あもんノート

ユークリッド幾何学、ニュートン力学から、相対論、宇宙論、量子論、場の量子論、素粒子論、そして超ひも理論まで、理論物理学を簡潔にかつ幅広く網羅したノートです。TOP へは下の URL をクリックして行けます。専用の画像掲示板で、ご意見、ご質問等も受け付けております。

http://amonphys.web.fc2.com/

目 次

第 7 章　特殊相対論

量子論以前の物理学は古典物理学と呼ばれます。古典物理学は相対論によって完成された体系をなし、特に重力を無視したときの相対論は実験的にも完全に確立したものであり、特殊相対論と呼ばれます。ここでは特殊相対論の基礎事項をまとめておきます。リーマン幾何学を既知とします。

7.1　相対論の歴史的背景

1864 年、マックスウェルは電気と磁気の統一理論を完成し、そこから波動解を導きました。これを**電磁波**といいます。理論から導かれる電磁波の伝播速度は、**光**の速さ、

$$c \sim 2.998 \times 10^8\,\mathrm{m/s}\ (\sim \text{地球 7 周半}/s)$$

に等しく、光の正体は電磁波であることが判明します。しかしニュートン理論によれば、一般に物体の速さは観測者の運動状態によって異なります。そうすると必然的に、

光の速さは、一体、何に対しての速さなのか？

という疑問を生じます。当時多くの学者は、電磁現象は**エーテル**と呼ばれる未知の媒質 (流体) の現われであり、宇宙はこのエーテルで満たされていて、光の速さはエーテルに対するものであろうと考えていました。

1905 年、アインシュタインは、エーテルなど仮定しなくても次の 2 つの事柄を同時に満たす理論を作ることができることを示し、エーテルの概念は余分であるとしました。

- 物理法則はどの基準系においても同じ形で表される (**相対性原理**)
- 光の速さは光源の運動状態に依らず一定である (**光速一定の原理**)

これら 2 つの原理から光の速さはどの基準系においても同じということになり、これを**光速の不変性**といいます。光速の不変性は、上述のように、ニュートン理論、特にガリレイ変換と矛盾するわけですが、アインシュタインはニュートン理論における時間の概念を間違いだとしました。上の 2 つの原理に忠実に従えば、時間は宇宙全体で一様に進むものではなく、基準系によって進み方が異なることにな

ります。また、離れた地点における 2 つの出来事 (**事象**) が同時刻かそうでないかは、基準系に依存することになります。

こうして構築された理論は、すでにローレンツやポアンカレにより提示されていた式に合理的な説明を与え、**相対論** (**相対性理論**) と命名されます。また、ミンコフスキーにより 4 次元時空に基づくわかりやすい形に整理されました。後にアインシュタインは相対論的な重力理論を提唱し、これを**一般相対論**と呼びます (1915〜1916 年)。対して重力を含まないそれまでの相対論は、**特殊相対論**と呼ばれることになったわけです。

(余談) ミチオ・カクは、ドキュメント映画「$E = mc^2 \sim$ アインシュタインと世界一美しい方程式」の中で、アインシュタインの発想の転換について次のように述べています :

> それまで時間とは、神の手に握られた腕時計のようなもので、宇宙のどこにいようと常に一定していると考えられていました。しかしアインシュタインは、「違う、神の腕時計のチクタクいう音の正体は、電気が磁気を生み、磁気が電気を生む音なのだ。すなわち一定なのは光の方である」と気が付いたのです。

ニュートン理論でアプリオリな概念と考えられていた時間ですが、光の速さが系に依らず不変なら、光の運動に立脚して逆に時間を構成できます。それは電磁現象に基づいた時間なので、正真正銘、我々が感じている時間と考えられるわけです。

7.2 自然単位系

以下、真空中の光の速さ c, および真空の誘電率 ϵ_0 を 1 とする**自然単位系**を採用します。

このような自然単位系にとまどう人がいるかもしれませんが、だとしたらそれは、長さと時間が異なる単位を持たなければいけないという勝手な思い込みによるものか、もしくは**SI 単位系** (MKSA 単位系) に慣れすぎているためと考えられます。SI は米国を除きよく普及している国際単位系で、日常的あるいはニュートン力学の観点においては便利ですが、相対論や量子論等の現代物理学を記述する際には、様々な普遍定数が式のあちこちに現れ便利とはいえません。

例えば、基本単位を eV (エレクトロンボルト) だけとし、

$$
\begin{aligned}
&\mathrm{m}(\text{メートル}) \sim 5.068\times 10^{6}\,\mathrm{eV}^{-1}, &&\mathrm{s}(\text{秒}) \sim 1.519\times 10^{15}\,\mathrm{eV}^{-1},\\
&\mathrm{kg}(\text{キログラム}) \sim 5.610\times 10^{35}\,\mathrm{eV}, &&\mathrm{A}(\text{アンペア}) \sim 1.244\times 10^{3}\,\mathrm{eV},\\
&\mathrm{K}(\text{ケルビン}) \sim 8.617\times 10^{-5}\,\mathrm{eV}, &&\mathrm{mol}(\text{モル}) \sim 6.022\times 10^{23}
\end{aligned}
$$

のように換算してしまうのが自然単位系の一つで、このとき真空中の光の速さ c を含め、SI における多くの普遍定数が 1 になります (物理定数表を参照)。これは原子核物理や素粒子論においてはすでによく用いられている、比較的よく普及した単位系です。eV^n の単位を持つ物理量を、**質量次元** n であるといいます。質量

やエネルギーや温度は質量次元 1 で、長さや時間は質量次元 -1 です。速さや電荷は質量次元 0, すなわち無次元量になります。

[例題] 力の単位 N を自然単位系で表せ。力の質量次元はいくらか？

[解] $\mathrm{N} = \mathrm{kg\,m/s^2} \sim \dfrac{5.610 \times 10^{35}\,\mathrm{eV} \times 5.068 \times 10^{6}\,\mathrm{eV^{-1}}}{(1.519 \times 10^{15}\,\mathrm{eV^{-1}})^2} \sim 1.232 \times 10^{12}\,\mathrm{eV^2}$. 力の質量次元は 2. [解終]

[例題] 質量密度 $1\,\mathrm{eV^4}$ を SI で表せ。

[解] $\mathrm{kg/m^3} \sim \dfrac{5.610 \times 10^{35}\,\mathrm{eV}}{(5.068 \times 10^{6}\,\mathrm{eV^{-1}})^3} \sim 4.309(7) \times 10^{15}\,\mathrm{eV^4}$. これを逆に解いて、$1\,\mathrm{eV^4} \sim 2.320 \times 10^{-16}\,\mathrm{kg/m^3}$. [解終]

(余談) 普遍定数を 1 とすることは、実は SI においてもすでに行っていると考えることができます。例えば、力の単位を仮に ri とすると、ニュートンの運動方程式は $\boldsymbol{F} = km\ddot{\boldsymbol{r}}$ であり、ここで k は $\mathrm{ri\,kg^{-1}m^{-1}s^2}$ を単位とするある普遍定数です。この場合、力学の方程式のあちこちに k が現れて鬱陶しいことになります。そこで SI では $k = 1$ とおいている、と考えることができるわけです。自然単位系の構成はこうした操作の延長にすぎません。どこか別の惑星に住む宇宙人 (知的生命体) は、ri のような力の単位を基本単位として採用しているかもしれないし、また一方で、$c = 1$ の単位系を日常的に用いている宇宙人もいるかもしれません。もし、ri を採用するある宇宙人が、「力の単位が質量と長さと時間の組合せで表されるなんてあり得ない。力はこれらと独立な物理量です。$\boldsymbol{F} = m\ddot{\boldsymbol{r}}$ では両辺の次元が合っていません」などと文句を言ってきたらどうでしょう？ 独自の単位系を元に酷い固執をしていると思うはずです。しかし $c = 1$ を受け入れられない人は、この宇宙人とまったく同様の固執をしているわけです。

7.3 時空とローレンツ座標

4 次元の計量空間を考え、その座標を x^μ $(\mu = 0, 1, 2, 3)$ としましょう。計量 $g_{\mu\nu}$ を、**ローレンツ計量**：

$$\eta_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}_{\mu\nu}$$

になるように座標を選ぶことができるとき、この計量空間を**ミンコフスキー空間**といい、この座標を**ローレンツ座標**といいます。特殊相対論においては、この 4 次元計量空間を**時空**と呼びます。

粒子の運動は時空上の曲線として表され、これを**世界線**といいます。世界線上

の線素の式、

$$d\tau^2 = g_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu$$

における τ は**固有時間**と呼ばれ、世界線にそって運動する時計が測る時間と考えます。特にローレンツ座標においては、

$$d\tau^2 = \eta_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu = (dx^0)^2 - (dx^1)^2 - (dx^2)^2 - (dx^3)^2$$

となります。上式で $dx^i = 0$ $(i = 1, 2, 3)$ とおくと、$d\tau = dx^0$ が得られるので、x^0 は系に静止した時計が測る時間を意味します。x^0 は**時間座標**と呼ばれます。残りの x^1, x^2, x^3 は**空間座標**と呼ばれます (図 7.1)。以後、$i, j, k \cdots$ などの添字は空間成分 $1, 2, 3$ を走るものとします。

