (**開弦**, open string) が考えられます。

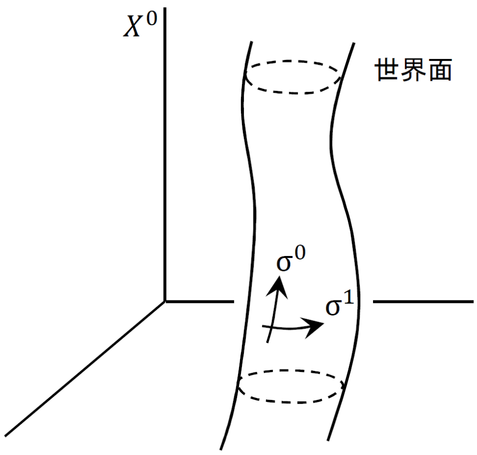

図 30.2: 世界面

ひも理論の作用は世界面の面積に比例したものと仮定され、

$$S_{\mathrm{NG}} = -\frac{1}{2\pi\alpha'}\int d^2\sigma\,\sqrt{-\det\bar{g}}$$

と書かれます。これを**南部・後藤作用**といいます。α' はひも理論における唯一の定数で、作用の無次元性から質量次元 -2 です。よってこの理論が量子重力を意味していると考えた場合、α' は万有引力定数程度の量 ($\sim (10^{19}\,\mathrm{GeV})^{-2}$) ということになります。以下、$\alpha' = 1$ の単位系をとります。

$g_{\alpha\beta}(\sigma)$ を対称テンソルの補助場として、

$$S = -\frac{1}{4\pi}\int d^2\sigma\,\sqrt{-\det g}\,g^{\alpha\beta}\partial_{\alpha}X\cdot\partial_{\beta}X$$

は**ポリヤコフ作用**と呼ばれます。ここで $g^{\alpha\beta}$ は $g_{\alpha\beta}$ の逆行列です。ポリヤコフ作用は南部・後藤作用と等価です。実際、

$$\delta\det g = \det g\,g^{\alpha\beta}\delta g_{\alpha\beta}, \quad \delta g^{\alpha\beta} = -g^{\alpha\gamma}g^{\beta\delta}\delta g_{\gamma\delta}$$

に注意すると、$g_{\alpha\beta}$ の場の方程式は、

$$\frac{\delta S}{\delta g_{\alpha\beta}} = -\frac{1}{4\pi}\sqrt{-\det g}\left(\frac{1}{2}g^{\alpha\beta}g^{\gamma\delta} - g^{\alpha\gamma}g^{\beta\delta}\right)\bar{g}_{\gamma\delta} = 0 \qquad \therefore\ g_{\alpha\beta}g^{\gamma\delta}\bar{g}_{\gamma\delta} = 2\bar{g}_{\alpha\beta}$$

を与えますが、$g^{\gamma\delta}\bar{g}_{\gamma\delta}=k$ とおくことで、

$$g_{\alpha\beta}=\frac{2}{k}\,\bar{g}_{\alpha\beta}$$

が任意の 0 でない実数 k に対して解であるとわかります。これを S に戻して $g_{\alpha\beta}$ を消去すると、南部・後藤作用 S_{NG} が得られます。

ポリヤコフ作用は世界面座標 σ^α の一般座標変換に対して不変になっています。場 X^μ, $g_{\alpha\beta}$ の無限小変換は、$\sigma'^\alpha=\sigma^\alpha-\theta^\alpha$ として、

$$\delta X^\mu=\theta^\alpha\partial_\alpha X^\mu,\quad \delta g_{\alpha\beta}=\theta^\gamma\partial_\gamma g_{\alpha\beta}+\partial_\alpha\theta^\gamma g_{\gamma\beta}+\partial_\beta\theta^\gamma g_{\alpha\gamma}.$$

また、ポリヤコフ作用は、**ワイル変換** (局所的スケール変換)：$g'_{\alpha\beta}=\Lambda g_{\alpha\beta}$ に対しても不変になっています。ここで Λ は σ^α に依存した正の実数です。$g_{\alpha\beta}$ の無限小変換は、$\Lambda=1+\lambda$ として、

$$\delta g_{\alpha\beta}=\lambda g_{\alpha\beta}.$$

θ^α, λ は共に世界面座標 σ^α に依存した無限小量で、それゆえこれら対称性は合わせて自由度 3 のローカル対称性になります。

30.5 共形ゲージと共形対称性

ひも理論の生成汎関数は、ポリヤコフ作用を S として、

$$Z[J]=\int\mathcal{D}X\mathcal{D}g\;e^{iS+J\cdot X}\Big/\int\mathcal{D}X\mathcal{D}g\;e^{iS}$$

ですが、補助場 $g_{\alpha\beta}$ を 2 次元ローレンツ計量 $\eta_{\alpha\beta}$ に固定すれば、自由度 3 のローカル対称性を全て殺せます。恒等式、

$$\int\mathcal{D}\theta\;\mathrm{Det}\,\frac{\delta g}{\delta\theta}\,\delta\,[\,g-\eta\,]=1$$

および、c^γ, $a^{\alpha\beta}\,(=a^{\beta\alpha})$ を実グラスマン数として、

$$\mathrm{Det}\,\frac{\delta g}{\delta\theta}=\int\mathcal{D}a\mathcal{D}c\,\exp\left(\int d^2\sigma\,c^\gamma(-g_{\alpha\beta}\partial_\gamma+g_{\gamma\beta}\partial_\alpha+g_{\alpha\gamma}\partial_\beta)a^{\alpha\beta}\right)$$

であることに注意すれば、

$$Z[J]=\int\mathcal{D}X\mathcal{D}a\mathcal{D}c\;e^{i\tilde{S}+J\cdot X}\Big/\int\mathcal{D}X\mathcal{D}a\mathcal{D}c\;e^{i\tilde{S}},$$

$$\tilde{S}=-\frac{1}{4\pi}\int d^2\sigma\,\partial_\alpha X\cdot\partial^\alpha X-i\int d^2\sigma\,c^\gamma\partial_\alpha(-\delta^\alpha_\gamma a^\beta_\beta+2a^\alpha_\gamma)$$

を得るでしょう。添字の上げ下げはローレンツ計量で行っています。あるいは、$b^\alpha_\gamma = 2\pi(-\delta^\alpha_\gamma a^\beta_\beta + 2a^\alpha_\gamma)$ で変数変換すれば、$b^\alpha_\alpha = 0$, $b_{\alpha\beta} = b_{\beta\alpha}$ が成り立ち、有効作用は、

$$\tilde{S} = -\frac{1}{2\pi}\int d^2\sigma\left(\frac{1}{2}\,\partial_\alpha X\cdot\partial^\alpha X + ic^\gamma\partial_\alpha b^\alpha_\gamma\right)$$

となります。このゲージ固定を**共形ゲージ**といいます。

ポリヤコフ作用が、一般座標変換 + ワイル変換：

$$\delta g_{\alpha\beta} = \theta^\gamma\partial_\gamma g_{\alpha\beta} + \partial_\alpha\theta^\gamma g_{\gamma\beta} + \partial_\beta\theta^\gamma g_{\alpha\gamma} + \lambda g_{\alpha\beta}$$

に対して不変であったことに対応し、有効作用 $\tilde{S}$ は、

$$\partial_\alpha\theta_\beta + \partial_\beta\theta_\alpha = -\lambda\eta_{\alpha\beta}$$

