

あもんノート

ユークリッド幾何学、ニュートン力学から、相対論、宇宙論、量子論、場の量子論、素粒子論、そして超ひも理論まで、理論物理学を簡潔にかつ幅広く網羅したノートです。TOP へは下の URL をクリックして行けます。専用の画像掲示板で、ご意見、ご質問等も受け付けております。

<http://amonphys.web.fc2.com/>

目次

第 28 章	ゲージ場の量子論	3
28.1	SU(N) ゲージ理論	3
28.2	FP ゴースト	4
28.3	場の方程式と SU(N) カレント	6
28.4	BRS 変換	7
28.5	BRS 電荷とそのベキ零性	9
28.6	不定計量空間	10
28.7	4 重項演算子	11
28.8	物理的状態空間と 4 重項機構	13
28.9	QED 再考	14

第28章 ゲージ場の量子論

量子色力学 (QCD) や電弱統一理論などの非可換ゲージ理論にその量子論がちゃんと存在することを確認するのは、実はあまり簡単ではありません。これらは可換ゲージ理論である量子電磁気学 (QED) と同じく、ゲージ対称性のために力学変数が余分にある特異系であり、QED の場合はちょっとした細工でその量子論を構成できたのですが、非可換ゲージ理論においてはきちんと特異系の本質に向き合う必要性が出てきます。ここでは $SU(N)$ ゲージ理論を例に、特異系の量子論の数理を見てゆくことにしましょう。

28.1 $SU(N)$ ゲージ理論

$SU(N)$ ゲージ理論 (非可換ゲージ理論、ヤン・ミルズ理論) のラグランジアン密度 \mathcal{L} は、

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu}^a F^{a\mu\nu} + \mathcal{L}_m, \quad F_{\mu\nu}^a = \partial_\mu A_\nu^a - \partial_\nu A_\mu^a - gf_{abc} A_\mu^b A_\nu^c$$

でした。ここで $A_\mu^a = A_\mu^a(x)$ は $SU(N)$ のゲージ場、 g は結合定数、 f_{abc} は $SU(N)$ の構造定数です。添字 a, b 等は $SU(N)$ の次元である (N^2-1) 個の値をとります。また、 \mathcal{L}_m は物質部のラグランジアン密度です。

物質場 $\varphi_i(x)$ の時空微分 ∂_μ がゲージ化により共変微分 : $D_\mu = \partial_\mu + igT^a A_\mu^a$ に置き換わっていけば、 \mathcal{L} は無限小ゲージ変換 :

$$\delta\varphi_i = -ig\theta^a (T^a)_{ij} \varphi_j, \quad \delta A_\mu^a = D_\mu \theta^a := \partial_\mu \theta^a - gf_{abc} A_\mu^b \theta^c$$

に対して不変となります。 T^a は $SU(N)$ の生成子、 θ^a は変換の無限小パラメータで、時空の座標に依存し、それゆえこの対称性はローカル対称性です (量子電磁気学の章参照)。

素朴に正準量子化しようとするれば、

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial_\mu A_\nu^a} = -F^{a\mu\nu} \quad \therefore \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial_0 A_0^a} = 0$$

であり、 $A_0^a(x)$ に対する正準共役変数がないという困難にぶつかるのは QED と同様です。QED では幸運にもゲージ固定項を追加するだけで量子論を構成できた

のですが、実はそれは可換ゲージ理論の特殊性で、非可換ゲージ理論においてはこのような処理だけでは済まないのです。

指針の鍵はグリーン関数の生成汎関数にあります：

$$Z[I, J] = \langle 0 | T e^{I \cdot A + J \cdot \varphi} | 0 \rangle .$$

ここでももちろん、 $I \cdot A = \int d^4x I_\mu^\alpha(x) A^{a\mu}(x)$, $J \cdot \varphi = \int d^4x J_i(x) \varphi_i(x)$ という略記を用いています。 $I_\mu^\alpha(x)$ はゲージ場 $A^{a\mu}(x)$ のソース、 $J_i(x)$ は物質場 $\varphi_i(x)$ のソースを意味しています (経路積分の章参照)。その経路積分表式：

$$Z[I, J] = \int \mathcal{D}A \mathcal{D}\varphi e^{iS + I \cdot A + J \cdot \varphi} / \int \mathcal{D}A \mathcal{D}\varphi e^{iS}, \quad S = \int d^4x \mathcal{L}$$

は $SU(N)$ ゲージ理論の “正しい量子論” の生成汎関数を与えるはずですが、ここには正準共役がないなどという問題は存在せず、例えば数値計算を用いれば、任意のグリーン関数を必要な精度で近似計算できることに注意してください^(*)。

(*注) この数値計算は格子ゲージ理論により実現されています。これにより QCD ($SU(3)$ ゲージ理論) におけるハドロンの性質を調べることができます。クォークの種類が少ない場合、QCD は漸近的自由性を持ち、そのゲージ力は近距離で弱く、長距離で強くなる傾向があります。例えるなら反誘電体 ($\epsilon < 1$) の中の電気力のようなイメージになります。特に $\epsilon \sim 0$ においては力場 (グルーオンの場) は空間的に広がれず、ひも状になります。このひも性質は実際のハロン衝突実験においても見られます。また格子ゲージ理論から各種ハドロンの質量を計算できますが、これらは実験値とよく合っています。

28.2 FP ゴースト

生成汎関数の経路積分表式からゲージ自由度を抜き出す処理を、次のようにして行うことができます。

まず恒等式：

$$\int \mathcal{D}(\partial \cdot A) \delta[\partial \cdot A - f] = 1$$

に注意します。ここで、 $\delta[\partial \cdot A - f] = \prod_{a,x} \delta(\partial \cdot A^a(x) - f^a(x))$ は連続無限次元のデルタ関数です。ゲージ変換の (有限) パラメータを $\theta^a(x)$ とすると、

$$\mathcal{D}(\partial \cdot A) = \mathcal{D}\theta \text{Det} \frac{\delta \partial \cdot A}{\delta \theta} = \mathcal{D}\theta \text{Det}(\partial \cdot D).$$