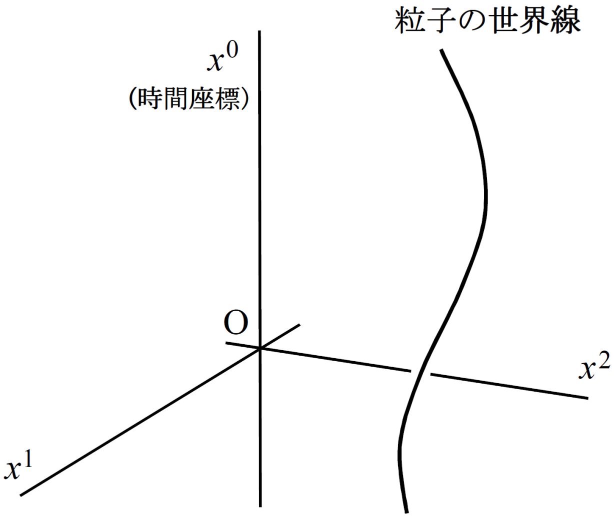

図 7.1: 時空と粒子の世界線

世界線の座標 x^μ の時間座標微分：

$$v^\mu = \frac{dx^\mu}{dx^0}$$

で粒子の (4 元) **座標速度**を定義します。明らかに $v^0 = 1$. また、v^i は粒子の速度を意味し、

$$|v| = \sqrt{v^i v^i}$$

は粒子の速さを意味します。このとき、

$$\frac{d\tau}{dx^0} = \sqrt{\eta_{\mu\nu}v^\mu v^\nu} = \sqrt{(v^0)^2 - v^i v^i} = \sqrt{1 - |v|^2}$$

がわかります。すなわち、固有時間 τ は座標時間 x^0 よりもゆっくり進むわけで、これは**運動する時計の遅れ**と呼ばれる性質です。時計の遅れを日常的に認識できないのは、日常的な速さが光の速さ 1 に比べてずっと遅いからです ($|v| \ll 1$)。

上式から、ローレンツ座標において、

$$|v| = 1 \Leftrightarrow d\tau = 0$$

ですが、これは光速で運動する粒子があれば、その粒子の固有時間はまったく経過しないことを意味しています。また、あるローレンツ座標で粒子が光速で運動していれば、$d\tau = 0$ であり、$d\tau$ はスカラーですから、別のローレンツ座標においてもその粒子は光速で運動していることになります。これは光速の不変性を意味しています。

(余談) 例えば地球にある双子がいて、その片方が光速に近い速さで飛ぶロケットに乗って宇宙旅行をしたのち地球に帰ってきたとします。このとき地球の静止系においてはロケットの時計は地球の時計に比べてゆっくり進んだと考えられるため、双子が対面したとき、地球に残っていた方は老人、旅行してきた方は若いまま、なんてことが考えられます。これは実際に起こり得る現象で、**ウラシマ効果**と呼ばれます。一方、このことをロケットの静止系で考えると、運動していたのは地球であり、そうすると地球の時計の方が遅れるということになって、おかしいと思うかもしれません (**双子のパラドックス**)。しかし地球の静止系が近似的にローレンツ座標系と考えられるのに対し、地球に対して光速近くで運動し加減速するロケットの静止系の方は、あからさまに非ローレンツ座標系で、運動する時計の遅れの性質を単純には適用できないことに注意してください。それゆえウラシマ効果に矛盾はないわけです。

7.4 ローレンツ変換

ローレンツ座標間の変換を**ローレンツ変換**といいます。線形変換：

$$x'^{\mu} = \Lambda^{\mu}{}_{\nu} x^{\nu} \quad (\text{行列表記で } x' = \Lambda\, x)$$

を考え、これがローレンツ計量を不変にすると仮定すれば、

$$\begin{aligned} d\tau^2 &= dx'^T \eta\, dx' = dx^T \eta\, dx \\ \therefore\ & dx^T \Lambda^T \eta\, \Lambda\, dx = dx^T \eta\, dx \\ \therefore\ & \Lambda^T \eta\, \Lambda = \eta \end{aligned}$$

を得ます。これがローレンツ変換の条件式です。この式は群論を用いると一般的に解けますが、特に重要な解は、

$$\Lambda = \begin{pmatrix} \gamma & -\gamma V & 0 & 0 \\ -\gamma V & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad \gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - V^2}}$$

です。ここで $-1 < V < 1$. γ は**ローレンツ因子**と呼ばれます。これが $\Lambda^T \eta \Lambda = \eta$ を満たしていることを確認して欲しいです。

ローレンツ座標を $x^\mu = (t, x, y, z)_\mu$ と書けば、変換式 $x' = \Lambda\, x$ は、

$$t' = \gamma(t - Vx), \quad x' = \gamma(-Vt + x), \quad y' = y, \quad z' = z$$

となります。このように時間座標と空間座標が混ざる変換は、相対的に運動する系への変換を意味し、**ブースト**と呼ばれます。次の点に注意しましょう：

$$\begin{aligned}
&(1)\ \ x' = 0 \ \Leftrightarrow\ x = Vt \\
&(2)\ \ x' = L \ \Leftrightarrow\ x = Vt + \gamma^{-1}L \\
&(3)\ \ t' = 0 \ \Leftrightarrow\ t = Vx
\end{aligned}$$

(1) から、V は元の系からみた新しい系 (ダッシュ系) の速度であるとわかります。また、(2) から、速度 V で運動する棒の長さが $\gamma^{-1} = \sqrt{1 - V^2}$ の比で収縮することがわかります。この性質は**ローレンツ収縮**あるいは**フィッツジェラルド収縮**と呼ばれます。

(3) は、2つの系における同時刻の定義が異なることを意味し、この性質は**同時刻の相対性**と呼ばれます。例えば図 7.2 で、2つの時空点 O と A は、ダッシュ系では同時刻の事象とみなされますが、元の系ではそうではないわけです。

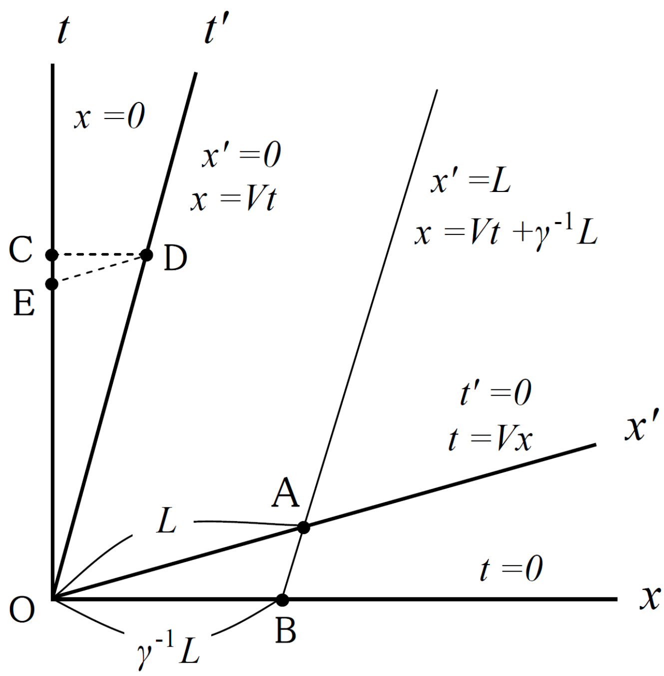

図 7.2: ローレンツ変換

運動する時計の遅れから、2つのローレンツ座標系においては互いに相手の時計が遅れることになり、少し不思議に思われるかもしれません。しかし図 7.2 の 2 系において時計の進みを比較すると、元の系においては、例えば C と D を比較し、OC > OD なので相手の時計の方が遅れると認識します。ミンコフスキー空間な

ので斜めになっている線分の方が短くなることに注意。一方、ダッシュ系においてはDと同時刻なのはCではなくEであり、DとEを比較し、OD > OE が確かめられるので、やはり相手の時計の方が遅れると認識するわけです。これら2つの意見に矛盾はありません。

ローレンツ変換の逆変換式は、

$$t = \gamma(t' + Vx'), \quad x = \gamma(Vt' + x'), \quad y = y', \quad z = z'$$

となり、元のローレンツ変換式と比較してVの符号が逆なだけです。このことは、2つのローレンツ系が互いに対等な関係になっていることを示しています。

ちなみに、双曲線関数、

$$\cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2,} \quad \sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2,} \quad \tanh x = \frac{\sinh x}{\cosh x}$$

を用いると、$\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$ に注意して、x 方向のブーストは、

$$\Lambda = \begin{pmatrix} \cosh\theta & -\sinh\theta & 0 & 0 \\ -\sinh\theta & \cosh\theta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

と媒介変数表示することもできます。ここで $-\infty < \theta < \infty$ です。このときダッシュ系の速度は $V = \tanh\theta$ と表されます。回転とのアナロジーで、このような表示が便利になることがあります。

7.5 ガレージのパラドックス

運動する時計の遅れ、ローレンツ収縮、同時刻の相対性という3つの性質は、日常的な時間概念に訂正をせまるため、その理解には特に慎重を要します。ここでは新しい時間概念に慣れるため、**ガレージのパラドックス**と呼ばれる問題を紹介します。

図7.3のように、長さ L_c の車と、長さ L_g のガレージがあり、ガレージ(および地上)に対して車が速さ V で走っているとします。ガレージの静止系においては車はローレンツ収縮によって縮んでおり、その長さは $\sqrt{1-V^2}\,L_c$ となります。いま、車がガレージの中に突入し、ガレージの中に納まった瞬間、ガレージの前後の扉A, Bを同時に瞬時に閉じ、すぐに開きます。そうして車が扉にぶつかることなく通過したとします。(扉を瞬時に閉じて開くということをイメージしにくければ、扉の代わりにタイヤストッパーを想定してもよいでしょう。)