を満たす変換パラメータ θ^α による一般座標変換に対して不変です(*)。この変換は角度を変えない変換になっているため、**共形変換**と呼ばれ、共形変換に対して不変な性質は**共形対称性** (conformal symmetry) と呼ばれます。変換パラメータ θ^α は完全に自由ではないため、共形対称性はローカル対称性ではありません。いわば無限自由度のグローバル対称性であり、それゆえ共形対称性を持つ理論は無限個の保存量を持ちます。

(*注) 有効作用のゴースト部は、$-i/(2\pi)\int d^2\sigma\sqrt{-\det g}\,g^{\alpha\beta}c^\gamma\nabla_\alpha b_{\beta\gamma}$ という一般座標変換かつワイル変換に対して不変な汎関数において、$g_{\alpha\beta}$ をローレンツ計量に固定したものとみなせるため、やはり共形対称性を持ちます。∇_α は共変微分です。

30.6 ひもの運動

有効作用 $\tilde{S}$ の式から、ひも座標 $X^\mu(\sigma)$ の運動方程式は、

$$\partial_\alpha\partial^\alpha X^\mu = 0$$

です。いま、閉じたひもを考え、$\sigma^1 = 0 \sim 2\pi$ とし、周期的境界条件を課すと、$\{\, e^{in\sigma^1} \,|\, n \in \mathbf{Z} \,\}$ が完全系を成すことに注意して、

$$X^\mu = \sum_{n\in\mathbf{Z}} f^\mu_n(\sigma^0)\, e^{in\sigma^1}$$

とおけます。これを運動方程式に代入して、$\ddot{f}^\mu_n = -n^2 f^\mu_n$. ドットは σ^0 による微分を意味します。よって、

$$f^\mu_n(\sigma^0) = \begin{cases} x^\mu + u^\mu\sigma^0 & (n = 0) \\ A^\mu_n\, e^{in\sigma^0} + B^\mu_n\, e^{-in\sigma^0} & (n \neq 0). \end{cases}$$

ここで x^μ, u^μ, A_n^μ, B_n^μ は定数です。これを X^μ の式に戻すわけですが、後の便宜上、

$$u^\mu = 2\pi p^\mu, \quad A_{-n}^\mu = \frac{i}{\sqrt{2}n}\,\alpha_n^\mu, \quad B_n^\mu = \frac{i}{\sqrt{2}n}\,\bar{\alpha}_n^\mu$$

と置換して、

$$X^\mu = x^\mu + 2\pi p^\mu \sigma^0 + \frac{i}{\sqrt{2}} \sum_{n\neq 0} \frac{1}{n}\left(\alpha_n^\mu\, e^{-in(\sigma^0+\sigma^1)} + \bar{\alpha}_n^\mu\, e^{-in(\sigma^0-\sigma^1)}\right)$$

を得ます。これが X^μ の一般解の式です。X^μ の実性：$X^{\mu *} = X^\mu$ は、

$$x^{\mu *} = x^\mu, \quad p^{\mu *} = p^\mu, \quad \alpha_n^{\mu *} = \alpha_{-n}^\mu, \quad \bar{\alpha}_n^{\mu *} = \bar{\alpha}_{-n}^\mu$$

であれば満たされます。

X^μ の正準共役は $-(2\pi)^{-1}\dot{X}_\mu$ となるので、正準交換関係は、

$$[X^\mu(\sigma), \dot{X}^\nu(\sigma')]_{\sigma^0=\sigma'^0} = -2\pi i\,\eta^{\mu\nu}\delta(\sigma^1 - \sigma'^1)$$

で与えられ、他は同 σ^0 値において可換です。これは、

$$[x^\mu, p^\nu] = -\frac{i}{2\pi}\,\eta^{\mu\nu}, \quad [\alpha_n^\mu, \alpha_m^\nu] = [\bar{\alpha}_n^\mu, \bar{\alpha}_m^\nu] = -n\delta_{n+m}^0 \eta^{\mu\nu}$$

において満たされます (他は可換)。α_n^μ と $\alpha_{-n}^\mu = \alpha_n^{\mu *}$ $(n = 1, 2, \cdots)$ が交換せず、これらが場の量子論における生成消滅演算子の役割を果たします。生成消滅演算子が多数あるのは、ひもが色々な振動モードを持つからで、大別して α_n^μ と $\bar{\alpha}_n^\mu$ の 2 種類が存在するのは、ひもが閉じていることにより、右回りと左回りの振動モードが存在するためです。

ネーターの定理の観点から、系の 4 元運動量は、

$$P^\mu = \frac{1}{2\pi}\,\dot{X}^\mu = p^\mu + \frac{1}{2\sqrt{2}\pi} \sum_{n\neq 0} \left(\alpha_n^\mu\, e^{-in(\sigma^0+\sigma^1)} + \bar{\alpha}_n^\mu\, e^{-in(\sigma^0-\sigma^1)}\right)$$

であり、よって p^μ はひもの重心の 4 元運動量を意味します。p^μ の固有値が物理的条件によりどのように束縛されるかが重要になってきます。

30.7 ユークリッド化と複素座標

共形変換の式：$\partial_\alpha \theta_\beta + \partial_\beta \theta_\alpha = -\lambda \eta_{\alpha\beta}$ をばらして書くと、

$$\partial_0\theta_0 = -\frac{\lambda}{2,} \quad \partial_1\theta_1 = \frac{\lambda}{2,} \quad \partial_0\theta_1 + \partial_1\theta_0 = 0$$

ですが、$\theta^\alpha = -\delta\sigma^\alpha$ だったので、これらは、

$$\frac{\partial\delta\sigma^0}{\partial\sigma^0} = \frac{\partial\delta\sigma^1}{\partial\sigma^1}, \qquad \frac{\partial\delta\sigma^1}{\partial\sigma^0} = \frac{\partial\delta\sigma^0}{\partial\sigma^1}$$

を意味します。また、

$$\tau = i\sigma^0, \quad \sigma = \sigma^1$$

で世界面座標の**ユークリッド化**を行えば、

$$\frac{\partial\delta\tau}{\partial\tau} = \frac{\partial\delta\sigma}{\partial\sigma}, \qquad \frac{\partial\delta\sigma}{\partial\tau} = -\frac{\partial\delta\tau}{\partial\sigma}$$

となります。さらに、

$$z = e^{\tau+i\sigma}$$

で世界面の**複素座標** z を定義すれば、共形変換は、

$$\delta z = \epsilon f(z)$$

と表せます。ここで ϵ は無限小の実数、f は任意の複素関数です。実際このとき、$\delta z = z\delta\tau + iz\delta\sigma$ に注意して、上式は、

$$\delta\tau + i\delta\sigma = \frac{\epsilon f(z)}{z} \qquad \therefore \begin{cases} \dfrac{\partial\delta\tau}{\partial\tau} + i\,\dfrac{\partial\delta\sigma}{\partial\tau} = \epsilon z\,\dfrac{d}{dz}\,\dfrac{f(z)}{z} \\ \dfrac{\partial\delta\tau}{\partial\sigma} + i\,\dfrac{\partial\delta\sigma}{\partial\sigma} = i\epsilon z\,\dfrac{d}{dz}\,\dfrac{f(z)}{z} \end{cases}$$

$$\therefore \left(\frac{\partial\delta\tau}{\partial\tau} - \frac{\partial\delta\sigma}{\partial\sigma}\right) + i\left(\frac{\partial\delta\sigma}{\partial\tau} + \frac{\partial\delta\tau}{\partial\sigma}\right) = 0$$