ここで、 $(\partial \cdot D)_{xy} = \partial_x \cdot D_x \delta^4(x-y)$ であり、Det はこのような時空の行列に関する行列式です。また、ガウス積分により、

$$\int \mathcal{D}f e^{kf \cdot f} = N(k).$$

k は複素数で、 $N(k)$ は k の何らかの式です。以上3つの式から、

$$\int \mathcal{D}f e^{k f \cdot f} \int \mathcal{D}\theta \text{Det}(\partial \cdot D) \delta[\partial \cdot A - f] = N(k)$$

$$\therefore \int \mathcal{D}\theta \text{Det}(\partial \cdot D) e^{k(\partial \cdot A) \cdot (\partial \cdot A)} = N(k)$$

ですが、 $c^a(x)$, $b^a(x)$ をそれぞれ実グラスマン数の場とすると、行列式を、

$$\text{Det}(\partial \cdot D) = \int \mathcal{D}b \mathcal{D}c e^{-b \cdot (\partial \cdot D) \cdot c} = \int \mathcal{D}b \mathcal{D}c e^{\partial b \cdot D c}$$

と表せるので(フェルミオンの章参照)、

$$\frac{1}{N(k)} \int \mathcal{D}\theta \mathcal{D}b \mathcal{D}c e^{k(\partial \cdot A) \cdot (\partial \cdot A) + \partial b \cdot D c} = 1$$

です。これはゲージ場 $A_\mu^a(x)$ に関する恒等式なので、生成汎関数の経路積分表式の分子と分母の経路積分の中にそれぞれ挿入することができ、そうすると $1/N(k)$ と $\int \mathcal{D}\theta$ は分子と分母で相殺され、結果、

$$Z[I, J] = \int \mathcal{D}A \mathcal{D}b \mathcal{D}c \mathcal{D}\varphi e^{i\tilde{S} + I \cdot A + J \cdot \varphi} / \int \mathcal{D}A \mathcal{D}b \mathcal{D}c \mathcal{D}\varphi e^{i\tilde{S}},$$

$$\tilde{S} = \int d^4x \tilde{\mathcal{L}}, \quad \tilde{\mathcal{L}} = \mathcal{L} - \frac{1}{2\alpha} (\partial \cdot A)^2 - i\partial^\mu b^a D_\mu c^a$$

を得ます。ここで $k = -i/2\alpha$ と置きました。 α はゲージパラメータと呼ばれ、これは作用汎関数の実性から実数と仮定されます。

\tilde{S} はゲージ自由度を固定した際の有効作用であり、もはや $SU(N)$ ゲージ対称性を持ちません。しかしローレンツ不変性は維持されていて、それゆえこのようなゲージ固定は共変ゲージと呼ばれます。ゲージ固定の際に導入された実グラスマン数の場 $c^a(x)$, $b^a(x)$ は、1963年、ユニタリ性を保持するためにファインマンが最初に導入したのですが、1967年に経路積分から系統的に導出した人の名をとって、ファデーフ・ポポフゴースト(FPゴースト)と呼ばれます。ゴースト(ghost, 幽霊)と呼ばれるのはこれらの場の粒子が原理的に観測できないからで、それについてはこれから説明します。

(余談) トホーフトによる非可換ゲージ理論のくりこみ可能性の証明は1971年です。トホーフトは大学院生当時、ランダウゲージ($\alpha \rightarrow 0$ に相当)でしか知られていなかったFPゴーストの存在をここで示したような一般的な共変ゲージの上にまで拡張し、くりこみ可能性を証明したわけです。BRS対称性がまだ知られていなかった時代です。この証明により、発表当時ほとんど無視されていたグラショウ・ワインバーグ・サラムの電弱統一理論(ヤン・ミルズ版W粒子理論)は一躍有名になり、いわゆるゲージ革命が始まったわけです。ただし当初はゴーストが実グラスマン数(エルミート)であるという認識がなく、これに関連した誤りが多くみられました。この誤りを最初に指摘し正したのは九後・小嶋(1978)です。

28.3 場の方程式とSU(N) カレント

ゲージ固定された $SU(N)$ ゲージ理論の有効ラグランジアン密度は、

$$\tilde{\mathcal{L}} = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu}^a F^{a\mu\nu} - \frac{1}{2\alpha} (\partial \cdot A)^2 - i\partial^\mu b^a D_\mu c^a + \mathcal{L}_m.$$

ここで $D_\mu c^a = \partial_\mu c^a - gf_{abc} A_\mu^b c^c$ です。よって、

$$\frac{\partial \tilde{\mathcal{L}}}{\partial \partial_\mu A_\nu^a} = -F^{a\mu\nu} - \frac{1}{\alpha} g^{\mu\nu} \partial \cdot A^a, \quad \frac{\partial \tilde{\mathcal{L}}}{\partial A_\nu^a} = -gf_{abc} A_\mu^b F^{c\mu\nu} - igf_{abc} \partial^\nu b^b c^c + \frac{\partial \mathcal{L}_m}{\partial A_\nu^a},$$

$$\frac{\partial \tilde{\mathcal{L}}}{\partial \partial_\mu c^a} = -i\partial^\mu b^a, \quad \frac{\partial \tilde{\mathcal{L}}}{\partial c^a} = -igf_{abc} A_\mu^b \partial^\mu b^c, \quad \frac{\partial \tilde{\mathcal{L}}}{\partial \partial_\mu b^a} = iD^\mu c^a, \quad \frac{\partial \tilde{\mathcal{L}}}{\partial b^a} = 0.$$