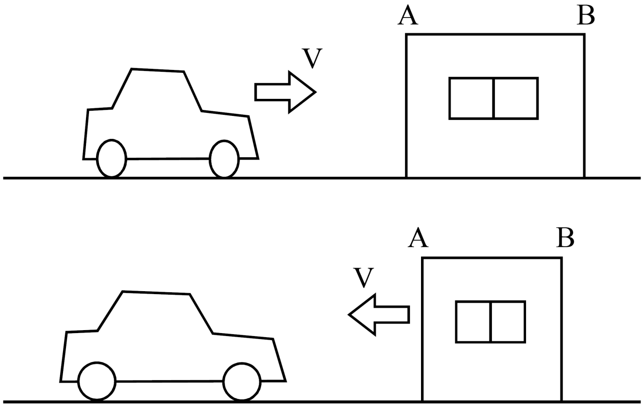

図 7.3: ガレージのパラドックス

これが可能なのは $L_g \geq \sqrt{1-V^2}\,L_c$ のときですが、衝突をぎりぎり回避したとして、

$$L_g = \sqrt{1-V^2}\,L_c$$

であったとします。すなわち、もし車とガレージをともに静止させれば、車の方が $1/\sqrt{1-V^2}$ 倍だけ長いと仮定します。

この事柄を車の静止系で考えると、ローレンツ収縮しているのはガレージの方であり、その長さは $\sqrt{1-V^2}\,L_g$ となります。この系では明らかに車の方がガレージより長く、車がガレージに収まる瞬間などあり得ません。車と扉はどうして衝突しないのでしょう? というパラドックスです。

答えは簡単で、ガレージの静止系において 2 つの扉 A, B を同時に閉じたということは、同時刻の相対性から、車の静止系においては A, B を閉じたのは同時ではないということです。B が先に閉じてすぐさま開き、その後少し経って A が閉じてすぐさま開いたというわけです。これなら車は扉にぶつかることなく通過することが可能です。

実際、その時間差を $\Delta t'$ とすると、ローレンツ変換式から、

$$\Delta t' = \gamma(\Delta t - V\Delta x), \quad \Delta t = 0, \quad \Delta x = -L_g \quad \therefore\ \Delta t' = \frac{VL_g}{\sqrt{1-V^2}}$$

と評価され、車と 2 つの扉がぎりぎり接触しない条件は、

$$\sqrt{1-V^2}\,L_g + V\Delta t' = L_c$$

と書けます。$\Delta t'$ を消去すれば $L_g = \sqrt{1-V^2}\,L_c$ を得ますが、これはガレージの静止系における仮定と一致しています。

運動する時計の遅れ、ローレンツ収縮に比べ、同時刻の相対性はどういうわけか見落とされがちです。それゆえこのようなパラドックスをきちんとこなすことが大事になってくるわけです。

(余談) 特殊相対論は物理学科では一年生で習う初等科目です。しかし文系や高卒の人が理解するのは少々難しいでしょう。ピグマリオン症から離脱していないこと、線形代数 (一次変換) をちゃんと習っていないことが理由として考えられます。こういった人の中には「理解できないのは相対論が間違っているからだ」と決めつけ独自に理論を作る人がいて、「トンデモ」(とんでもない誤解をしている人)、あるいは「相ま」と呼ばれます。インターネットではこのような人たちが多く書き込みをしているので注意が必要です。納得した人はことさら発言することはしませんが、納得できない人は繰り返し発言をするものです。

7.6 速度の変換式と光行差

x 方向への速度 V のブースト変換は、

$$t' = \gamma(t - Vx), \quad x' = \gamma(-Vt + x), \quad y' = y, \quad z' = z$$

で、ここで $\gamma = 1/\sqrt{1-V^2}$ でした。ここから、

$$\frac{dx'}{dt'} = \frac{\gamma(-V dt + dx)}{\gamma(dt - V dx)} = \frac{(dx/dt) - V}{1 - V(dx/dt),}$$

$$\frac{dy'}{dt'} = \frac{dy}{\gamma(dt - V dx)} = \frac{\sqrt{1-V^2}(dy/dt)}{1 - V(dx/dt)}$$

を得るので、このブースト変換における粒子の速度 (v_x, v_y, v_z) の変換式は、

$$v'_x = \frac{v_x - V}{1 - V v_x,} \quad v'_y = \frac{\sqrt{1-V^2}\, v_y}{1 - V v_x,} \quad v'_z = \frac{\sqrt{1-V^2}\, v_z}{1 - V v_x}$$

です。

いま、あるローレンツ系において、x 軸と角 θ を成す方向に進む光を考え、その光の速度を特に $(v_x, v_y, v_z) = (\cos\theta, \sin\theta, 0)$ としましょう。一方、このローレンツ系に対し、x 方向に速度 V で運動する別のローレンツ系において、同じ光の速度が $(v'_x, v'_y, v'_z) = (\cos\theta', \sin\theta', 0)$ であったとします (図 7.4)。

このとき速度の変換式から、

$$\cos\theta' = \frac{\cos\theta - V}{1 - V\cos\theta}$$

ですが、tan の半角公式 : $\tan\frac{\theta}{2} = \sqrt{\frac{1-\cos\theta}{1+\cos\theta}}$ に注意すれば、

$$\tan\frac{\theta'}{2} = \sqrt{\frac{1+V}{1-V}}\ \tan\frac{\theta}{2}$$

を得ます。この式は観測者の運動状態の違いにより光の進む方向 (あるいはやってくる方向) が変わって見えることを意味していますが、この現象を**光行差**といいます。

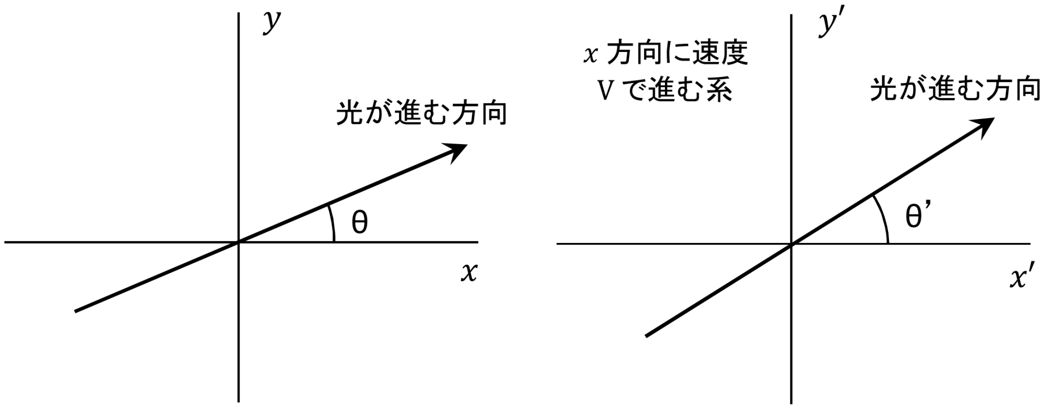

図 7.4: 光行差

(余談) あるロケットが地球のすぐ近くを太陽の方向に向かって光の速さに匹敵する速さで通過した場合、ロケットに乗っている人がその瞬間に見る太陽は、地球にいる人が見る太陽よりも小さく見えます。このことは地球の静止系で考えれば光行差で説明されます。一方、ロケットの静止系で考えた場合は、光の到達に時間がかかることを考慮した**みかけの位置**により説明されます。ロケットの静止系においては、地球と太陽がともに運動していて、地球と太陽の間の距離はローレンツ収縮により短くなります。また、地球がロケットのところまでやって来た瞬間にロケットに乗っている人が見る太陽の光は、太陽がその瞬間にある位置よりももっと遠くにあったときに発せられたものです。結果、小さく見えると考えられるわけです。もちろんこのことは定量的にも確かめられます。光行差とみかけの位置の概念が、系の違いによる裏腹の関係になっていることに注意してください。

7.7 任意の方向のブースト

ローレンツ変換 $x'^\mu = \Lambda^\mu{}_\nu x^\nu$ が一般に速度 v^i のブーストだとしましょう。そうすると、元の系の原点は新しい系では $-v^i$ の速度で運動するはずなので、

$$x^i = 0 \Leftrightarrow x'^i = -v^i x'^0$$

です。このことから $\Lambda^i{}_0 = -v^i \Lambda^0{}_0$ を得るでしょう。これとローレンツ変換の条件式：$\eta_{\mu\nu}\Lambda^\mu{}_\rho\Lambda^\nu{}_\sigma = \eta_{\rho\sigma}$ の $\rho = \sigma = 0$ 成分から、

$$\Lambda^0{}_0 = \gamma, \quad \Lambda^i{}_0 = -\gamma v^i$$

を得ることができます。ここで $\gamma = 1/\sqrt{1-|v|^2}$ はローレンツ因子です。そうすると、$\eta_{\mu\nu}\Lambda^\mu{}_\rho\Lambda^\nu{}_\sigma = \eta_{\rho\sigma}$ の $\rho = 0, \sigma = i$ 成分から、

$$\Lambda^0{}_i = -v^j \Lambda^j{}_i.$$

さらに $\rho = i, \sigma = j$ 成分から、

$$v^k v^l \Lambda^k{}_i \Lambda^l{}_j - \Lambda^k{}_i \Lambda^k{}_j = -\delta^i_j$$

を得ます。この式は ${\Lambda^i}_j = \delta^i_j + A(v)v^iv^j$ とおくことで解くことができて、$A(v) = (\gamma-1)/|v|^2$ を与えます。まとめると、

$$
{\Lambda^0}_0 = \gamma, \qquad {\Lambda^i}_0 = {\Lambda^0}_i = -\gamma v^i, \qquad {\Lambda^i}_j = \delta^i_j + \frac{(\gamma-1)v^iv^j}{|v|^2}
$$