を与えますが、これは τ を実数とみなすユークリッド化の観点において、共形変換の式を意味しています $^{(*)}$。

一方、共形ゲージにおける有効作用 $\tilde{S}$ は、世界面上の一般座標を χ^α として、

$$\tilde{S} = -\frac{1}{2\pi}\int d^2\chi\sqrt{-\det g}\left(\frac{1}{2}\,g^{\alpha\beta}\partial_\alpha X\cdot\partial_\beta X + ig^{\alpha\beta}c^\gamma\nabla_\alpha b_{\beta\gamma}\right),$$

$$\nabla_\alpha b_{\beta\gamma} = \partial_\alpha b_{\beta\gamma} - \Gamma^\delta{}_{\beta\alpha}b_{\delta\gamma} - \Gamma^\delta{}_{\gamma\alpha}b_{\beta\delta}$$

と書けるはずです。ここで計量と接続係数は、

$$g_{\alpha\beta} = \frac{\partial\sigma^\gamma}{\partial\chi^\alpha}\,\frac{\partial\sigma^\delta}{\partial\chi^\beta}\,\eta_{\gamma\delta}, \quad \Gamma_{\alpha\beta\gamma} = \frac{1}{2}\left(-\partial_\alpha g_{\beta\gamma} + \partial_\gamma g_{\alpha\beta} + \partial_\beta g_{\gamma\alpha}\right)$$

で与えられます。特に複素座標：

$$z = e^{\tau+i\sigma}, \quad \bar{z} = e^{\tau-i\sigma}$$

においては、

$$\frac{\partial\sigma^0}{\partial z}=\frac{1}{2iz},\quad \frac{\partial\sigma^0}{\partial\bar{z}}=\frac{1}{2i\bar{z}},\quad \frac{\partial\sigma^1}{\partial z}=\frac{1}{2iz},\quad \frac{\partial\sigma^1}{\partial\bar{z}}=-\frac{1}{2i\bar{z}}$$

に注意して、

$$g_{z\bar{z}}=g_{\bar{z}z}=-\frac{1}{2z\bar{z}},\quad g^{z\bar{z}}=g^{\bar{z}z}=-2z\bar{z}\quad (\text{他の成分は}\,0),$$

$$\Gamma^{z}{}_{zz}=-\frac{1}{z},\quad \Gamma^{\bar{z}}{}_{\bar{z}\bar{z}}=-\frac{1}{\bar{z}}\quad (\text{他の成分は}\,0)$$

となり、また、$b_{00}=b_{11},\,b_{01}=b_{10}$ から $b_{z\bar{z}}=b_{\bar{z}z}=0$ であることに注意して、有効作用は、

$$\tilde{S}=\frac{1}{2\pi}\int dzd\bar{z}\left(\partial_z X\cdot\partial_{\bar{z}}X+ic^z\partial_{\bar{z}}b_{zz}+ic^{\bar{z}}\partial_z b_{\bar{z}\bar{z}}\right)$$

となります。

複素座標におけるひも座標の運動方程式が、

$$\partial_z\partial_{\bar{z}}X^\mu=0$$

となることに注意してください。その解は、任意の z の関数と任意の $\bar{z}$ の関数の和です。一方、ひも座標の一般解を複素座標で表すと、

$$X^\mu=x^\mu-i\pi p^\mu\log(z\bar{z})+\frac{i}{\sqrt{2}}\sum_{n\neq 0}\frac{1}{n}\left(\alpha_n^\mu z^{-n}+\bar{\alpha}_n^\mu\bar{z}^{-n}\right)$$

ですが、これは確かにそのような形式になっています。

(*注) 複素関数を 2 次元ユークリッド空間上の写像 $\mathbf{R}^2\to\mathbf{R}^2$ と見たときにこれが共形になることは比較的有名な話で、初等的な関数論において習うことも多いでしょう。共形対称性に関する保存量を構成するためにはユークリッド化および複素座標の導入が不可欠となり、このため共形対称性を持つ場の理論 (**共形場の理論**、CFT = conformal field theory) の量子論は数学的に難解になりがちです。

30.8 ゴーストの運動

有効作用 $\tilde{S}$ の式から、ゴーストの運動方程式は、

$$\partial_{\bar{z}}c^z=\partial_{\bar{z}}b_{zz}=\partial_z c^{\bar{z}}=\partial_z b_{\bar{z}\bar{z}}=0$$

です。すなわち $c^z,\,b_{zz}$ は z だけの関数で、また、$c^{\bar{z}},\,b_{\bar{z}\bar{z}}$ は $\bar{z}$ だけの関数になります。よって一般解は、

$$c^z=i\sum_{n\in\mathbf{Z}}c_n z^{-n+1},\quad b_{zz}=\sum_{n\in\mathbf{Z}}b_n z^{-n-2}$$

$$c^{\bar z} = i\sum_{n\in\mathbf{Z}} \bar c_n \bar z^{-n+1}, \quad b_{\bar z\bar z} = \sum_{n\in\mathbf{Z}} \bar b_n \bar z^{-n-2}$$

のように書けます。ここで $c_n, b_n, \bar c_n, \bar b_n$ はグラスマン数の係数です。

$$c^z = \frac{\partial z}{\partial\sigma^0}\,c^0 + \frac{\partial z}{\partial\sigma^1}\,c^1 = iz(c^0+c^1),$$

$$b_{zz} = \left(\frac{\partial\sigma^0}{\partial z}\frac{\partial\sigma^0}{\partial z} + \frac{\partial\sigma^1}{\partial z}\frac{\partial\sigma^1}{\partial z}\right) b_{00} + 2\,\frac{\partial\sigma^0}{\partial z}\frac{\partial\sigma^1}{\partial z}\,b_{01} = -\frac{1}{2z^2}\,(b_{00}+b_{01})$$

に注意すると、$c^z/(iz)$ および $z^2 b_{zz}$ が実であり、このことから、

$$c_n^* = c_{-n}, \quad b_n^* = b_{-n}$$

です。$\bar c_n, \bar b_n$ についても同様で、$\bar c_n^* = \bar c_{-n}$, $\bar b_n^* = \bar b_{-n}$.

　また、

$$dz d\bar z = 2z\bar z\, d\sigma^0 d\sigma^1, \quad \partial_z = \frac{1}{2iz}\,(\partial_0+\partial_1), \quad \partial_{\bar z} = \frac{1}{2i\bar z}\,(\partial_0-\partial_1)$$

に注意すると、有効作用のゴースト部分は、

$$\frac{1}{2\pi}\int d^2\sigma\,\left(zc^z(\partial_0-\partial_1)b_{zz} + \bar z c^{\bar z}(\partial_0+\partial_1)b_{\bar z\bar z}\right)$$

となるので、b_{zz} の正準共役は $(2\pi)^{-1}zc^z$ であり、$b_{\bar z\bar z}$ の正準共役は $(2\pi)^{-1}\bar z c^{\bar z}$ です。よって正準反交換関係は、

$$\{b_{zz}(z),\, z'c^z(z')\}_{\sigma^0=\sigma'^0} = 2\pi i\,\delta(\sigma^1-\sigma'^1),$$

$$\{b_{\bar z\bar z}(\bar z),\, \bar z'c^{\bar z}(\bar z')\}_{\sigma^0=\sigma'^0} = 2\pi i\,\delta(\sigma^1-\sigma'^1)$$