FP ゴーストによる微分は右微分です。そうすると、ゲージ場およびFP ゴーストの場の方程式は、それぞれ、

$$D_\mu F^{a\mu\nu} + \frac{1}{\alpha} \partial^\nu (\partial \cdot A^a) = j_m^{a\nu} + igf_{abc} \partial^\nu b^b c^c, \quad \partial \cdot Dc^a = D \cdot \partial b^a = 0$$

となり、ここで $D_\mu F^{a\mu\nu} = \partial_\mu F^{a\mu\nu} - gf_{abc} A_\mu^b F^{c\mu\nu}$ です。また、 $j_m^{a\mu}$ は物質場の共変微分が $D_\mu \varphi_i = \partial_\mu \varphi_i + ig(T^a)_{ij} A_\mu^a \varphi_j$ であることに注意して、

$$\begin{aligned} j_m^{a\mu} &= -\frac{\partial \mathcal{L}_m}{\partial A_\mu^a} = -\frac{\partial \mathcal{L}_m}{\partial D_\nu \varphi_i} \frac{\partial D_\nu \varphi_i}{\partial A_\mu^a} = -\frac{\partial \mathcal{L}_m}{\partial D_\nu \varphi_i} ig(T^b)_{ij} \varphi_j \delta_\nu^\mu \delta_b^a \\ &= -ig \frac{\partial \mathcal{L}_m}{\partial \partial_\mu \varphi_i} (T^a)_{ij} \varphi_j \end{aligned}$$

です。これは物質場のSU(N) カレントと呼ばれ、QEDにおける4元電流密度に相当するものです。

ゲージ固定された後でも、グローバルSU(N)変換：

$$\delta \varphi_i = -ig\theta^a (T^a)_{ij} \varphi_j, \quad \delta A_\mu^a = -gf_{abc} A_\mu^b \theta^c,$$

$$\delta c^a = -gf_{abc} c^b \theta^c, \quad \delta b^a = -gf_{abc} b^b \theta^c$$

に対してなら $\tilde{\mathcal{L}}$ は不変です。

[証明] もともとのラグランジアン密度 \mathcal{L} はローカルSU(N)変換に対して不変なので、当然、グローバルSU(N)変換に対しても不変です。そうすると、 $\partial \cdot A^a \partial \cdot A^a$, $\partial^\mu b^a \partial_\mu c^a$, $f_{abc} \partial^\mu b^a A_\mu^b c^c$ のグローバルSU(N)不変性を証明すれば十分です。まず $\partial \cdot A^a \partial \cdot A^a$ については、

$$\delta(\partial \cdot A^a \partial \cdot A^a) = 2\partial \cdot A^a \partial_\mu \delta A^{a\mu} = 2\partial \cdot A^a \partial_\mu (-gf_{abc} A^{b\mu} \theta^c) = -2gf_{abc} \partial \cdot A^a \partial \cdot A^b \theta^c.$$

f_{abc} は a, b について反対称なのでこれは 0 になります : $\delta(\partial \cdot A^a \partial \cdot A^a) = 0$. 同様に $\delta(\partial^\mu b^a \partial_\mu c^a) = 0$ も示せるでしょう。 $f_{abc} \partial^\mu b^a A_\mu^b c^c$ については、 $b = b^a T^a$ で b^a の行列表記を導入して、

$$\delta b = \delta b^a T^a = -g f_{abc} b^b \theta^c T^a = ig [T^b, T^c] b^b \theta^c = [b, ig \theta^c T^c].$$

ここで $[T^b, T^c] = i f_{abc} T^a$ を用いました。 よって行列 b のグローバル $SU(N)$ 変換は、

$$b' = UbU^\dagger, \quad U = \exp(-ig\theta^a T^a) \in SU(N)$$

で与えられます。 同様に $A_\mu = A_\mu^a T^a, c = c^a T^a$ と行列表記すれば、 $A'_\mu = UA_\mu U^\dagger, c' = UcU^\dagger$ です。 一方、 $f_{abc} = -2i \text{tr}([T^a, T^b] T^c)$ に注意すると (連続群論入門参照)、

$$f_{abc} \partial^\mu b^a A_\mu^b c^c = -2i \text{tr}([\partial^\mu b, A_\mu] c)$$

なので、これはグローバル $SU(N)$ 変換に対して不変です。 [証明終]

ちなみに、行列表記を用いなくてももちろん証明は可能ですが、その場合ヤコビ恒等式から得られる構造定数の性質が必要になり、かなりややこしいことになります。

結果、ネーターの定理により、

$$\theta^a j^{a\mu} = \frac{\partial \tilde{\mathcal{L}}}{\partial \partial_\mu \varphi_i} \delta \varphi_i + \frac{\partial \tilde{\mathcal{L}}}{\partial \partial_\mu A_\nu^b} \delta A_\nu^b + \frac{\partial \tilde{\mathcal{L}}}{\partial \partial_\mu c^b} \delta c^b + \frac{\partial \tilde{\mathcal{L}}}{\partial \partial_\mu b^b} \delta b^b$$

における $j^{a\mu}$ が保存カレントになります : $\partial_\mu j^{a\mu} = 0$. ゲージ場および FP ゴーストからの寄与をそれぞれ $j_A^{a\mu}, j_{\text{FP}}^{a\mu}$ とすると、

$$j^{a\mu} = j_{\text{m}}^{a\mu} + j_A^{a\mu} + j_{\text{FP}}^{a\mu},$$

$$j_A^{a\mu} = g f_{abc} \left(F^{b\mu\nu} A_\nu^c + \frac{1}{\alpha} \partial \cdot A^b A^{c\mu} \right), \quad j_{\text{FP}}^{a\mu} = ig f_{abc} (\partial^\mu b^b c^c - b^b D^\mu c^c)$$

となるでしょう。

(余談) 特に QED の場合は、群の添字がなく、また $f_{abc} = 0$ とみなせるので、 $j_A^\mu = 0$ です。これはゲージ場 (光子) が電荷を持たないことに相当します。一方、QCD などの非可換ゲージ理論では、ゲージ場がこのグローバルゲージ変換に対応した保存量を有するわけです。例えば QCD ではグルーオンが “色荷” を持ちます。