で与えられる ${\Lambda^\mu}_\nu$ が速度 v^i のブーストの変換行列です。これは対称行列になっています。

2つのブーストの合成は、一般には1つのブーストにはなりません。一般に2つのブーストの合成は、1つのブーストと空間回転の合成になるのです。

例えば、あるローレンツ系 S に対し、x^1 方向に速さ v でブーストして得られるローレンツ系を S' とし、さらに S' から x^2 方向に速さ u でブーストして得られるローレンツ系を S'' とすると、ローレンツ変換 $S \to S''$ の変換行列は、

$$
\Lambda = \begin{pmatrix} \gamma_u & 0 & -\gamma_u u & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\gamma_u u & 0 & \gamma_u & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \gamma_v & -\gamma_v v & 0 & 0 \\ -\gamma_v v & \gamma_v & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma_v\gamma_u & -\gamma_v\gamma_u v & -\gamma_u u & 0 \\ -\gamma_v v & \gamma_v & 0 & 0 \\ -\gamma_v\gamma_u u & \gamma_v\gamma_u vu & \gamma_u & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}
$$

$$
\text{ただし } \gamma_v = \frac{1}{\sqrt{1-v^2},} \quad \gamma_u = \frac{1}{\sqrt{1-u^2}}
$$

です。これは対称行列ではないのでブーストではあり得ません。これがあるブースト Λ_b と、x^1-x^2 平面における角度 θ の回転：

$$
\Lambda_r = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & \sin\theta & 0 \\ 0 & -\sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}
$$

の合成だと仮定し、

$$
\Lambda = \Lambda_r\Lambda_b
$$

とおくと、$\Lambda_b = \Lambda_r^{-1}\Lambda$ が対称行列であることから、

$$
\tan\theta = -\frac{\gamma_v\gamma_u vu}{\gamma_v+\gamma_u,} \qquad \cos\theta = \frac{\gamma_v+\gamma_u}{\gamma_v\gamma_u+1}
$$

および、

$$
\Lambda_b = \begin{pmatrix} \gamma_v\gamma_u & -\gamma_v\gamma_u v & -\gamma_u u & 0 \\ -\gamma_v\gamma_u v & 1+\alpha v^2 & \alpha\gamma_v^{-1}vu & 0 \\ -\gamma_u u & \alpha\gamma_v^{-1}vu & 1+\alpha\gamma_v^{-2}u^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \alpha = \frac{\gamma_v^2\gamma_u^2}{\gamma_v\gamma_u+1}
$$

を得ます。Λ_b は速度 $(v, \gamma_v^{-1}u, 0)$ のブーストになっていることがわかります。

図 7.5 に 3 系 S, S', S'' の関係を示します。S 系の同時刻においては S'' 系の 2 軸は直交していないことに注意。これは直方体の物体がその面の向きと無関係な斜めの方向に運動すれば、ローレンツ収縮によりひしゃげ、平行六面体になることと関係した効果です。

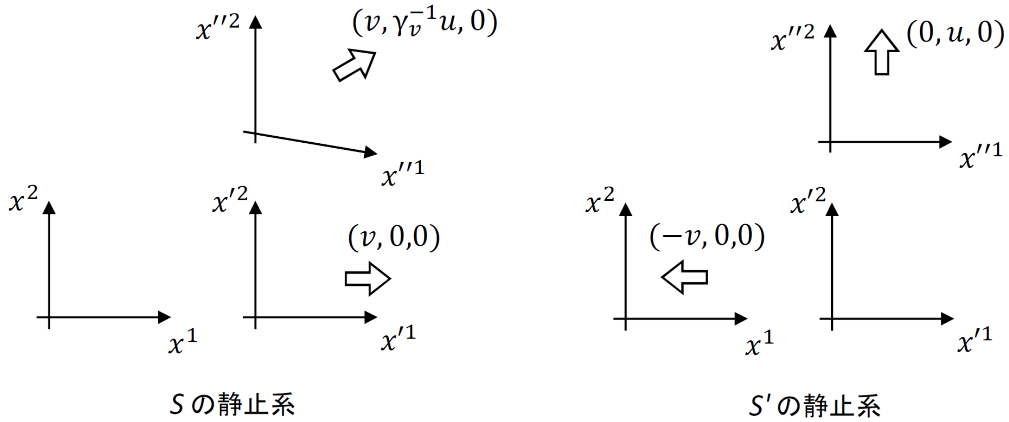

図 7.5: ブーストの合成

7.8 特殊相対論の作用

物質を構成する粒子には**質量**および**電荷**と呼ばれる固有の物理量が付随しているものとします。n 番目の粒子の質量を m_n, 電荷を q_n と書きます。また、n 番目の粒子の世界線の式を、

$$x^\mu = x_n^\mu(\lambda_n)$$

とし、固有時間を τ_n と表します。λ_n は世界線上の適当なパラメーターです。

各粒子の世界線上の積分和、

$$S_m = -\sum_n m_n \int d\tau_n$$

は**粒子の作用**と呼ばれます。この式は座標の選び方に依存しません。

一方、時空上にベクトル場 $A_\mu(x)$ があるものとし、これを 4 **元ポテンシャル**と呼びます。

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$$

を定義すると、

$$\nabla_\mu A_\nu - \nabla_\nu A_\mu = \partial_\mu A_\nu - \Gamma^\lambda{}_{\nu\mu} A_\lambda - \partial_\nu A_\mu + \Gamma^\lambda{}_{\mu\nu} A_\lambda = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$$

なので、$F_{\mu\nu}$ は反対称テンソルです。これを**電磁場**、あるいは**電磁テンソル**といいます。時空積分、

$$S_{em} = -\frac{1}{4}\int d^4x \sqrt{\ } F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}$$

は**電磁場の作用**と呼ばれます。ここで $\sqrt{\ } = \sqrt{-\det g}$ で、g は計量の行列です。積の定理から $F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}$ はスカラーなので、S_{em} も座標に依存しない量です。

また、4元ポテンシャルの各世界線上における線積分和、

$$S_q = -\sum_n q_n \int dx_n^\mu \, A_\mu(x_n)$$

は**電磁相互作用の作用**と呼ばれます。これも座標に依存しません。

以上、3つの作用の和、

$$\begin{aligned} S &= S_m + S_q + S_{em} \\ &= -\sum_n m_n \int d\tau_n - \sum_n q_n \int dx_n^\mu \, A_\mu(x_n) - \frac{1}{4}\int d^4x \sqrt{\ } F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} \end{aligned}$$

が**特殊相対論の作用**であり、粒子の世界線 $x_n^\mu(\lambda_n)$, および4元ポテンシャル $A_\mu(x)$ の仮想変分に対して、停留値性：

$$\delta S = 0$$

を持つものと仮定されます。このような仮定は一般に作用原理と呼ばれます。この主張は座標に依存していないため、そこから得られる物理法則は座標に依存しません。この性質を**共変性**、あるいは**一般相対性原理**といいます。

(余談) 初等的な特殊相対論の教科書では、ローレンツ座標だけを扱い、一般座標を考えないことが多いです。ここでは特殊相対論の枠内において一般座標も扱います。このため難易度は少し高くなりますが、論理的に自然で、また一般相対論への拡張も容易になります。以下、少し難しくなりますが、現代物理学を理解するための登竜門です。頑張ってフォローして欲しいです。

7.9 粒子の運動方程式

粒子の作用 S_m を丁寧に書けば、

$$S_m = -\sum_n m_n \int d\lambda_n \left(g_{\mu\nu}(x_n) \frac{dx_n^\mu}{d\lambda_n}\frac{dx_n^\nu}{d\lambda_n} \right)^{1/2}.$$

x_n^λ に関する変分を計算すれば、結果、

$$\frac{\delta S_m}{\delta x_n^\lambda} = m_n \frac{d\tau_n}{d\lambda_n}\left(g_{\lambda\mu}\frac{du_n^\mu}{d\tau_n} + \Gamma_{\lambda\mu\nu} u_n^\mu u_n^\nu \right)$$

となります。導出は測地線の方程式の導出と同じなので、リーマン幾何学の章を参照してください。また、汎関数微分については解析力学の章を参照してください。

$$u_n^\mu = \frac{dx_n^\mu}{d\tau_n}$$

は粒子の**固有速度**と呼ばれます。これは座標速度 $v_n^\mu = dx_n^\mu / dx_n^0$ と異なり、反変ベクトルです。

一方、電磁相互作用の作用 S_q に関して、

$$\begin{aligned}
\delta S_q &= \delta \left(-\sum_n q_n \int d\lambda_n \, \frac{dx_n^\mu}{d\lambda_n} \, A_\mu(x_n) \right) \\
&= -\sum_n q_n \int d\lambda_n \left(\frac{d\delta x_n^\mu}{d\lambda_n} \, A_\mu(x_n) + \frac{dx_n^\mu}{d\lambda_n} \, \delta A_\mu(x_n) \right) \\
&= -\sum_n q_n \int d\lambda_n \left(-\delta x_n^\mu \, \frac{dx_n^\nu}{d\lambda_n} \, \partial_\nu A_\mu(x_n) + \frac{dx_n^\mu}{d\lambda_n} \, \delta x_n^\nu \, \partial_\nu A_\mu(x_n) \right) \\
&= -\sum_n q_n \int d\lambda_n \, F_{\nu\mu}(x_n) \frac{dx_n^\mu}{d\lambda_n} \, \delta x_n^\nu \qquad \therefore \; \frac{\delta S_q}{\delta x_n^\lambda} = -q_n F_{\lambda\mu} \frac{dx_n^\mu}{d\lambda_n}
\end{aligned}$$