で与えられ、他は同 σ^0 値において反可換です。これらは、

$$\{b_n, c_m\} = \{\bar b_n, \bar c_m\} = \delta^0_{n+m} \quad (\text{他は反可換})$$

において満たされることが確かめられるでしょう。

30.9　共形カレントと共形保存量

　共形変換はユークリッド化のもとでは一般的な複素関数による変換となるため、その無限小変換は、

$$\delta z = -\sum_{n\in\mathbf{Z}} \epsilon_n z^{n+1}$$

と表せます。ここで ϵ_n は複素数です。また、ユークリッド化の観点では z の複素共役が $\bar{z}$ であり、よって、

$$\delta \bar{z} = -\sum_{n\in\mathbf{Z}} \bar{\epsilon}_n \bar{z}^{n+1}$$

です。ここで $\bar{\epsilon}_n = \epsilon_n^*$. そうすると、ひも座標 $X^\mu(z,\bar{z})$ の無限小変換は、

$$\delta X^\mu = \sum_{n\in\mathbf{Z}} \left(\epsilon_n z^{n+1}\partial_z X^\mu + \bar{\epsilon}_n \bar{z}^{n+1}\partial_{\bar{z}} X^\mu\right)$$

となり、一方でゴーストについては、運動方程式 $\partial_{\bar{z}} b_{zz} = \partial_z b_{\bar{z}\bar{z}} = 0$ に注意して、

$$\delta b_{zz} = \sum_{n\in\mathbf{Z}} \left(\epsilon_n z^{n+1}\partial_z b_{zz} + 2\epsilon_n \partial_z z^{n+1} b_{zz}\right),$$

$$\delta b_{\bar{z}\bar{z}} = \sum_{n\in\mathbf{Z}} \left(\bar{\epsilon}_n \bar{z}^{n+1}\partial_{\bar{z}} b_{\bar{z}\bar{z}} + 2\bar{\epsilon}_n \partial_{\bar{z}} \bar{z}^{n+1} b_{\bar{z}\bar{z}}\right)$$

となります。また、有効ラグランジアン密度は、複素座標において、

$$\tilde{\mathcal{L}} = \frac{1}{2\pi}\left(\partial_z X\cdot\partial_{\bar{z}} X + ic^z\partial_{\bar{z}} b_{zz} + ic^{\bar{z}}\partial_z b_{\bar{z}\bar{z}}\right)$$

ですが、その共形変換は、やはり運動方程式を用いて、

$$\delta\tilde{\mathcal{L}} = \partial_z\left(\frac{1}{2\pi}\sum_{n\in\mathbf{Z}} \epsilon_n z^{n+1}\partial_z X\cdot\partial_{\bar{z}} X\right) + \partial_{\bar{z}}\left(\frac{1}{2\pi}\sum_{n\in\mathbf{Z}} \bar{\epsilon}_n \bar{z}^{n+1}\partial_z X\cdot\partial_{\bar{z}} X\right)$$

と計算されます。よって共形変換の保存カレントを T_n^α, $\bar{T}_n^\alpha$ $(\alpha = z,\bar{z})$ とすると、ネーターの定理から、

$$\sum_{n\in\mathbf{Z}} \left(\epsilon_n T_n^z + \bar{\epsilon}_n \bar{T}_n^z\right) = \frac{\partial\tilde{\mathcal{L}}}{\partial\partial_z X^\mu}\,\delta X^\mu + \frac{\partial\tilde{\mathcal{L}}}{\partial\partial_z b_{\bar{z}\bar{z}}}\,\delta b_{\bar{z}\bar{z}} - \frac{1}{2\pi}\sum_{n\in\mathbf{Z}} \epsilon_n z^{n+1}\partial_z X\cdot\partial_{\bar{z}} X,$$

$$\sum_{n\in\mathbf{Z}} \left(\epsilon_n T_n^{\bar{z}} + \bar{\epsilon}_n \bar{T}_n^{\bar{z}}\right) = \frac{\partial\tilde{\mathcal{L}}}{\partial\partial_{\bar{z}} X^\mu}\,\delta X^\mu + \frac{\partial\tilde{\mathcal{L}}}{\partial\partial_{\bar{z}} b_{zz}}\,\delta b_{zz} - \frac{1}{2\pi}\sum_{n\in\mathbf{Z}} \bar{\epsilon}_n \bar{z}^{n+1}\partial_z X\cdot\partial_{\bar{z}} X$$

ですが、ここから、

$$T_n^{\bar{z}} = \frac{1}{2\pi}\,z^{n+1}\partial_z X\cdot\partial_z X + \frac{i}{2\pi}\left(z^{n+1}c^z\partial_z b_{zz} + 2\partial_z z^{n+1}c^z b_{zz}\right),$$

$$\bar{T}_n^z = \frac{1}{2\pi}\,\bar{z}^{n+1}\partial_{\bar{z}} X\cdot\partial_{\bar{z}} X + \frac{i}{2\pi}\left(\bar{z}^{n+1}c^{\bar{z}}\partial_{\bar{z}} b_{\bar{z}\bar{z}} + 2\partial_{\bar{z}}\bar{z}^{n+1}c^{\bar{z}} b_{\bar{z}\bar{z}}\right)$$

および、$T_n^z = \bar{T}_n^{\bar{z}} = 0$ を得ます。

そうすると、例えば、

$$L_n = 2i\int_0^{2\pi} d\sigma\, T_n^0 = 2i\int_{z\bar{z}=s}\frac{dz}{iz}\left(\frac{1}{2iz}\,T_n^z + \frac{1}{2i\bar{z}}\,T_n^{\bar{z}}\right) = \frac{1}{is}\int_{z\bar{z}=s} dz\, T_n^{\bar{z}}$$

はネーターの定理により保存量となり、$s = e^{2\tau}$ に依存しません。よって特に $s = 1$ $(\sigma^0 = 0)$ において表すと、

$$L_n = L_n^{(\alpha)} + L_n^{(c)}, \quad L_n^{(\alpha)} = \oint \frac{dz}{2\pi i}\, z^{n+1} \partial_z X \cdot \partial_z X,$$

$$L_n^{(c)} = \oint \frac{dz}{2\pi} \left(z^{n+1} c^z \partial_z b_{zz} + 2\partial_z z^{n+1} c^z b_{zz} \right)$$

となります。ここで $\oint$ は $z\bar{z} = 1$ (単位円) 上の積分を意味します。同様に、

$$\bar{L}_n = -2i \int_0^{2\pi} d\sigma\, \bar{T}_n^0$$

に対して、

$$\bar{L}_n = \bar{L}_n^{(\alpha)} + \bar{L}_n^{(c)}, \quad \bar{L}_n^{(\alpha)} = \oint \frac{d\bar{z}}{2\pi i}\, \bar{z}^{n+1} \partial_{\bar{z}} X \cdot \partial_{\bar{z}} X,$$

$$\bar{L}_n^{(c)} = \oint \frac{d\bar{z}}{2\pi} \left(\bar{z}^{n+1} c^{\bar{z}} \partial_{\bar{z}} b_{\bar{z}\bar{z}} + 2\partial_{\bar{z}} \bar{z}^{n+1} c^{\bar{z}} b_{\bar{z}\bar{z}} \right)$$

です。$L_n, \bar{L}_n$ が共形対称性に基づく保存量で、$n \in \mathbf{Z}$ ですから、これは無限個あります。

30.10 ヴィラソロ代数と中心電荷

ひも座標の一般解から、

$$\partial_z X^\mu = -\frac{i}{\sqrt{2}} \sum_{n \in \mathbf{Z}} \alpha_n^\mu z^{-n-1}, \quad \alpha_0^\mu := \sqrt{2}\pi p^\mu$$

となること、および留数定理から $\displaystyle\oint \frac{dz}{2\pi i}\, z^{n-1} = \delta_n^0$ であることに注意すると、

$$L_n^{(\alpha)} = \oint \frac{dz}{2\pi i}\, z^{n+1} \partial_z X \cdot \partial_z X = -\frac{1}{2} \sum_{k \in \mathbf{Z}} \alpha_{n-k} \cdot \alpha_k$$