28.4 BRS 変換

次に、グラスマン数の無限小パラメータを ξ とし、

$$\delta_B \varphi_i = -ig\xi c^a (T^a)_{ij} \varphi_j, \quad \delta_B A_\mu^a = \xi D_\mu c^a$$

というグローバル変換を考えてみましょう。これは $SU(N)$ ゲージ変換において、 $\theta^a(x) \rightarrow \xi c^a(x)$ と置換した変換です。FP ゴーストの変換を、

$$\delta_B c^a = \frac{1}{2} g \xi f_{abc} c^b c^c, \quad \delta_B b^a = -\frac{i\xi}{\alpha} \partial \cdot A^a$$

とすれば、有効作用 \tilde{S} はこの変換に対し不変になることが以下のように確かめられ、この変換を BRS 変換といいます (ベッキ・ルエ・ストラ 1975)。

[証明] 元々のラグランジアン密度 \mathcal{L} が BRS 変換に対して不変なのは、BRS 変換が置換 $\theta^a(x) \rightarrow \xi c^a(x)$ により得られていることから明らかです。よって、

$$\delta_B \tilde{\mathcal{L}} = \delta_B \left(-\frac{1}{2\alpha} (\partial \cdot A)^2 - i\partial^\mu b^a D_\mu c^a \right)$$

ですが、これは、

$$\delta_B \tilde{\mathcal{L}} = -\frac{\xi}{\alpha} \partial^\mu (\partial \cdot A^a D_\mu c^a) - i\partial^\mu b^a \delta_B (D_\mu c^a)$$

となることが簡単に確かめられます。一方、 $C = c^a T^a$, $A_\mu = A_\mu^a T^a$ で行列表記を導入すると、 $[T^a, T^b] = i f_{abc} T^c$ に注意して、

$$D_\mu C = \partial_\mu C + ig[A, C], \quad \delta_B A_\mu = \xi D_\mu C, \quad \delta_B C = -ig\xi C^2$$

と書くことができ、そうすると、 ξ と C がグラスマン奇であることに注意して、

$$\begin{aligned} \delta_B (D_\mu C) &= \partial_\mu \delta_B C + ig [\delta_B A, C] + ig [A, \delta_B C] \\ &= \partial_\mu (-ig\xi C^2) + ig [\xi D_\mu C, C] + ig [A, -ig\xi C^2] \\ &= -ig\xi \{ \partial_\mu C, C \} + ig\xi \{ \partial_\mu C + ig[A, C], C \} + g^2 \xi [A, C^2] \\ &= -g^2 \xi \{ [A, C], C \} + g^2 \xi [A, C^2] \end{aligned}$$

ですが、 $\{ [A, C], C \} = [A, C^2]$ が簡単にわかるので、 $\delta_B (D_\mu C) = 0 \therefore \delta_B (D_\mu c^a) = 0$ です。よって、

$$\delta_B \tilde{\mathcal{L}} = -\frac{\xi}{\alpha} \partial_\mu (\partial \cdot A^a D^\mu c^a)$$

となり、これは時空の全微分なので、 $\delta_B \tilde{S} = \int d^4x \delta_B \tilde{\mathcal{L}} = 0$ です。[証明終]

ゲージ固定により $SU(N)$ ゲージ不変性は失われてしまったのですが、代わりにグラスマン数を変換パラメータとする BRS 対称性が生まれました。

$$\text{ローカル } SU(N) \xrightarrow{\text{ゲージ固定}} \text{グローバル } SU(N) + \text{BRS.}$$

このような事は古典論でローカル対称性を持つ特異系において一般に起こります。

28.5 BRS 電荷とそのベキ零性

BRS 変換のネーターカレントを j_B^μ とすると、

$$\xi j_B^\mu = \frac{\partial \tilde{\mathcal{L}}}{\partial \partial_\mu A_\nu^a} \delta_B A_\nu^a + \frac{\partial \tilde{\mathcal{L}}}{\partial \partial_\mu c^a} \delta_B c^a + \frac{\partial \tilde{\mathcal{L}}}{\partial \partial_\mu b^a} \delta_B b^a + \frac{\partial \tilde{\mathcal{L}}}{\partial \partial_\mu \varphi_i} \delta_B \varphi_i + \frac{\xi}{\alpha} \partial \cdot A^a D^\mu c^a$$

ですが、この式にこれまでに記した各式を代入すると、第3項と第5項が相殺すること、第4項は $\xi c^a j_m^{a\mu}$ となり場の方程式が適用できることなどに注意し、

$$j_B^\mu = \frac{1}{\alpha} \partial^\mu \partial \cdot A^a c^a - \frac{1}{\alpha} \partial \cdot A^a D^\mu c^a - \frac{i}{2} g f_{abc} \partial^\mu b^a c^b c^c - \partial_\nu (F^{a\mu\nu} c^a)$$

と整理されるでしょう。よって、ネーターの定理から、

$$Q_B = \int d^3 \mathbf{r} j_B^0 = \int d^3 \mathbf{r} \left(\frac{1}{\alpha} \partial_0 \partial \cdot A^a c^a - \frac{1}{\alpha} \partial \cdot A^a D_0 c^a - \frac{i}{2} g f_{abc} \partial_0 b^a c^b c^c \right)$$

は系の保存量となり、BRS 電荷と呼ばれます。

FP ゴーストが実グラスマン数であること、および一般にグラスマン数の積の複素共役が $(\xi \eta)^* = \eta^* \xi^*$ のように与えられることに注意すると、BRS 電荷は実であること(量子論でエルミートであること)がわかるでしょう：

$$Q_B^* = Q_B.$$

また、次式が成り立つことに注意。

$$\delta_B (D_\mu c^a) = 0, \quad \delta_B (f_{abc} c^b c^c) = 0, \quad \delta_B (\partial \cdot A^a) = 0.$$