を得るので、作用原理 $\delta S / \delta x_n^\lambda = 0$ より、**粒子の運動方程式**として、

$$m_n \left(\frac{du_n^\lambda}{d\tau_n} + \Gamma^\lambda{}_{\mu\nu} u_n^\mu u_n^\nu \right) = q_n F^\lambda{}_\mu u_n^\mu$$

を得ます。$\Gamma^\lambda{}_{\mu\nu}$ を含む項は座標が直線座標でないことから生じる仮想的な力で、例えば加速系における慣性力はこれに該当します。ローレンツ座標を選べばこれは消えます。一方、$F^\lambda{}_\mu$ を含む項は電磁場から来る力で、**ローレンツ力**と呼ばれます。

7.10 マックスウェル方程式

次に 4 元ポテンシャル $A_\mu(x)$ に関する変分ですが、

$$\begin{aligned}
\delta S_{em} &= -\frac{1}{2} \int d^4x \sqrt{\;} F^{\mu\nu} \delta F_{\mu\nu} = -\frac{1}{2} \int d^4x \sqrt{\;} F^{\mu\nu} \left(\partial_\mu \delta A_\nu - \partial_\nu \delta A_\mu \right) \\
&= -\int d^4x \sqrt{\;} F^{\mu\nu} \, \partial_\mu \delta A_\nu = \int d^4x \, \partial_\mu (\sqrt{\;} F^{\mu\nu}) \delta A_\nu \qquad \therefore \; \frac{\delta S_{em}}{\delta A_\nu} = \partial_\mu (\sqrt{\;} F^{\mu\nu}).
\end{aligned}$$

一方、

$$\frac{\delta S_q}{\delta A_\nu(x)} = -\sum_n q_n \int dx_n^\mu \, \frac{\delta A_\mu(x_n)}{\delta A_\nu(x)} = -\sum_n q_n \int dx_n^\nu \, \delta^4(x - x_n)$$

ですから、作用原理 $\delta S/\delta A_\nu = 0$ より、電磁場の運動方程式は、

$$\partial_\mu(\surd\, F^{\mu\nu}) = \surd\, j^\nu$$

となり、**マックスウェル方程式**と呼ばれます。ここで、

$$\surd\, j^\mu = \sum_n q_n \int dx_n^\mu\ \delta^4(x-x_n)$$

は **4 元電流密度**と呼ばれる量です。$\surd$ を付けて定義したのは、そうすることで j^μ を反変ベクトル場とみなせるからです $^{(*)}$。$\delta^4(x) = \delta(x^0)\delta(x^1)\delta(x^2)\delta(x^3)$ は 4 元デルタ関数です。

電磁場の反対称性 $F_{\mu\nu} = -F_{\nu\mu}$ に注意すれば、マックスウェル方程式から、

$$\partial_\mu(\surd\, j^\mu) = 0$$

がわかります。すなわち、4 元電流密度は**保存カレント**です。実際、ガウスの定理に注意すると、任意の空間的領域 V に対して、

$$\int_V d^3x\ \partial_0(\surd\, j^0) = -\int_V d^3x\ \partial_i(\surd\, j^i) = -\int_{\partial V} d^2x_i \surd\, j^i$$

ですが、もし V の境界面 ∂V で $\surd\, j^i = 0$ なら、上式は 0 となり、

$$Q = \int_V d^3x \surd\, j^0 = \sum_n q_n \int_V d^3x\, \delta^3(x-x_n)\Big|_{x_n^0 = x^0}$$

が時間座標に依らないことになります。$\int_V d^3x\, \delta^3(x-x_n)|_{x_n^0=x^0}$ は n 番目の粒子が時刻 x^0 に V 内にあるときは 1 を与え、無いときは 0 を与えることに注意すると、Q は時刻 x^0 において V 内にある電荷の総和を意味しています。すなわちこれは**電荷保存則**であり、この場合は自明な内容になっています。

ちなみに、計量に関する微分公式 (リーマン幾何学の章を参照) に注意すれば、マックスウェルの方程式と電荷保存則は、それぞれ共変微分 ∇_μ を用いて、

$$\nabla_\mu F^{\mu\nu} = j^\nu, \qquad \nabla_\mu j^\mu = 0$$

と書くこともできます。このように書けば座標に依らない方程式であること、すなわち共変性が明らかです。

(*注) 任意のスカラー場 $\phi(x)$ に対し、

$$\phi'(y') = \phi(y) = \int d^4x\, \phi(x)\delta^4(x-y) = \int d^4x' \det\frac{\partial x}{\partial x'}\, \phi'(x')\delta^4(x-y)$$

ですから、4 元デルタ関数の変換則は、

$$\delta^4(x'-y') = \det\frac{\partial x}{\partial x'}\, \delta^4(x-y)$$

です。これと $\surd' = |\det(\partial x/\partial x')|\ \surd$ に注意すれば、反転を含まない一般座標変換に対し与題が確かめられるでしょう。

7.11 エネルギー運動量テンソル

次に、無限小の一般座標変換、

$$x'^{\mu} = x^{\mu} - \epsilon^{\mu}(x)$$

を考えてみましょう。$\epsilon^{\mu}(x)$ は座標に依存した無限小量です。このとき計量のテンソル性から、

$$\begin{aligned}
g_{\mu\nu}(x) &= \frac{\partial x'^{\rho}}{\partial x^{\mu}}\frac{\partial x'^{\sigma}}{\partial x^{\nu}}\, g'_{\rho\sigma}(x') \\
&= \big(\delta^{\rho}_{\mu} - \partial_{\mu}\epsilon^{\rho}(x)\big)\big(\delta^{\sigma}_{\nu} - \partial_{\nu}\epsilon^{\sigma}(x)\big)\big(g'_{\rho\sigma}(x) - \epsilon^{\lambda}(x)\partial_{\lambda}g'_{\rho\sigma}(x)\big) \\
&= g'_{\mu\nu}(x) - \partial_{\mu}\epsilon^{\rho}(x)g_{\rho\nu}(x) - \partial_{\nu}\epsilon^{\sigma}(x)g_{\mu\sigma}(x) - \epsilon^{\lambda}(x)\partial_{\lambda}g_{\mu\nu}(x).
\end{aligned}$$

高次の無限小量を無視しました。また、$g'_{\mu\nu}(x) = g_{\mu\nu}(x) + O(\epsilon)$ に注意。よって、計量 $g_{\mu\nu}(x)$ の変分は、

$$\delta g_{\mu\nu}(x) := g'_{\mu\nu}(x) - g_{\mu\nu}(x) = \partial_{\mu}\epsilon^{\lambda}(x)g_{\lambda\nu}(x) + \partial_{\nu}\epsilon^{\lambda}(x)g_{\lambda\mu}(x) + \epsilon^{\lambda}(x)\partial_{\lambda}g_{\mu\nu}(x)$$

となります$^{(*)}$。汎関数微分で書けば、

$$\frac{\delta g_{\mu\nu}(y)}{\delta\epsilon^{\lambda}(x)} = \partial_{\mu}\delta^{4}(x-y)g_{\lambda\nu}(y) + \partial_{\nu}\delta^{4}(x-y)g_{\lambda\mu}(y) + \delta^{4}(x-y)\partial_{\lambda}g_{\mu\nu}(y).$$

一方、この無限小座標変換に対する作用の変分は、作用原理から $\delta S/\delta x^{\mu}_{n} = 0$, $\delta S/\delta A_{\mu} = 0$ であることに注意すると、計量の場だけで展開され、

$$\frac{\delta S}{\delta\epsilon^{\lambda}(x)} = \int d^{4}y\ \frac{\delta S}{\delta g_{\mu\nu}(y)}\frac{\delta g_{\mu\nu}(y)}{\delta\epsilon^{\lambda}(x)}$$

と書けますが、

$$\frac{\delta S}{\delta g_{\mu\nu}} = -\frac{1}{2}\sqrt{\ }T^{\mu\nu}$$

で $T^{\mu\nu}$ を定義すれば、これは添字 μ, ν について対称と仮定できます。

以上の式から、

$$\frac{\delta S}{\delta\epsilon^{\lambda}} = \partial_{\mu}(\sqrt{\ }T^{\mu}_{\lambda}) - \frac{1}{2}\sqrt{\ }\partial_{\lambda}g_{\mu\nu}T^{\mu\nu} = \sqrt{\ }\nabla_{\mu}T^{\mu}_{\lambda}$$

を得ますが、作用は座標に依らないのでこれは 0 のはずです。すなわち、

$$\nabla_{\mu}T^{\mu\nu} = 0.$$

特にローレンツ座標においては、$\partial_{\mu}T^{\mu\nu} = 0$ となり、$T^{\mu\nu}$ は保存カレントであるとわかります。

作用の計量に関する変分を計算すれば、それぞれ、

$$\frac{\delta S_m}{\delta g_{\mu\nu}} = -\frac{1}{2}\sum_n m_n \int dx_n^\mu u_n^\nu \delta^4(x-x_n), \qquad \frac{\delta S_q}{\delta g_{\mu\nu}} = 0,$$

$$\frac{\delta S_{em}}{\delta g_{\mu\nu}} = -\frac{1}{2}\surd\left(F^{\mu\lambda}F_\lambda{}^\nu + \frac{1}{4}\,g^{\mu\nu}F_{\rho\sigma}F^{\rho\sigma}\right)$$

となるため、$T^{\mu\nu}$ の具体的な形は、

$$T^{\mu\nu} = \surd^{-1}\sum_n m_n \int dx_n^\mu u_n^\nu \delta^4(x-x_n) + F^{\mu\lambda}F_\lambda{}^\nu + \frac{1}{4}\,g^{\mu\nu}F_{\rho\sigma}F^{\rho\sigma}$$