を得ますが、$n = 0$ のときは α_{n-k}^μ と α_k^ν が交換しないため、これらの順序に関する不定性を生じます。そこで上式は $n \neq 0$ の場合とし、$n = 0$ のときは、

$$L_0^{(\alpha)} = -\frac{1}{2} \sum_{k \in \mathbf{Z}} : \alpha_{-k} \cdot \alpha_k : -a$$

とします。ここで a は不定の定数で、$:\quad:$ という記号は、α_k^μ $(k > 0)$ を消滅演算子、α_k^μ $(k < 0)$ を生成演算子とみなしたときの正規順序積です。まとめて書けば、

$$L_n^{(\alpha)} = -\frac{1}{2} \sum_{k \in \mathbf{Z}} : \alpha_{n-k} \cdot \alpha_k : -a\delta_n^0$$

です。

交換子の中では定数を加える不定性が消えることに注意すると、交換子のライプニッツ則、および $[\alpha_n^\mu, \alpha_m^\nu] = -n\delta_{n+m}^0 \eta^{\mu\nu}$ を用いて、

$$[L_n^{(\alpha)}, \alpha_m^\mu] = -m\alpha_{n+m}^\mu.$$

さらに、

$$[L_n^{(\alpha)}, L_m^{(\alpha)}] = -\frac{1}{2}(n-m)\sum_{k\in\mathbf{Z}} \alpha_{n+m-k}\cdot\alpha_k$$

を得ます。$n+m\neq 0$ のとき右辺は $(n-m)L_{n+m}^{(\alpha)}$ となりますが、$n+m=0$ のときは定数の差異があるので、

$$[L_n^{(\alpha)}, L_m^{(\alpha)}] = (n-m)L_{n+m}^{(\alpha)} + \delta_{n+m}^0 A_n^{(\alpha)}$$

のように書けるはずです。一般にこのような交換関係を持つ代数 $L_n^{(\alpha)}$ を**ヴィラソロ代数**といい、定数 $A_n^{(\alpha)}$ を**中心電荷** (central charge)、あるいは**アノマリー**といいます。一方、古典論における共形変換のリー代数は $[L_n^{(\alpha)}, L_m^{(\alpha)}] = (n-m)L_{n+m}^{(\alpha)}$ となり、これは**ヴィット代数**と呼ばれます。$A_n^{(\alpha)}$ は古典論と量子論の差異として現れるため、アノマリー (量子異常) と呼ぶべきものなわけです。

$A_n^{(\alpha)}$ を素朴に求めると、

$$\begin{aligned}
A_n^{(\alpha)} &= [L_n^{(\alpha)}, L_{-n}^{(\alpha)}] - 2nL_0^{(\alpha)} = n\sum_{k\in\mathbf{Z}}(:\alpha_{-k}\cdot\alpha_k: - \alpha_{-k}\cdot\alpha_k) + 2an \\
&= n\eta_{\mu\nu}\sum_{k<0}[\alpha_k^\mu, \alpha_{-k}^\nu] + 2an = nD\sum_{k>0} k + 2an.
\end{aligned}$$

ここで $D = \delta_\mu^\mu$ は時空の次元です。$\sum_{k>0} k = 1+2+3+\cdots$ は発散しますが、解析接続によりこれを $\zeta(-1) = -1/12$ と評価して、

$$A_n^{(\alpha)} = \left(-\frac{D}{12} + 2a\right)n$$

となります。

共形保存量のゴースト部分 $L_n^{(c)}$ についても代数構造を調べてみましょう。ゴーストの一般解：$c^z = i\sum c_n z^{-n+1},\ b_{zz} = \sum b_n z^{-n-2}$ を用いると、

$$L_n^{(c)} = \oint \frac{dz}{2\pi}\left(z^{n+1}c^z\partial_z b_{zz} + 2\partial_z z^{n+1} c^z b_{zz}\right) = \sum_{k\in\mathbf{Z}}(n-k)\, b_{n+k}c_{-k}$$

を得ますが、$n=0$ のときはやはり演算子の順序に関する不定性を生じるため、上式は $n\neq 0$ の場合とし、一般には正規順序積をとって、

$$L_n^{(c)} = \sum_{k\in\mathbf{Z}}(n-k) : b_{n+k}c_{-k} :$$

とします。$\{b_n, c_m\} = \delta^0_{n+m}$ から、

$$[L^{(c)}_n, b_m] = (n-m)b_{n+m}, \quad [L^{(c)}_n, c_m] = -(2n+m)c_{n+m}.$$

さらに、

$$[L^{(c)}_n, L^{(c)}_m] = (n-m)\sum_{k\in\mathbf{Z}}(n{+}m{-}k)\, b_{n+m+k}c_{-k} = (n-m)L^{(c)}_{n+m} + \delta^0_{n+m}A^{(c)}_n$$

を得ます。ゴースト部の中心電荷 $A^{(c)}_n$ は、

$$A^{(c)}_n = [L^{(c)}_n, L^{(c)}_{-n}] - 2nL^{(c)}_0 = -2n\sum_{k>0} k = \frac{n}{6}$$

と評価されます。

$L_n = L^{(\alpha)}_n + L^{(c)}_n$ および $L^{(\alpha)}_n$, $L^{(c)}_n$ が互いに交換することに注意すると、

$$[L_n, L_m] = (n-m)L_{n+m} + \delta^0_{n+m}A_n.$$

ここで、

$$A_n = A^{(\alpha)}_n + A^{(c)}_n = \frac{-D+24a+2}{12}\, n$$

は、ひも座標およびゴースト部から来る中心電荷の合計です。これが恒等的に消える条件 (**アノマリー消失条件**) は、

$$D = 24a + 2$$

です。これをひも理論の**臨界次元**といいます。これが満たされない場合、ひも理論がローカルアノマリーを持ち、矛盾を生じてしまうことが知られています。

以上の事柄は $\bar{L}_n = \bar{L}^{(\alpha)}_n + \bar{L}^{(c)}_n$ についてもまったく同様に成り立つことがわかるでしょう。

(余談) 中心電荷を評価する際、ゼータ関数の解析接続を用いずに、$L^{(\alpha)}_n$, $L^{(c)}_n$ に関するヤコビ恒等式を用いる方法があります。そうした場合は、

$$A^{(\alpha)}_n = \frac{D}{12}\,(n^3-n) + 2an, \quad A^{(c)}_n = -\frac{1}{6}\,(13n^3-n)$$

となり、アノマリー消失条件は $D=26$ かつ $a=1$ を与えます。いずれにせよ発散するアノマリーの正則化はトリッキーで、数学的に怪しい操作であることは否めないでしょう。

30.11 ひも理論の BRS 電荷

無限小のグラスマン数を ξ とし、BRS 変換を、

$$\delta_{\mathrm{B}}X^\mu = \xi c^z\partial_z X^\mu, \quad \delta_{\mathrm{B}}c^z = \xi c^z\partial_z c^z,$$
$$\delta_{\mathrm{B}}b_{zz} = \xi\,(i\partial_z X\cdot\partial_z X + c^z\partial_z b_{zz} + 2\partial_z c^z b_{zz})$$

で定義すると、有効ラグランジアン密度：$\tilde{\mathcal{L}} = \dfrac{1}{2\pi}\left(\partial_z X\cdot\partial_{\bar{z}} X + ic^z\partial_{\bar{z}} b_{zz} + ic^{\bar{z}}\partial_z b_{\bar{z}\bar{z}}\right)$ に関して、

$$\delta_{\mathrm{B}}\tilde{\mathcal{L}} = \frac{\xi}{2\pi}\Big(\partial_z(c^z\partial_z X\cdot\partial_{\bar{z}} X - ic^z\partial_{\bar{z}} c^z b_{zz}) + \partial_{\bar{z}}(c^z\partial_z X\cdot\partial_z X - ic^z\partial_z c^z b_{zz})\Big)$$