[証明] 最初の式はすでに証明済み。2番目の式は $C = c^a T^a$ として、

$$C^2 = \frac{i}{2} f_{abc} c^b c^c T^a, \quad \delta_B C^2 = \{\delta_B C, C\} = \{-ig\xi C^2, C\} = -ig\xi [C^2, C] = 0$$

なので成り立ちます。最後の式は $\delta_B (\partial \cdot A^a) = \xi \partial \cdot D c^a$ ですが、これは場の方程式から0です。[証明終]

これら定理により、BRS 電荷自身のBRS変換が0になることを容易に確かめられます：

$$\delta_B Q_B = 0.$$

一方、一般に正準量子論ではネーターの保存量は対応する変換を生成するため、任意の物理量 Φ について、 $[i\xi Q_B, \Phi] = \delta_B \Phi$ ですが(量子論の基礎の章参照)、特に $\Phi = Q_B$ とすると、

$$[i\xi Q_B, Q_B] = \delta_B Q_B \quad \therefore i\xi \{Q_B, Q_B\} = 0 \quad \therefore Q_B^2 = 0$$

を得ます。これをBRS電荷のベキ零性といいます。古典論では Q_B はグラスマン奇であることに注意してください。よって古典論的には自明に $Q_B^2 = 0$ ですが、これが正準量子論においてもちゃんと成立していることがわかったわけです。

28.6 不定計量空間

散乱系においては無限過去と無限未来で自己相互作用以外の相互作用が切れ、くりこまれた場が自由場に漸近すると考えられます。漸近場を添字 as を付けて表すと、漸近場の運動方程式は、ファインマンゲージ ($\alpha = 1$) において、

$$\square A_{\text{as}}^{a\mu}(x) = 0, \quad \square c_{\text{as}}^a(x) = \square b_{\text{as}}^a(x) = 0$$

となります。よって一般解は、平面波展開で、

$$\begin{aligned} A_{\text{as}}^{a\mu}(x) &= \int \frac{d^3\mathbf{k}}{(2\pi)^3 2k^0} \sum_{\lambda} (\varepsilon_{\lambda}^{\mu}(\mathbf{k}) a_{\lambda}^a(\mathbf{k}) e^{-ik \cdot x} + c.c.), \\ c_{\text{as}}^a(x) &= \int \frac{d^3\mathbf{k}}{(2\pi)^3 2k^0} (\gamma^a(\mathbf{k}) e^{-ik \cdot x} + c.c.), \\ b_{\text{as}}^a(x) &= \int \frac{d^3\mathbf{k}}{(2\pi)^3 2k^0} (-i\beta^a(\mathbf{k}) e^{-ik \cdot x} + c.c.), \quad k^0 = |\mathbf{k}| \end{aligned}$$

のように書かれます。 $c.c.$ は前の項の複素共役です。添字 λ はゲージ場の偏極モードを意味しますが、横波モード ($\lambda = \pm$) を、

$$\varepsilon_{\pm}^{\mu}(\mathbf{k}) = (0, \varepsilon_{\pm}(\mathbf{k}))_{\mu}, \quad |\varepsilon_{\pm}(\mathbf{k})| = 1, \quad \mathbf{k} \cdot \varepsilon_{\pm}(\mathbf{k}) = \varepsilon_{+}(\mathbf{k}) \cdot \varepsilon_{-}(\mathbf{k}) = 0$$

とし、縦波モード ($\lambda = L$) とスカラーモード ($\lambda = S$) を、

$$\varepsilon_L^{\mu}(\mathbf{k}) = k^{\mu}, \quad \varepsilon_S^{\mu}(\mathbf{k}) = -k_{\mu}/(2|\mathbf{k}|^2)$$

で定義します。このとき、

$$g_{\mu\nu} \varepsilon_{\lambda}^{\mu}(\mathbf{k}) \varepsilon_{\lambda'}^{\nu}(\mathbf{k}) = -\eta_{\lambda\lambda'}, \quad \sum_{\lambda, \lambda'} \eta_{\lambda\lambda'} \varepsilon_{\lambda}^{\mu}(\mathbf{k}) \varepsilon_{\lambda'}^{\nu}(\mathbf{k}) = -g^{\mu\nu}$$

を確かめられるでしょう。ただし $\eta_{\lambda\lambda'}$ は行列表記で、

$$\eta = \begin{matrix} & \begin{matrix} + & - & L & S \end{matrix} \\ \begin{matrix} + \\ - \\ L \\ S \end{matrix} & \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \end{matrix}$$

です。すなわち $\varepsilon_{\lambda}^{\mu}(\mathbf{k})$ は直交しておらず、特に縦波モードとスカラーモードのセクターが反対角になります。これは一見不便な設定に思えるかもしれませんが、そうした理由はすぐにわかります。

一方、場の正準共役が、それぞれ、

$$\frac{\partial \tilde{\mathcal{L}}}{\partial \partial_0 A_0^a} = -\frac{1}{\alpha} \partial \cdot A^a, \quad \frac{\partial \tilde{\mathcal{L}}}{\partial \partial_0 A_i^a} = -F^{a0i}, \quad \frac{\partial \tilde{\mathcal{L}}}{\partial \partial_0 c^a} = -i\partial_0 b^a, \quad \frac{\partial \tilde{\mathcal{L}}}{\partial \partial_0 b^a} = iD_0 c^a$$

であることに注意すると、漸近場の正準(反)交換関係は、やはりファインマンゲージで、

$$[A_{\text{as}}^{a\mu}(x), \dot{A}_{\text{as}}^{b\nu}(x')]_{t=t'} = -i\delta_b^a g^{\mu\nu} \delta^3(\mathbf{r}-\mathbf{r}'),$$

$$\{b_{\text{as}}^a(x), \dot{c}_{\text{as}}^b(x')\}_{t=t'} = -\{c_{\text{as}}^a(x), \dot{b}_{\text{as}}^b(x')\}_{t=t'} = \delta_b^a \delta^3(\mathbf{r}-\mathbf{r}')$$