となります。これを**エネルギー運動量テンソル**といいます。

(*注) 場 $\phi(x)$ の同座標値における変分 $\delta\phi(x) = \phi'(x) - \phi(x)$ は数学においては**リー微分**と呼ばれます。同じ点における変分 $\phi'(x') - \phi(x)$ と区別して、リー微分を $\delta_L\phi(x)$ のように書くこともあります。汎関数における微分 (変分) はリー微分によるものであることに注意してください。

7.12 4元運動量

ローレンツ座標においては $T^{\mu\nu}$ は保存カレントでした。よってある空間的領域 V の境界面で $T^{i\nu} = 0$ ならば、

$$P^\nu = \int_V d^3x\, T^{0\nu} = \sum_n m_n u_n^\nu \mid_{x_n^0 = x^0} + \int_V d^3x \left(F^{0\lambda}F_\lambda{}^\nu + \frac{1}{4}\,g^{0\nu}F_{\rho\sigma}F^{\rho\sigma}\right)$$

は時間座標に依りません。すなわち保存量です。P^μ を領域 V の **4元運動量**といいます。その時間成分 P^0 は**エネルギー**、空間成分 P^i は**運動量**と呼ばれます。

各々の粒子の寄与が、

$$P_n^\mu = m_n u_n^\mu = m_n v_n^\mu\,\frac{dx^0}{d\tau_n} = \frac{m_n v_n^\mu}{\sqrt{1-|v_n|^2}}$$

であることに注意して下さい。粒子の速さ $|v_n|$ が光速 1 に近づけば、その 4 元運動量は限りなく大きくなります。4 元運動量は保存量ですから、正常な初期条件から出発した場合、粒子は決して光速には到達できないと考えられます。

また、$|v_n| \ll 1$ という非相対論的極限においては、粒子のエネルギーと運動量は、それぞれ v_n の最低次で、

$$P_n^0 \sim m_n + \frac{1}{2}\,m_n|v_n|^2, \quad P_n^i \sim m_n v_n^i$$

と近似されることに注意してください。運動量 P_n^i はニュートン理論の運動量に近似され、エネルギー P_n^0 は、“質量 + ニュートン理論の運動エネルギー” に近似されるわけです。

4元運動量 P^μ はローレンツ変換において反変ベクトルとして振舞います。このことを証明しておきましょう。

[証明] 無限小のローレンツ変換を、

$$x'^\mu = x^\mu + \epsilon^\mu{}_\nu x^\nu$$

と書きます。ここで $\epsilon^\mu{}_\nu$ は無限小の変換パラメータです。これがローレンツ計量を不変とすることから、$\eta_{\mu\lambda}\epsilon^\lambda{}_\nu + \eta_{\nu\lambda}\epsilon^\lambda{}_\mu = 0$ が得られます。すなわち、

$$\epsilon^0{}_0 = 0, \quad \epsilon^0{}_i = \epsilon^i{}_0, \quad \epsilon^i{}_j = -\epsilon^j{}_i.$$

一方、$T^{\mu\nu}$ がテンソルであることに注意すると、無限小ローレンツ変換に対する変分 (リー微分) は、$\delta T^{\mu\nu} = \epsilon^\mu{}_\lambda T^{\lambda\nu} + \epsilon^\nu{}_\lambda T^{\mu\lambda} - \epsilon^\rho{}_\sigma x^\sigma \partial_\rho T^{\mu\nu}$ と書けます。$\mu = 0$ とおけば、

$$\delta T^{0\nu} = \epsilon^0{}_\lambda T^{\lambda\nu} + \epsilon^\nu{}_\lambda T^{0\lambda} - \epsilon^\rho{}_\sigma x^\sigma \partial_\rho T^{0\nu}.$$

この式の最後の項は、$\partial_\mu T^{\mu\nu} = 0$ に注意し、

$$\begin{aligned}
-\epsilon^\rho{}_\sigma x^\sigma \partial_\rho T^{0\nu} &= -\epsilon^0{}_\sigma x^\sigma \partial_0 T^{0\nu} - \epsilon^i{}_\sigma x^\sigma \partial_i T^{0\nu} = \epsilon^0{}_\sigma x^\sigma \partial_i T^{i\nu} - \epsilon^i{}_\sigma x^\sigma \partial_i T^{0\nu} \\
&= \partial_i(\cdots) - \epsilon^0{}_i T^{i\nu} + \epsilon^i{}_i T^{0\nu} = \partial_i(\cdots) - \epsilon^0{}_i T^{i\nu}
\end{aligned}$$

となるので、空間の全微分項 $\partial_i(\cdots)$ を除き初項と相殺します :

$$\delta T^{0\nu} = \epsilon^\nu{}_\lambda T^{0\lambda} + \partial_i(\cdots).$$

よって、

$$\delta P^\nu = \int_V d^3x\, \delta T^{0\nu} = \epsilon^\nu{}_\lambda \int_V d^3x\, T^{0\lambda} = \epsilon^\nu{}_\lambda P^\lambda$$

がわかり、これは P^ν が反変ベクトルであることを示しています。[証明終]

(余談) $P_n^0 = m_n/\sqrt{1-v_n^2}$ から、光速で運動する粒子のエネルギーが有限の場合、その質量は 0 でなければいけません。光を粒子の集まりと考えた場合、その質量は 0 と考えられるわけです。一般に、光速で運動する粒子は**ルクシオン** (あるいはルクソン) と呼ばれます。対して、光速未満の速さで運動する通常の粒子は**ターディオン**と呼ばれます。一方、超光速で運動する粒子があれば、エネルギーの実性から、その質量は純虚数でなければなりません。このような粒子は**タキオン**と呼ばれます。古典論においてはタキオンの存在を否定する明確な根拠はありませんが、場の量子論においては原理的に存在し得ないことが証明されます。

7.13 複合粒子

一般に複数の粒子と電磁場が空間の局所にあるとき、系のエネルギーと運動量がそれぞれ $P^0 = m$, $P^i = 0$ となるローレンツ座標が存在するでしょう。この座標を系の**重心系**といい、このときの m を系の**有効質量**といいます。一方、4元運

動量 P^μ はローレンツ変換に対して反変ベクトルとして振舞うため、重心系からブーストした他のローレンツ座標における4元運動量は、

$$P'^\mu = \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\nu} P^\nu = \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^0} m.$$

ここで $\partial x'^\mu / \partial x^0$ は系の重心の固有速度とみなせるので、これを u^μ と書けば、

$$P'^\mu = m u^\mu$$

となります。この式は1粒子の4元運動量と同形であるため、複数の粒子と電磁場からなる複雑な系も、巨視的には1粒子とみなすことができ、このような粒子は**複合粒子**と呼ばれます。

しかし複合粒子が多数あったとき、全体のエネルギーが保存する一方で、それら有効質量の総和は保存しません。このことは例えば複合粒子同士の非弾性衝突を考えればわかるでしょう。また、ある1個の粒子があったとき、それが複合粒子で'ないこと'を知る術もありません。これが**質量の非保存性**の意味であり、有名な式 $E = mc^2$ $(P^0 = m)$ の実効的な意味でもあります。

$P^\mu = m u^\mu$ から、

$$\eta_{\mu\nu} P^\mu P^\nu = m^2 \eta_{\mu\nu} u^\mu u^\nu = m^2 \quad \therefore\ P^0 = \sqrt{|P|^2 + m^2}.$$

これは粒子の**質量殻上条件** (**on-shell** 条件) などと呼ばれる式です。

(余談) よく教科書に見かける $E = mc^2$ の説明は、単に1粒子の静止時のエネルギーが $m_n c^2$ であることです。しかしこれはもちろん核反応などで生じる質量欠損の説明にはなっていません。多くの教科書においてこの種のごまかしが横行しているのは、4元運動量のローレンツベクトル性の一般的証明が、特殊相対論の他の事項と比べてやや敷居が高いからと考えられます。

7.14 一般座標の性質

ここで一般的な座標の性質について考えてみましょう。

空間の各場所に無数の時計があると想定します。これらの時計は正確に時を刻む必要はありませんが、稠密に配置されていて、それぞれの時計には指標が付いているものとします。ある1つの事象に対し、そこにある時計の指標をその事象の空間座標 x^i とし、その時計が示す時刻をその事象の時間座標 x^0 だと考えます。このような想定により、時空に4元座標 x^μ が張られると考えることができ、計量 $g_{\mu\nu}(x)$ が決定します。計量 $g_{\mu\nu}(x)$ が時間座標 x^0 に依存しないとき、その座標は**定常的**であるといいます。

いま、定常的な座標において、空間座標がそれぞれ $x^i,\ x^i + dx^i$ である接近した2つの世界線 L_1, L_2 を考えます。そして、L_2 において時刻 t_1 に光を発し、それ

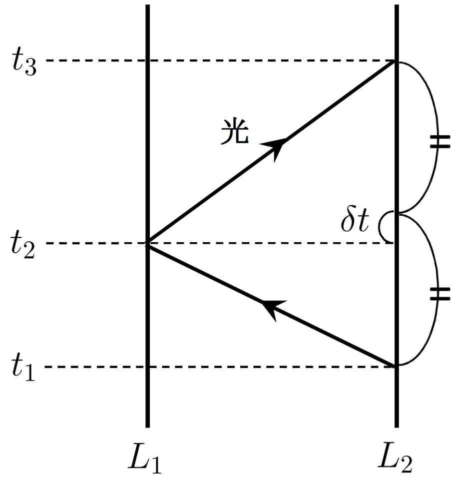

図 7.6: 光通信過程

を L_1 において時刻 t_2 に受け取り、即座に光を送り返し、それを L_2 において時刻 t_3 に受け取るという**光通信過程**を考えます (図 7.6)。光の世界線においては、

$$g_{00}(dx^0)^2 + 2g_{0i}dx^i dx^0 + g_{ij}dx^i dx^j = 0$$

であり、これを dx^0 について解くと、その 2 解は、

$$dx^0_\pm = \frac{-g_{0i}dx^i \pm \sqrt{(g_{0i}g_{0j} - g_{00}g_{ij})dx^i dx^j}}{g_{00}}.$$