となるので、有効作用 $\tilde{S}$ はBRS変換に対して不変で、その保存カレントは、運動方程式を用いて、

$$J_{\mathrm{B}}^z = 0, \quad J_{\mathrm{B}}^{\bar{z}} = \frac{1}{2\pi}\left(c^z\partial_z X\cdot\partial_z X - ic^z\partial_z c^z b_{zz}\right)$$

となります。よって保存量であるBRS電荷は、

$$\begin{aligned} Q_{\mathrm{B}} &= 2\int_0^{2\pi} d\sigma\, J_{\mathrm{B}}^0 = 2\oint\frac{dz}{iz}\left(\frac{1}{2iz}\,J_{\mathrm{B}}^z + \frac{1}{2i\bar{z}}\,J_{\mathrm{B}}^{\bar{z}}\right) \\ &= \oint\frac{dz}{2\pi i}\left(-ic^z\partial_z X\cdot\partial_z X - c^z\partial_z c^z b_{zz}\right) \end{aligned}$$

であり、正規順序積をとって、

$$Q_{\mathrm{B}} = \sum_{n\in\mathbf{Z}} L_n^{(\alpha)} c_{-n} - \frac{1}{2}\sum_{n\in\mathbf{Z}}\sum_{m\in\mathbf{Z}}(n-m) : c_{-n}c_{-m}b_{n+m} :$$

と計算されます。実性(エルミート性)：$Q_{\mathrm{B}}^* = Q_{\mathrm{B}}$ が確かめられるでしょう。また、$\delta_{\mathrm{B}} Q_{\mathrm{B}} = 0$ が確かめられるので、

$$[i\xi Q_{\mathrm{B}}, Q_{\mathrm{B}}] = 0 \ \therefore\ \{Q_{\mathrm{B}}, Q_{\mathrm{B}}\} = 0 \ \therefore\ Q_{\mathrm{B}}^2 = 0$$

です。すなわちBRS電荷のベキ零性がわかります(*)。

一方、もう一つのBRS変換を、

$$\begin{aligned} \bar{\delta}_{\mathrm{B}} X^\mu = \xi c^{\bar{z}}\partial_{\bar{z}} X^\mu, &\quad \bar{\delta}_{\mathrm{B}} c^{\bar{z}} = \xi c^{\bar{z}}\partial_{\bar{z}} c^{\bar{z}}, \\ \bar{\delta}_{\mathrm{B}} b_{\bar{z}\bar{z}} = \xi&\left(i\partial_{\bar{z}} X\cdot\partial_{\bar{z}} X + c^{\bar{z}}\partial_{\bar{z}} b_{\bar{z}\bar{z}} + 2\partial_{\bar{z}} c^{\bar{z}} b_{\bar{z}\bar{z}}\right) \end{aligned}$$

で定義すると、同様にしてそのBRS電荷は、

$$\bar{Q}_{\mathrm{B}} = \sum_{n\in\mathbf{Z}} \bar{L}_n^{(\alpha)} \bar{c}_{-n} - \frac{1}{2}\sum_{n\in\mathbf{Z}}\sum_{m\in\mathbf{Z}}(n-m) : \bar{c}_{-n}\bar{c}_{-m}\bar{b}_{n+m} :$$

となります。

(*注) Q_{B} の式から直接そのベキ零性を確かめることは簡単ではありません。正規順序積をはずしたとき、

$$Q_{\mathrm{B}} = \sum_{n\in\mathbf{Z}} L_n^{(\alpha)} c_{-n} - \frac{1}{2}\sum_{n\in\mathbf{Z}}\sum_{m\in\mathbf{Z}}(n-m)\, b_{n+m}c_{-n}c_{-m} + \sum_{n>0} nc_0$$

のようになり、特異性を持つ代数 $\sum_{n>0} nc_0$ を生じてしまうからです。中心電荷などのc数が発散するならまだしも、代数の係数が発散する場合、その正則化は非常に困難であると考えられます。

30.12 タキオンと重力子

ひも理論の物理的状態空間を、

$$\mathcal{V}_{\rm phys} = \{\,|f> \,|\, Q_{\rm B}|f> = \bar{Q}_{\rm B}|f> = 0\}$$

で定義しましょう。このように物理的状態をBRS不変な状態として定義するのは、特異系の量子論における常套手段でした。また、初期条件として、ゴーストの振動がないことを仮定しましょう：

$$c_n|f> = \bar{c}_n|f> = 0 \quad (n>0), \qquad b_n|f> = \bar{b}_n|f> = 0 \quad (n \geq 0).$$

そうすると、この初期条件を満たす物理的状態 $|f>$ について、

$$L_n^{(\alpha)}|f> = \bar{L}_n^{(\alpha)}|f> = 0 \quad (n \geq 0)$$

がいえます。共形変換は物理的な自由度でないため、直観的には物理的な状態ベクトルは共形変換に対して不変であると考えられます。すなわち素朴には全ての整数 n について $L_n^{(\alpha)}|f> = \bar{L}_n^{(\alpha)}|f> = 0$ が予想されるのですが、実際には $n \geq 0$ においてのみこれが成り立つというわけです。これは QED における物理的条件 $Q_{\rm B}|f> = 0$ が、グプタ・ブロイラー条件：$\partial \cdot A(x)^{(+)}|f> = 0$ を与えることと類似しています。

アノマリー消失条件 $D = 24a + 2$ を用いると、$L_0^{(\alpha)}$, $\bar{L}_0^{(\alpha)}$ は、

$$L_0^{(\alpha)} = -\pi^2 p \cdot p + N + \frac{2-D}{24,} \qquad N = -\sum_{k>0} \alpha_{-k} \cdot \alpha_k,$$

$$\bar{L}_0^{(\alpha)} = -\pi^2 p \cdot p + \bar{N} + \frac{2-D}{24,} \qquad \bar{N} = -\sum_{k>0} \bar{\alpha}_{-k} \cdot \bar{\alpha}_k$$

と書けます。ここで N, $\bar{N}$ は、

$$[N, \alpha_{-n}^{\mu}] = n\alpha_{-n}^{\mu}, \qquad [\bar{N}, \bar{\alpha}_{-n}^{\mu}] = n\bar{\alpha}_{-n}^{\mu} \quad (n>0)$$

という意味で、ひもの振動に関する個数演算子を意味しています。一方、

$$L_n^{(\alpha)} = -\frac{1}{2}\sum_{k \in \mathbf{Z}} \alpha_{n-k} \cdot \alpha_k, \quad \bar{L}_n^{(\alpha)} = -\frac{1}{2}\sum_{k \in \mathbf{Z}} \bar{\alpha}_{n-k} \cdot \bar{\alpha}_k \quad (n \neq 0).$$

いま、ゴーストを含めあらゆる振動が存在せず、かつ D 元運動量 p^{μ} の固有値が k^{μ} となる固有ベクトルを $|k>$ とします：

$$p^{\mu}|k> = k^{\mu}|k>, \qquad \alpha_n^{\mu}|k> = \bar{\alpha}_n^{\mu}|k> = 0 \quad (n>0),$$
$$c_n|k> = \bar{c}_n|k> = 0 \quad (n>0), \qquad b_n|k> = \bar{b}_n|k> = 0 \quad (n \geq 0).$$