となり、他は同時刻可換もしくは反可換になります。これらは、

$$[a_\lambda^a(\mathbf{k}), a_{\lambda'}^b(\mathbf{k}')^*] = \delta_b^a \eta_{\lambda\lambda'} (2\pi)^3 2k^0 \delta^3(\mathbf{k}-\mathbf{k}'),$$

$$\{\gamma^a(\mathbf{k}), \beta^b(\mathbf{k}')^*\} = \{\beta^a(\mathbf{k}), \gamma^b(\mathbf{k}')^*\} = \delta_b^a (2\pi)^3 2k^0 \delta^3(\mathbf{k}-\mathbf{k}')$$

で、他が可換もしくは反可換であれば満たされるでしょう。

$a_L^a(\mathbf{k}), a_S^a(\mathbf{k})$ の交換関係、および $\gamma^a(\mathbf{k}), \beta^a(\mathbf{k})$ の反交換関係が共に反対角になっていることに注意。このため、QED でそうであったように、これら漸近場が作る状態空間は不定計量空間になります。実際、

$$a_L^a(\mathbf{k})^*|0\rangle, \quad a_S^a(\mathbf{k})^*|0\rangle, \quad \gamma^a(\mathbf{k})^*|0\rangle, \quad \beta^a(\mathbf{k})^*|0\rangle$$

などは零ノルムで、

$$(a_L^a(\mathbf{k})^* - a_S^a(\mathbf{k})^*)|0\rangle, \quad (\gamma^a(\mathbf{k})^* - \beta^a(\mathbf{k})^*)|0\rangle$$

などは負のノルム自乗を持つことがわかるでしょう。

一方、横波モードの生成演算子 $a_\pm^a(\mathbf{k})^*$ と物質場(その漸近場)の生成演算子だけで作られた状態ベクトルは必ず正ノルムであり、これらが張る部分空間は正定値計量空間になります。この部分空間を $\mathcal{H}_{\text{phys}}$ と書き、物理的粒子空間と呼びましょう。

漸近場における BRS 電荷は、

$$Q_B = \int d^3\mathbf{r} (\partial_0 \partial \cdot A_{\text{as}}^a c_{\text{as}}^a - \partial \cdot A_{\text{as}}^a \partial_0 c_{\text{as}}^a)$$

となるので、真空の BRS 電荷が 0 であることが確かめられます：

$$Q_B|0\rangle = 0.$$

よって $\delta_B|0\rangle = i\xi Q_B|0\rangle = 0$ ですから、真空は BRS 変換に対して不変であることがわかります。

28.7 4重項演算子

任意の物理量 Φ に対して、 $[i\xi Q_B, \Phi] = \delta_B \Phi$ だったので、

$$[i\xi Q_B, \varphi_i(x)] = -ig\xi c^a(x) (T^a)_{ij} \varphi_j(x), \quad [i\xi Q_B, A^{a\mu}(x)] = \xi D^\mu c^a(x),$$

$$[i\xi Q_B, c^a(x)] = \frac{1}{2} g\xi f_{abc} c^b(x) c^c(x), \quad [i\xi Q_B, b^a(x)] = -\frac{i\xi}{\alpha} \partial \cdot A^a(x)$$

ですが、漸近場においては相互作用が消え、ファインマンゲージで、

$$\begin{aligned} [Q_B, \varphi_i^{\text{as}}(x)] &= 0, & [Q_B, A_{\text{as}}^{a\mu}(x)] &= -i\partial^\mu c_{\text{as}}^a(x), \\ \{Q_B, c_{\text{as}}^a(x)\} &= 0, & \{Q_B, b_{\text{as}}^a(x)\} &= -\partial \cdot A_{\text{as}}^a(x) \end{aligned}$$

となるはずですが。ただし $[A, B]$ は A, B が共にグラスマン奇のとき反交換子、他で交換子を意味するものとします。ここに漸近場の平面波展開の式を適用すると、

$$\begin{aligned} [Q_B, a_\pm^a(\mathbf{k})] &= [Q_B, a_S^a(\mathbf{k})] = 0, & [Q_B, a_L^a(\mathbf{k})] &= -\gamma^a(\mathbf{k}), \\ \{Q_B, \gamma^a(\mathbf{k})\} &= 0, & \{Q_B, \beta^a(\mathbf{k})\} &= a_S^a(\mathbf{k}) \end{aligned}$$

を得るでしょう(この式を簡素にするために縦波・スカラーモードをかように選んだわけです)。無限小 BRS 変換により、

$$\begin{aligned} a_L^a(\mathbf{k}) &\xrightarrow{Q_B} \gamma^a(\mathbf{k}) \xrightarrow{Q_B} 0 \\ \beta^a(\mathbf{k}) &\xrightarrow{Q_B} a_S^a(\mathbf{k}) \xrightarrow{Q_B} 0 \end{aligned}$$

のように推移する 4 つ組を見てとれますが、これら演算子を 4 重項演算子といいます。

一方、ゲージ場の横波モードについては、

$$a_\pm^a(\mathbf{k}) \xrightarrow{Q_B} 0$$

であり、また、 $X \xrightarrow{Q_B} a_\pm^a(\mathbf{k})$ を満たす演算子 X も存在しません。このような演算子を 1 重項演算子といいます。物質場の粒子の生成消滅演算子も 1 重項演算子になるでしょう。そうすると、物理的粒子空間 $\mathcal{H}_{\text{phys}}$ は、真空に 1 重項演算子のみを作用して得られる状態ベクトルによって張られる空間ということになり、これは全状態空間 (フォック空間) \mathcal{V} の部分空間です。