このとき上の光通信過程において、

$$t_1 = t_2 + dx^0_-, \quad t_3 = t_2 + dx^0_+$$

です。もし $t_2 = (t_1 + t_3)/2$ なら、L_1, L_2 における 2 つの時計は同期されていることになります。また、$\delta t = (t_1 + t_3)/2 - t_2$ という量を定義すれば、これは 2 つの時計のずれを意味します。t_1, t_3 の式を代入し $dx^0_\pm$ の式を用いれば、

$$\delta t = -\frac{g_{0i}}{g_{00}}\, dx^i.$$

空間の各場所で隣接した時計が同期されているような座標は、**静的**であると呼ばれます。座標が静的であるための必要十分条件は $g_{0i} = 0$ であることがわかります。

もし δt の式が完全微分形式で、$-g_{0i}/g_{00} = \partial_i \phi$ を満たす場 ϕ が存在すれば、時間座標の変換 $x'^0 = x^0 - \phi$ により静的な座標を得ることができます。しかしそうでない場合、すなわち g_{0i}/g_{00} の回転 (rot) が 0 でない場合、これは不可能になります。この場合、各時計をどのように調整しても大域的にこれらを同期させることはできないのです。

時空の座標が定常的ならば、静的であろうとなかろうと、接近した 2 点間の空間的距離を考えることができます。上の光通信過程において、L_2 における時計 (座

標時間) の進み方が、本当の時計 (固有時間) の進み方の $1/\sqrt{g_{00}}$ 倍であることに注意すれば、L_1, L_2 間の空間的距離は、$dl = \sqrt{g_{00}}(t_3 - t_1)/2$ であると考えられます。t_1, t_3 の式を代入し $dx^0_\pm$ の式を用いれば、

$$dl^2 = \gamma_{ij}\, dx^i dx^j, \qquad \gamma_{ij} = \frac{g_{0i}g_{0j}}{g_{00}} - g_{ij}$$

を得るでしょう。γ_{ij} を**空間計量**と呼びます。特に静的な座標においては $g_{0i} = 0$ なので、$\gamma_{ij} = -g_{ij}$ となります。

7.15 回転系

ローレンツ座標を (t, x, y, z) とし、$x = r\cos\theta,\ \ y = r\sin\theta$ で r, θ を定義します。このとき時空の線素の式は、

$$d\tau^2 = dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2 = dt^2 - dr^2 - r^2 d\theta^2 - dz^2$$

となり、(t, r, θ, z) は**円柱座標**と呼ばれます。さらに z 軸を軸として角速度 ω で回転する回転系を考え、$\theta' = \theta - \omega t$ とおきます。上式は、

$$d\tau^2 = (1 - \omega^2 r^2)dt^2 - dr^2 - r^2 d\theta'^2 - dz^2 - 2\omega r^2 dt d\theta'$$

となります。計量の成分を読み取れば、この回転系座標 (t, r, θ', z) は定常的ですが静的でないことがわかるでしょう。しかも時計のずれは、

$$\delta t = \frac{\omega r^2 d\theta'}{1 - \omega^2 r^2}$$

となり、これは完全微分形式ではありません。実際、$r = 0$ を囲む閉経路において積分すればそれは 0 になりません。この事実は、回転系においては大域的に時計を同期できないことを意味しています。

回転系の空間計量は、

$$\gamma_{11} = 1, \quad \gamma_{22} = \frac{r^2}{1 - \omega^2 r^2,} \quad \gamma_{33} = 1 \qquad \text{(他の成分は0)}$$

と計算されます。曲率テンソルを計算すればわかりますが、この 3 次元空間は曲がっています。ニュートン理論では、回転系は運動学的にしか判別できなかったのですが、特殊相対論においては計量構造からしてローレンツ座標とは異なることに注意して下さい。

(余談) 例えばグリニッジ天文台の時計と正確に同期された時計があるとおっしゃるなら、我々はこう問うことができます。「それは西回りでですか？ それとも東回りでですか？」これは冗談ではありません。地上の静止系は回転系なのです。ただし実際には重力による慣性系のひきずり効果で、この性質はほんのわずかですが弱まります。慣性系のひきずり効果については一般相対論の章で触れます。

7.16 一方向に加速する系

ローレンツ系 (t, x, y, z) において、ある粒子が、

$$t = f(\tau), \quad x = g(\tau), \quad y = 0, \quad z = 0$$

と、x 方向に運動しているとします。ここで τ は粒子の固有時間です。よって $d\tau^2 = dt^2 - dx^2$ から $f'(\tau)^2 - g'(\tau)^2 = 1$ を得るので、

$$f'(\tau) = \cosh\theta(\tau), \quad g'(\tau) = \sinh\theta(\tau)$$

と媒介変数表示することができます。このとき、粒子の各瞬間における座標速度が、$dx/dt = g'(\tau)/f'(\tau) = \tanh\theta(\tau)$ と書けることに注意。

粒子の静止系 (x 方向の加速系) として、(t', x', y, z) を、

$$t = f(t') + x'\sinh\theta(t'), \quad x = g(t') + x'\cosh\theta(t')$$

で定義すると、線素の式として、

$$d\tau^2 = dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2 = \big(1 + \theta'(t')x'\big)^2 dt'^2 - dx'^2 - dy^2 - dz^2$$

が示せるでしょう。元のローレンツ系でみると、x' 一定の曲線に、t' 一定の直線が、ミンコフスキーの意味で常に直交する格好になっていて、それゆえ計量が対角的になっているわけです (図 7.7 参照)。しかし一般に定常的ではありません。

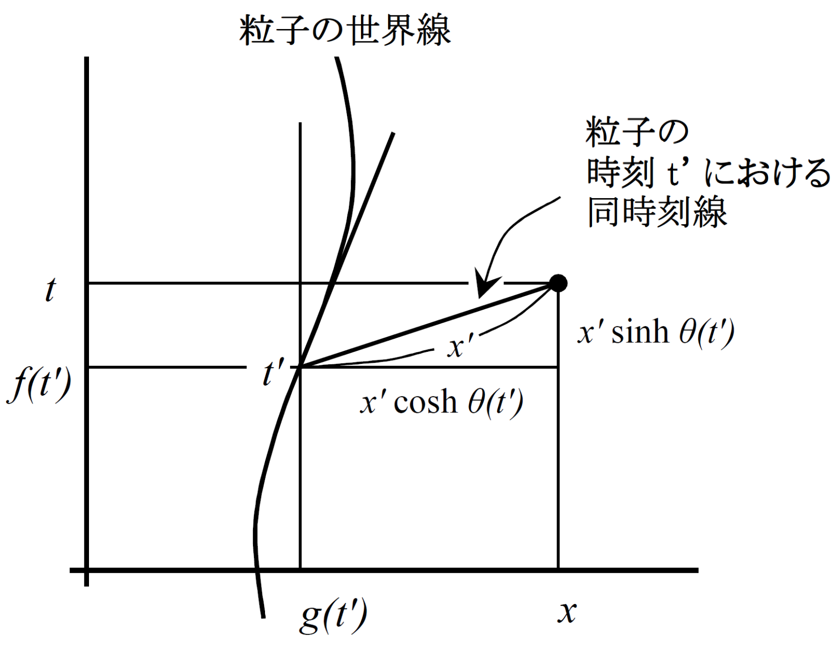

図 7.7: 一方向に加速する系

計量が定常的になる必要十分条件は、上式から、$\theta'(t')$ =一定、すなわち、

$$\theta(\tau) = a\tau + b \quad (a, b \text{ は定数})$$

ですが、このとき、

$$\frac{dt}{d\tau} = f'(\tau) = \cosh(a\tau + b), \quad \frac{dx}{d\tau} = g'(\tau) = \sinh(a\tau + b)$$

であり、これは、

$$\frac{d}{dt}\frac{dx}{d\tau} = \frac{d\tau}{dt}\frac{d^2x}{d\tau^2} = a$$

という意味で、等加速度運動を意味します $^{(*)}$。また、線素の式は、

$$d\tau^2 = (1 + ax')^2 dt'^2 - dx'^2 - dy^2 - dz^2$$

となり、このときの座標 (t', x', y, z) は**リンドラー座標**と呼ばれます。ローレンツ座標とリンドラー座標の変換式は、

$$t = (x' + a^{-1}) \sinh(at' + b) + c, \quad x = (x' + a^{-1}) \cosh(at' + b) + d$$

となります。c, d はやはり定数です。$x' =$ 一定 の曲線がローレンツ系において双曲線を成すことがわかるでしょう。

リンドラー座標にせよ、一般に一方向の加速系にせよ、遠方のどこかで $g_{00} = 0$ となり、座標が破綻してしまうことに注意してください。これは計量の非対角成分を嫌ったためです。しかし実際の計算においては、非対角成分があっても、大域的に破綻しない座標の方が便利であり、対角計量に固執する意味はありません。ここでは一般に、一方向に加速する基準系において定常かつ静的な座標が張れるのは、等加速度運動の場合に限られるという事実がわかったわけです。

(*注) $\dfrac{d}{dt}\dfrac{dx}{d\tau}$ で定義される加速度は x 方向のブーストに関して不変です。以下はその証明です。

$$\frac{d}{dt'}\frac{dx'}{d\tau} = \frac{dt}{\gamma(dt - V dx)}\frac{d}{dt}\frac{\gamma(dx - V dt)}{d\tau} = \frac{1}{1 - V\,dx/dt}\left(\frac{d}{dt}\frac{dx}{d\tau} - V\frac{d}{dt}\frac{dt}{d\tau}\right).$$