$|k>$ は明らかに初期条件を満たします。また、$N|k>=\bar{N}|k>=0$ に注意すると、

$$k\cdot k=\frac{2-D}{24\pi^2}$$

のときに $|k>$ は物理的状態になります。$k\cdot k$ は質量 2 乗を意味するので、$D\geq 3$ ではこの状態は負の質量 2 乗を持ち、すなわち**タキオン** (超光速粒子) を意味します。物理的状態にタキオンモードが存在してしまうのは好ましくない結果ですが、このようなタキオンモードは実はひも理論を超対称化することで消えることがわかっています。

次に、

$$|k,\phi>=\phi_{\mu\nu}\alpha^{\mu}_{-1}\bar{\alpha}^{\nu}_{-1}|k>$$

という状態を考えてみましょう。これはひもが基本振動をする状態で、$N=\bar{N}=1$ を与えます。これが物理的状態であるためには、

$$k\cdot k=\frac{26-D}{24\pi^2,}\qquad k^{\mu}\phi_{\mu\nu}=0,\qquad k^{\nu}\phi_{\mu\nu}=0$$

であれば良いことになります。後ろの 2 式はそれぞれ $L_1^{(\alpha)}$ および $\bar{L}_1^{(\alpha)}$ によって $|k,\phi>$ が消えるために必要です。このように振動するひもは $D=26$ のとき零質量粒子となり、また $\phi_{\mu\nu}$ が 2 つの時空添字を持つことから、ちょうど重力場の量子と考えられる**重力子**のような性質を持っています。このような粒子を本当の重力子とみなしましょうというのが、量子重力理論としてのひも理論です。

他にも様々な高振動モードの物理的状態が存在しますが、それらは $N=\bar{N}\geq 2$ を与える状態で、$D=26$ では質量を持ちます $^{(*)}$。その質量は $(\alpha')^{-1/2}\sim 10^{19}\,\mathrm{GeV}$ という巨大なものになるので、超高エネルギーが実現されない限り観測にはかからないと考えられます。

ちなみにここでは閉じたひもについてのみ考えましたが、開いたひもで同様のことを考えると、振動モードが左右に分離せず、1 つしかないことになるため、$|k,\varepsilon>=\varepsilon_{\mu}\alpha^{\mu}_{-1}|k>$ $(k\cdot k=k\cdot\varepsilon=0)$ のような状態が零質量の物理的状態になります。これがゲージ粒子に相当すると考えられるわけです。

(*注) $L_0^{(\alpha)}-\bar{L}_0^{(\alpha)}=N-\bar{N}$ なので $N=\bar{N}$ は物理的状態の必要条件です。$N=\bar{N}=2$ を与える状態としては、$|k,\psi>=\psi_{\mu\nu}\alpha^{\mu}_{-2}\bar{\alpha}^{\nu}_{-2}|k>$ および $|k,\chi>=\chi_{\mu\nu\rho\sigma}\alpha^{\mu}_{-1}\alpha^{\nu}_{-1}\bar{\alpha}^{\rho}_{-1}\bar{\alpha}^{\sigma}_{-1}|k>$ (ただし $\chi_{\mu\nu\rho\sigma}=\chi_{\nu\mu\rho\sigma}=\chi_{\mu\nu\sigma\rho}$) が考えられますが、前者は物理的状態になり得ず、後者は、

$$k\cdot k=\frac{50-D}{24\pi^2,}\quad k^{\mu}\chi_{\mu\nu\rho\sigma}=0,\quad \eta^{\mu\nu}\chi_{\mu\nu\rho\sigma}=0,\quad k^{\rho}\chi_{\mu\nu\rho\sigma}=0,\quad \eta^{\rho\sigma}\chi_{\mu\nu\rho\sigma}=0$$

のときに物理的状態になります。そのスピンは時空の添字数から 4 と考えられます。質量 2 乗とスピンが直線上に並ぶ性質は、**レッジェ軌道**と呼ばれ、比較的低エネルギーなハドロンの励起状態に見られる性質です。このことはかつてハドロンの正体をひもと考える動機になりました。

30.13 2次元のスピノルと超ひも理論

θ を無限小量とし、2次元座標 σ^α に対する無限小線形変換を、

$$\delta\sigma^\alpha = -\theta\epsilon^\alpha{}_\beta\sigma^\beta$$

とします。もしこれがローレンツ計量構造を不変にするなら、$\epsilon_{\alpha\beta} = -\epsilon_{\beta\alpha}$ であり、よって $\epsilon_{\alpha\beta}$ を2次元レビ・チビタとみなせば、上式は2次元ローレンツ変換 $SO(1,1)$ を意味します。また、$\partial_\alpha\sigma^\alpha = 2$ という式の変分を考えることで、座標微分演算子 ∂_α のローレンツ変換式として、

$$\delta\partial_\alpha = \theta\epsilon^\beta{}_\alpha\partial_\beta$$

を得るでしょう。これは具体的には $\delta\partial_0 = \theta\partial_1,\ \delta\partial_1 = \theta\partial_0$ を意味し、よって**カイラル微分**：

$$\partial_\pm = \partial_0 \pm \partial_1$$

を定義すれば、そのローレンツ変換式は、

$$\delta\partial_\pm = \pm\theta\partial_\pm \quad \therefore\ \partial'_\pm = e^{\pm\theta}\partial_\pm$$

と分離されます。一方、

$$\Psi'_\pm(\sigma') = e^{\pm\theta/2}\,\Psi_\pm(\sigma)$$

のように振る舞う2つの場 $\Psi_\pm(\sigma)$ を**スピノル**と呼びましょう。そうすると、

$$\Psi_-\partial_+\Psi_-, \quad \Psi_+\partial_-\Psi_+, \quad \Psi_+\Psi_-$$

等は $SO(1,1)$ のスカラーになることがわかります。

さて、ひも理論において、座標 $X^\mu(\sigma)$ に、新たに**グラスマン座標** $\Psi^\mu_\pm(\sigma)$ を追加しましょう ($\mu = 0 \sim D-1$)。グラスマン座標は世界面上のスピノルで、実グラスマン数に値をとるものとします。共形ゲージにおいて、作用が、

$$S = -\frac{1}{2\pi}\int d^2\sigma\left(\frac{1}{2}\,\partial_\alpha X\cdot\partial^\alpha X - i\Psi_-\cdot\partial_+\Psi_- - i\Psi_+\cdot\partial_-\Psi_+\right) + (\text{ゴースト部})$$

となる理論を考えると、これは世界面上のローレンツ変換のみならず、

$$\delta X^\mu = 2i\xi_+\Psi^\mu_+ + 2i\xi_-\Psi^\mu_-, \quad \delta\Psi^\mu_\pm = \xi_\pm\partial_\pm X^\mu$$

という変換に対しても不変であることが確かめられます。ここで $\xi_\pm$ は無限小のグラスマン数パラメータです。このようにボゾンとフェルミオンを混合する変換を一般に**超変換**といい、超変換に対して不変な性質を**超対称性** (supersymmetry) といいます。また、超対称性を持つひも理論は**超ひも理論** (superstring theory) と呼ばれます。これに対し、グラスマン座標を持たないこれまでのひも理論は**ボゾン**

ひもの理論 (bozonic string theory) と呼ばれ、区別されます。上の超ひも理論ではスピン 2 の状態が零質量となる条件は $D = 10$ となり、また物理的タキオンモードが存在しないことが知られています。

時空が実座標だけでなくグラスマン数の座標を持っていることを奇異に思われるかもしれません。しかしグラスマン数で与えられる方向の次元は我々には感知できないと考えられます。また、10 次元のうち 6 次元分が小さくコンパクト化されていて、このため我々は時空が 4 次元であるかのように認識する、と考えることができます。これはかつて時空の次元を 5 次元と仮定することで重力と電磁力を統一しようと試みた**カルツァ・クライン理論**の考え方を流用しています。