$\mathcal{H}_{\text{phys}}$ への射影演算子を P_0 とすると、

$$\begin{aligned} P_0 &= |0\rangle\langle 0| + \int \frac{d^3\mathbf{k}}{(2\pi)^3 2k^0} \sum_i \phi_i(\mathbf{k})^* |0\rangle\langle 0| \phi_i(\mathbf{k}) \\ &+ \frac{1}{2!} \int \frac{d^3\mathbf{k}_1}{(2\pi)^3 2k_1^0} \int \frac{d^3\mathbf{k}_2}{(2\pi)^3 2k_2^0} \sum_{i_1, i_2} \phi_{i_2}(\mathbf{k}_2)^* \phi_{i_1}(\mathbf{k}_1)^* |0\rangle\langle 0| \phi_{i_1}(\mathbf{k}_1) \phi_{i_2}(\mathbf{k}_2) \\ &+ \dots \end{aligned}$$

ここで $\phi_i(\mathbf{k})$ は 1 重項演算子で、 $[\phi_i(\mathbf{k}), \phi_j(\mathbf{k}')] = \delta_j^i (2\pi)^3 2k^0 \delta^3(\mathbf{k}-\mathbf{k}')$ で規格直交化されているものとします。上式は次のように帰納的に表すこともできます：

$$\begin{aligned} P_0 &= \sum_{n=0}^{\infty} P_0^{(n)}, & P_0^{(0)} &= |0\rangle\langle 0|, \\ P_0^{(n)} &= \frac{1}{n} \int \frac{d^3\mathbf{k}}{(2\pi)^3 2k^0} \sum_i \phi_i(\mathbf{k})^* P_0^{(n-1)} \phi_i(\mathbf{k}) \quad (n \geq 1). \end{aligned}$$

28.8 物理的状態空間と4重項機構

BRS変換に対して不変な状態ベクトル、すなわちBRS電荷 Q_B が0の状態ベクトルを物理的状態ベクトルと呼びます。また、これらベクトルが成す部分空間を物理的状態空間と呼び、 $\mathcal{V}_{\text{phys}}$ と表すことにしましょう：

$$\mathcal{V}_{\text{phys}} = \{ |f\rangle \mid Q_B |f\rangle = 0 \}.$$

1重項演算子が Q_B と可換(または反可換)であること、および $Q_B |0\rangle = 0$ に注意すると、 $\mathcal{H}_{\text{phys}}$ は $\mathcal{V}_{\text{phys}}$ の部分空間であることがわかるでしょう：

$$\mathcal{V} \supset \mathcal{V}_{\text{phys}} \supset \mathcal{H}_{\text{phys}}.$$

例えば、 $a_S^a(\mathbf{k})^* |0\rangle$ や $\gamma^a(\mathbf{k})^* |0\rangle$ は物理的粒子空間には属しませんが、物理的状態ベクトルです。一方、 $a_L^a(\mathbf{k})^* |0\rangle$ や $\beta^a(\mathbf{k})^* |0\rangle$ は物理的状態ベクトルではありません。また、 $a_L^a(\mathbf{k})^* a_S^b(\mathbf{k}')^* |0\rangle$ や $\gamma^a(\mathbf{k})^* \beta^b(\mathbf{k}')^* |0\rangle$ も物理的状態ベクトルではありませんが、これらの和は物理的状態ベクトルになることが確かめられるでしょう(図28.1)。

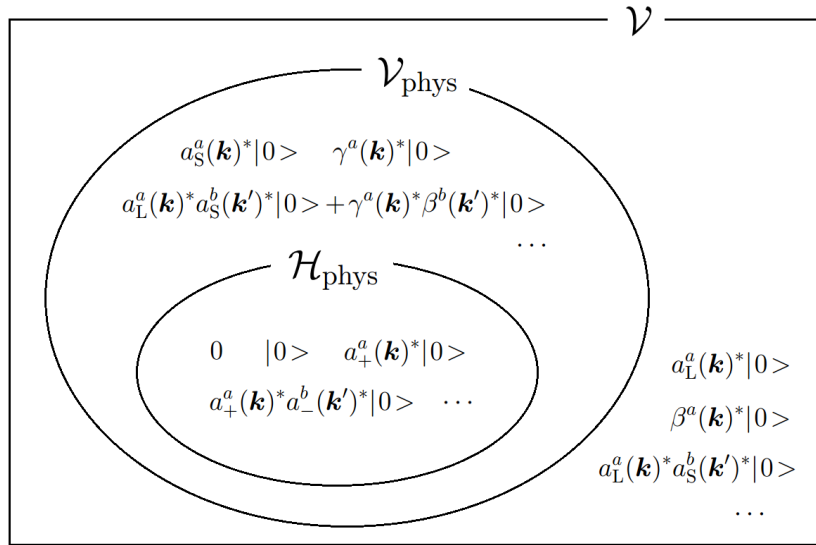


図 28.1: 物理的状態空間

このとき次の定理が成り立ちます：

$$\forall |f\rangle \in \mathcal{V}_{\text{phys}} \exists |g\rangle \in \mathcal{V} \left(|f\rangle = P_0 |f\rangle + Q_B |g\rangle \right).$$

[証明] 4重項演算子で生成される4重項粒子が n 個存在する部分空間への射影演算子を P_n とします。これは4重項演算子の反対角性に注意して、

$$P_n = \frac{1}{n} \int \frac{d^3 \mathbf{k}}{(2\pi)^3 2k^0} \left(a_S^a(\mathbf{k})^* P_{n-1} a_L^a(\mathbf{k}) + \beta^a(\mathbf{k})^* P_{n-1} \gamma^a(\mathbf{k}) + c.c. \right) \quad (n \geq 1)$$

と帰納的に与えられるでしょう。そうすると、 $n \geq 1$ に対し、

$$(1) [Q_B, P_{n-1}] = 0, \quad (2) P_n = \{Q_B, R_n\}$$

という命題を数学的帰納法で示せます。ここで、

$$R_n = \frac{1}{n} \int \frac{d^3 \mathbf{k}}{(2\pi)^3 2k^0} \left(\beta^a(\mathbf{k})^* P_{n-1} a_L^a(\mathbf{k}) + c.c. \right)$$