V は 2 系間の相対速度、また $\gamma = 1/\sqrt{1 - V^2}$ です。一方、$dt^2 = d\tau^2 + dx^2$ に注意して、

$$\frac{d}{dt}\frac{dt}{d\tau} = \frac{d}{dt}\sqrt{1 + \left(\frac{dx}{d\tau}\right)^2} = \frac{2\,\dfrac{dx}{d\tau}\dfrac{d}{dt}\dfrac{dx}{d\tau}}{2\sqrt{1 + (dx/d\tau)^2}} = \frac{dx}{dt}\frac{d}{dt}\frac{dx}{d\tau}$$

なので、これらから、$\dfrac{d}{dt'}\dfrac{dx'}{d\tau} = \dfrac{d}{dt}\dfrac{dx}{d\tau}$ を得ます。この性質ゆえ、$\dfrac{d}{dt}\dfrac{dx}{d\tau} =$ 一定 は相対論的な等加速度運動とみなされるわけです。

7.17 リンドラー座標における粒子の運動

ここで簡単な演習問題として、リンドラー座標における粒子の運動を考えてみましょう。そのためには粒子の運動方程式 $du^\lambda/d\tau + \Gamma^\lambda{}_{\mu\nu}u^\mu u^\nu = 0$ をリンドラー

座標の計量：

$$g_{00} = h(x) := (1+ax)^2, \quad g_{11} = g_{22} = g_{33} = -1 \quad (\text{非対角成分は}\,0\,)$$

において解けば良いのですが、特に対称性が多い問題では作用原理から保存量を見つけてしまうのが手っ取り早い方法になります。

質量 m の粒子の作用は、

$$S = -m \int d\tau = -m \int d\lambda \sqrt{g_{\mu\nu}(x)\dot{x}^\mu \dot{x}^\nu}.$$

ここでドットは世界線のパラメータ λ による微分を意味します。よって粒子のラグランジアンは $L = -m\sqrt{g_{\mu\nu}(x)\dot{x}^\mu \dot{x}^\nu}$ であり、もし計量が座標 x^ρ に依存しないなら、

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{x}^\rho} = -m g_{\rho\nu}(x)\,\frac{dx^\nu}{d\tau}$$

が保存量になります。このような座標 x^ρ は一般に**循環座標**と呼ばれます。

特にリンドラー座標では、計量が $x^1 = x$ にしか依存しないため、$x^2 = y,\ x^3 = z,\ x^0 = t$ が循環座標で、

$$A = \frac{dy}{d\tau,} \quad A' = \frac{dz}{d\tau,} \quad B = h(x)\,\frac{dt}{d\tau}$$

がそれぞれ保存量ということになります。

ここではまず x 方向の運動を考え、$y = z = 0$ を仮定しましょう。そうすると線素の式は、

$$d\tau^2 = h(x)dt^2 - dx^2$$

であり、これを dt^2 で割り、B の式を用いると、

$$\left(\frac{h(x)}{B}\right)^2 = h(x) - \left(\frac{dx}{dt}\right)^2 \quad \therefore\ \frac{dx}{dt} = \pm\sqrt{h(x)\,(1 - B^{-2}h(x))}$$

$$\therefore\ t = \pm \int \frac{dx}{\sqrt{h(x)\,(1 - B^{-2}h(x)).}}$$

$B^{-2}h(x) = \sin^2\theta$ で積分変数を θ に置換すると、

$$\begin{aligned} t &= \pm\frac{1}{a}\int \frac{d\theta}{\sin\theta} = \mp\frac{1}{a}\,\log\frac{1+\cos\theta}{\sin\theta} + F \\ &= \mp\frac{1}{a}\,\log\left(\sqrt{\frac{B^2}{h(x)}} + \sqrt{\frac{B^2}{h(x)} - 1}\right) + F. \end{aligned}$$

F は積分定数です。あるいは x の最大値を x_0 とすると、dx/dt の式から $B^2 = h(x_0)$ がわかり、このときの座標時刻を $t = t_0$ に設定して、

$$t = \mp \frac{1}{a} \log \left(\sqrt{\frac{h(x_0)}{h(x)}} + \sqrt{\frac{h(x_0)}{h(x)} - 1} \right) + t_0$$

と表すこともできます(*)。$x_0 = t_0 = 0$ の場合のグラフを図 7.8 に示します。これは原点から自由落下する粒子の世界線を意味します。

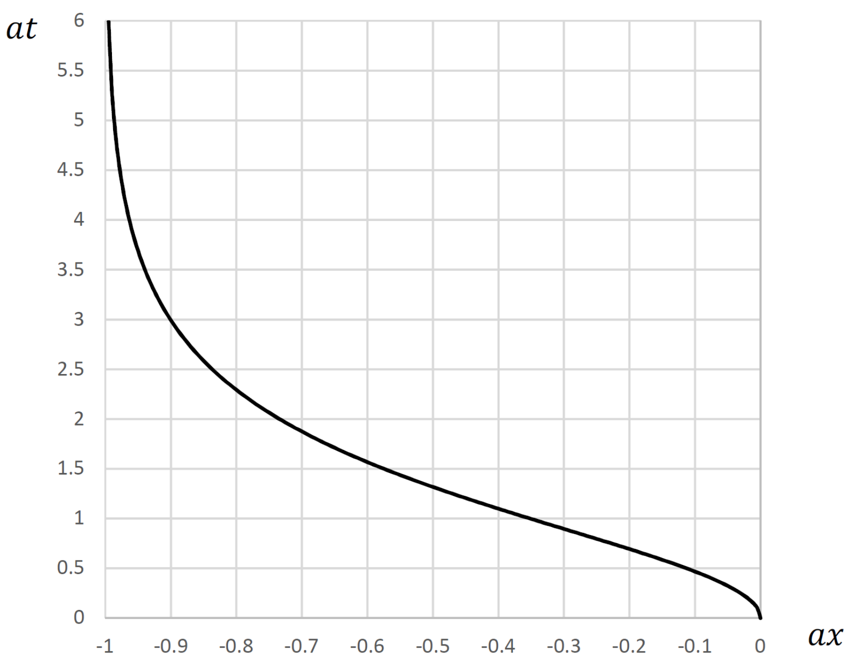

図 7.8: リンドラー座標における粒子の運動

面 $x = -a^{-1}$ では $g_{00} = 0$ となり、これは時間の凍結を意味します。このためこの面の付近では粒子の運動が非常に緩慢になり、粒子がこの面に到達するには無限の座標時間を要します (ただし粒子の固有時間では有限時間で到達する)。このような特異面は**事象の地平面**と呼ばれます。

次に x-y 平面内の運動を考え、その軌道を求めてみましょう。線素の式 $d\tau^2 = h(x)dt^2 - dx^2 - dy^2$ を dy^2 で割り、A, B の式に注意すると、

$$\frac{1}{A^2} = \frac{B^2}{A^2 h(x)} - \left(\frac{dx}{dy}\right)^2 - 1 \quad \therefore \left(\frac{dx}{dy}\right)^2 = \frac{C}{h(x)} - D$$

$$\therefore y = \pm \int dx \sqrt{\frac{h(x)}{C - Dh(x).}}$$

ここで $C = (B/A)^2 > 0,\ D = A^{-2} + 1 > 1$ はやはり定数です。この積分は素朴に

積分変数を $C - Dh(x)$ に置換すれば実行できて、

$$y = \mp \frac{1}{Da}\sqrt{C - Dh(x)} + E \qquad \therefore\ \frac{(x + a^{-1})^2}{D} + (y - E)^2 = \frac{C}{D^2 a^2}$$

を得ます。E は積分定数です。これは中心が地平面 $x = -a^{-1}$ 上にあって、x 方向に長い楕円を意味しています。ただし地平面に到達するには無限の座標時間を要するため、軌道は $x > -a^{-1}$ に限られ、半楕円になります (図 7.9)。

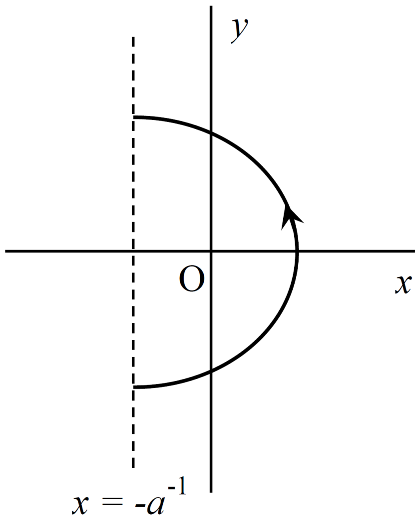

図 7.9: リンドラー座標における粒子の軌道

ちなみに、粒子でなく光の場合を考えると、それは高エネルギー極限の粒子と同様のはずで、$d\tau \to 0$ と考えればよいです。このとき A, B は共に限りなく大きくなり、D は 1 に収束します。よって軌道の式は、

$$(x + a^{-1})^2 + (y - E)^2 = \frac{C}{a^2}$$

となり、すなわち軌道は真円になります。

これら結果自体は、ローレンツ座標における直線的な世界線をリンドラー座標に変換することで、もっと簡単に確かめられますが、ここでは計算演習をかねて、循環座標に着目して運動方程式を解きました。

(*注) x について解けば、双曲線関数を用いて、$x = \dfrac{x_0 + a^{-1}}{\cosh\left(a(t - t_0)\right)} - a^{-1}$ となります。

索引