閉じたひもと開いたひもの両方を含む超ひも理論はI型、閉じたひもだけの理論はII型と呼ばれますが、II型にはパリティを破らないものと破るものがあって、それぞれ IIA 型、IIB 型と分類されます。

一方、万物の理論の有力候補として考えられている理論は、時空とは別の内部空間を有することでパリティを破るカイラルな超ひも理論で、**混成ひも理論** (heterotic string theory) と呼ばれます。混成と呼ばれるのは、見方によってはこれはボゾンひもの理論と超ひも理論を混成した理論と考えることもできるからです。例えばその作用は、やはり共形ゲージで、

$$S = -\frac{1}{2\pi}\int d^2\sigma \left(\frac{1}{2}\,\partial_\alpha X\cdot\partial^\alpha X - i\Psi_-\cdot\partial_+\Psi_- - i\sum_{A=1}^{n}\Psi_+^A\partial_-\Psi_+^A \right) + (\text{ゴースト部})$$

と書かれます。Ψ_-^μ が時空のグラスマン座標を意味しているのに対し、Ψ_+^A は別の内部空間の表現になっていることに注意してください。この理論は $D = 10$ かつ $n = 32$ で無矛盾になり得ることが知られていて、特に Ψ_+^A を回転するグローバル $SO(32)$ 対称性を持つことから、**SO(32) 型**と呼ばれます。この他、$E_8 \times E_8$ 型の超ひも理論も有力視されています。

グラスマン座標を持つことで、理論にはフェルミオンのモードが存在することになり、コンパクト化された余剰 6 次元空間における共鳴により様々な種類を持つことになるでしょう。これらが素粒子標準模型におけるレプトンやクォークに相当すると考えられるわけです。このとき、これらモードを超変換した**超対称粒子** (超対称パートナー) が同様に物理的状態にあると予想されますが、そのような粒子はいまだ 1 つも見つかっておらず、超対称粒子を発見することは、高エネルギー加速器実験の課題の 1 つになっています。

(余談) 超対称性はもともと超ひも理論において発見された対称性なのですが、その性質の面白さから場の理論にも移植されるようになりました。超対称大統一理論 (SUSY GUT) や超重力理論がその例です。

30.14　ひも理論の発展

ボゾンひもにせよ、超ひもにせよ、ここまでに示してきたひも理論は全て自由場の理論になっています。ひもの相互作用に関しては大別して2つの考え方があります。

一つは、ひもの世界面として自明でないトポロジーを考えれば、それが自動的にひもの相互作用を意味することになるという考え方です。粒子の世界線においては、それが "線" であるがゆえ、相互作用を生むためには頂点 (分岐点) の存在を仮定しなければなりません。しかし、ひもの世界面においてはそのようなものを仮定する必要がないのです (図 30.3)。

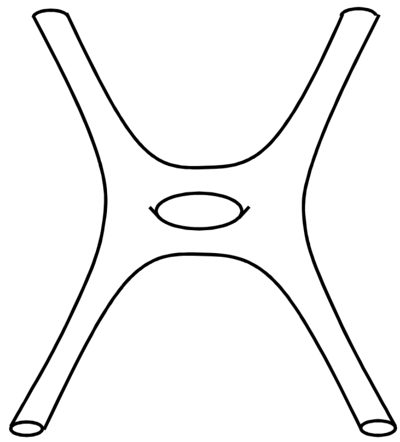

図 30.3: ひもの散乱

よって、生成汎関数：

$$Z[J] = \int \mathcal{D}X\mathcal{D}g\, e^{iS[X,g]+J\cdot X} \Big/ \int \mathcal{D}X\mathcal{D}g\, e^{iS[X,g]}$$

の経路積分を世界面のトポロジーまで含めて全て行えば、ひもの散乱振幅を計算することができます。その計算手法が色々と研究され、一定の成果が得られています。これら研究は**2次元重力** (2D gravity) と呼ばれる数理分野と密接な関係を持っています。

もう一つは、ひも理論はあくまで1本のひもの "量子力学" であって、この理論は第2量子化されなければならないとする考え方です。量子力学をさらに量子化し、場の量子論となり、それが本当の量子論であると考えたようにです。ひも理論を第2量子化した理論は**ひもの場の理論** (string field theory) と呼ばれます。ひも理論がすでに2次元の場の理論であるため、これは汎関数場の理論になります。

この場合、ひもの相互作用項は第2量子化の際にひも理論とは別に手で加えられます。そしてその相互作用項が真空の相転移により運動項を生み出すと考えることができます。これは、ひもがその隣に生成された小さなひもと融合することに

より、あたかも運動(変形)したかのように見えることに相当しています。このようなことは粒子では起こり得ず、ひもならではの特徴です。結果、例えばボゾンひもの場の理論の作用は、

$$S = \frac{1}{3g^2}\,\Psi\cdot(\Psi * \Psi)$$

という単純な式になり、ここで $\cdot$ や $*$ はある種の内積および外積的演算です。g は結合定数です。この理論には、もはや世界面や時空という幾何学的描像はなく、単に代数構造が存在するだけです。このような理論は**原幾何学的理論** (pregeometry) と呼ばれます。26 次元時空とその内部の 2 次元世界面は、この理論の解析的表現の 1 つとして現れると考えられるわけです。

また、**M 理論**の研究が進んでいるようです。これは 5 つのタイプの超ひも理論 (I, IIA, IIB, $SO(32)$, $E_8 \times E_8$) と 11 次元超重力理論が、M 理論と呼ばれる 1 つの理論のそれぞれ異なった極限に相当するだろうという話です。M 理論はまだ完成していませんが、もしその作用が記されれば、おそらく 11 次元時空における 5 次元膜および 2 次元膜の運動 (6 次元および 3 次元の世界面) という描像を与えるだろうと予想されています。この場合、5 次元膜の 1 つが我々の宇宙である可能性もあり、このような描像に基づく仮説的な宇宙論は**膜宇宙論**などと呼ばれます。

さらに、**AdS/CFT 対応**が注目を浴びているようです。これは反ドジッター空間 (AdS) とトーラス空間の直積として与えられる時空上の超ひも理論が、より低次元の超対称化された共形場理論 (CFT) に完全に対応しているというものです。10 次元時空の量子重力理論が、これより低次元でしかも重力を含まない理論から導かれることから、**重力ホログラフィーの原理**とも呼ばれます。

索引

あ

アノマリー 16
アノマリー消失条件 17
e=1 ゲージ 5
AdS/CFT 対応 24
SO(32) 型 22
M 理論 24

か

開弦 7
カイラル微分 21
カルツァ・クライン理論 22
共形ゲージ 9
共形対称性 9
共形場の理論 12
共形変換 9
グラスマン座標 21
原幾何学的理論 24
混成ひも理論 22

さ

再パラメータ化 3
重力子 20
重力ホログラフィーの原理 24
スピノル 21
世界面 6
相対論的粒子 3

た

タキオン 20
中心電荷 16
超対称性 21
超対称粒子 22
超ひも理論 21
超変換 21

な

南部・後藤作用 7
2 次元重力 23

は

ヴィット代数 16
ひもの場の理論 23
ひも理論 6
ヴィラソロ代数 16
複素座標 11
閉弦 7
ボゾンひもの理論 22
ポリヤコフ作用 7

ま

膜宇宙論 24

や

ユークリッド化 11

ら

臨界次元 17
レッジェ軌道 20

わ

ワイル変換 8