です。実際、まず $n = 1$ のときは、 $Q_B P_0 = P_0 Q_B = 0$ なので (1) が成り立ち、また、 $\{Q_B, R_1\}$ を計算すれば、それは P_1 になることが簡単に確かめられます。次に $n = k$ で (1), (2) が成立すると仮定すると、 $[Q_B, P_k] = [Q_B, \{Q_B, R_k\}]$ で、これは Q_B のベキ零性から 0 です。よって $n = k + 1$ で (1) が成立します。これに注意すれば、 $\{Q_B, R_{k+1}\}$ が P_{k+1} になることが同様に確かめられ、よって $n = k + 1$ で (2) が成立します。

結果、 $|f\rangle \in \mathcal{V}_{\text{phys}}$ のとき、

$$|f\rangle = \sum_{n=0}^{\infty} P_n |f\rangle = P_0 |f\rangle + \sum_{n=1}^{\infty} \{Q_B, R_n\} |f\rangle = P_0 |f\rangle + Q_B \sum_{n=1}^{\infty} R_n |f\rangle$$

となり、与題が示されました。[証明終]

物理的状態は $Q_B = 0$ の状態で、また Q_B は保存量なので、もし始状態で系が物理的状態にあれば、それは終状態でも物理的状態にあるはずです。特に始状態で $\mathcal{H}_{\text{phys}}$ にあるベクトル $|f_0\rangle$ は、終状態で $|f\rangle \in \mathcal{V}_{\text{phys}}$ となり、これは上の定理から、

$$|f\rangle = |f'\rangle + Q_B |g\rangle, \quad |f'\rangle = P_0 |f\rangle \in \mathcal{H}_{\text{phys}}$$

と展開できます。このとき、 $Q_B^* = Q_B$, $Q_B^2 = 0$ に注意して、

$$\langle f | f \rangle = \langle f' | f' \rangle$$

がわかるので、確率解釈において $Q_B |g\rangle$ は無視してよいことになります。すなわち $\mathcal{H}_{\text{phys}}$ への射影をとっても確率が保存し、遷移確率は正定値計量空間である $\mathcal{H}_{\text{phys}}$ の中だけで評価できるわけです。

このことは、4重項粒子、すなわちゲージ場の縦波・スカラー粒子およびFPゴースト粒子が、中間状態にしか存在し得ない、非物理的な存在であることを意味しています。4重項粒子が互いに協調して非物理化(幽霊化)してしまうこの機構を、4重項機構といいます(九後・小嶋 1978)。

28.9 QED再考

量子電磁気学の章で割愛した縦波・スカラーモードが非物理的になることの証明が、上でようやく示されたことに注意してください。

ちなみに QED の場合、場の方程式として、 $\square c(x) = \square b(x) = \square \partial \cdot A(x) = 0$ が得られるため、これらは自由場となり、ハイゼンベルグ表示においても、

$$c(x) = \int \frac{d^3 \mathbf{k}}{(2\pi)^3 2k^0} (\gamma(\mathbf{k}) e^{-ik \cdot x} + \gamma^*(\mathbf{k}) e^{ik \cdot x}),$$

$$\partial \cdot A(x) = \int \frac{d^3 \mathbf{k}}{(2\pi)^3 2k^0} (B(\mathbf{k}) e^{-ik \cdot x} + B^*(\mathbf{k}) e^{ik \cdot x}), \quad k^0 = |\mathbf{k}|$$

と平面波展開できます。このとき BRS 電荷は、

$$Q_B = \frac{1}{\alpha} \int d^3 \mathbf{r} (\partial_0 \partial \cdot A c - \partial \cdot A \partial_0 c)$$

$$= \frac{-i}{\alpha} \int \frac{d^3 \mathbf{k}}{(2\pi)^3 2k^0} (B(\mathbf{k}) \gamma^*(\mathbf{k}) - B^*(\mathbf{k}) \gamma(\mathbf{k}))$$

となるため、初期条件として無ゴーストであること： $\gamma(\mathbf{k})|f\rangle = 0$ を仮定すれば、物理的状態の条件 $Q_B|f\rangle = 0$ は、 $B(\mathbf{k})|f\rangle = 0$ ($\forall \mathbf{k}$)、あるいは場の正振動数部分を取り出す処理を (+) で表して、

$$\partial \cdot A(x)^{(+)}|f\rangle = 0$$

となります。これはかつて、1950 年、グプタおよびブローイラーにより独立に提案された QED 共変ゲージにおける状態空間の物理的補助条件で、グプタ・ブローイラー条件と呼ばれます。 $Q_B|f\rangle = 0$ はこれを非可換ゲージ理論に拡張した式なのです。

また、QED ではゴースト $c(x)$, $b(x)$ は他の場と一切相互作用しない自由場となるため、これらは中間状態にも現れることがなく、計算上完全に無視されることとなります。これが QED (一般に可換ゲージ理論) が特異系であるにも関わらず簡単に済んだ理由です。

索引

あ

1 重項演算子	12
SU(N) カレント	6
SU(N) ゲージ理論	3
FP ゴースト	5

か

共変ゲージ	5
グプタ・プロイラー条件	15
ゲージ革命	5
ゲージパラメータ	5
格子ゲージ理論	4

さ

4 重項演算子	12
4 重項機構	14
スカラーモード	10

た

縦波モード	10
特異系	3

は

BRS 対称性	8
BRS 電荷	9
BRS 変換	8
非可換ゲージ理論	3
ファインマンゲージ	10
ファデエフ・ポポフゴースト	5
物理的状態空間	13
物理的状態ベクトル	13
物理的粒子空間	11
不定計量空間	11
ベキ零性	9
偏極モード	10

や

ヤン・ミルズ理論	3
有効作用	5
横波モード	10
4 重項演算子	12
4 重項機構	14