

# あもんノート

ユークリッド幾何学、ニュートン力学から、相対論、量子論、素粒子論、宇宙論、そして超ひも理論まで、理論物理学を簡潔にかつ幅広く網羅したノートです。TOP へは下の URL をクリックして行けます。専用の画像掲示板で、ご意見、ご質問等も受け付けております。

<http://amonphys.web.fc2.com/>

# 目次

第 24 章 宇宙論	3
24.1 ロバートソン・ウォーカー計量	3
24.2 フリードマン方程式とラマートル宇宙	4
24.3 ハッブルパラメータと密度パラメータ	5
24.4 赤方偏移	6
24.5 視直径と輝度	8
24.6 実際の宇宙	9
24.7 輻射のエネルギー密度	11
24.8 初期宇宙とインフレーション	12
24.9 宇宙の構造とスケール	13
24.10 キリングベクトルと一様等方空間	15
24.11 2次元の一様等方空間	17
24.12 3次元の一様等方空間	18
24.13 宇宙の全エネルギー	19

## 第24章 宇宙論

この章では一般相対論に基づく宇宙論について解説し、宇宙膨張のおおよその様子をグラフで示します。後半では、初期宇宙、宇宙の構造とスケール、一様等方空間の数学的側面について触れます。

### 24.1 ロバートソン・ウォーカー計量

銀河や銀河団が粒のように扱われる巨大なスケールにおいては、宇宙は空間的に一様等方と考えられます。この仮定は宇宙原理と呼ばれます。さらに定常性を仮定した場合、完全宇宙原理と呼ばれますが、これは観測により否定的です(例えばオルバースのパラドックス)。一様等方性を仮定したとき、一般相対論により記述される非定常的な膨張する宇宙の理論は、標準宇宙論と呼ばれます。以下では標準宇宙論について説明していきます。

一様等方空間の数学的議論は少しこみいっているので後回しにしますが、空間的に一様等方な時空の計量は、

$$d\tau^2 = dt^2 - a(t)^2 \left( \frac{d\zeta^2}{1 - \eta\zeta^2} + \zeta^2 d\theta^2 + \zeta^2 \sin^2 \theta d\phi^2 \right)$$

と書くことができ、これをロバートソン・ウォーカー計量といいます。 $a(t)$  はスケール因子と呼ばれ、宇宙時  $t$  に依存します。 $\eta$  は空間の曲率符号を意味し、 $0, \pm 1$  のいずれかです。空間座標  $(\zeta, \theta, \phi)$  は宇宙にくっついて共に動くという意味で、共動座標と呼ばれます。

リッチテンソルを計算するのは少々大変ですが、結果は、

$$R_0^0 = -\frac{3\ddot{a}}{a}, \quad R_1^1 = R_2^2 = R_3^3 = -\frac{a\ddot{a} + 2(\dot{a}^2 + \eta)}{a^2} \quad (\text{他の成分は } 0)$$

となり、アインシュタインテンソルは、

$$G_0^0 = \frac{3(\dot{a}^2 + \eta)}{a^2}, \quad G_1^1 = G_2^2 = G_3^3 = \frac{2a\ddot{a} + \dot{a}^2 + \eta}{a^2} \quad (\text{他の成分は } 0)$$

となります。ドットは宇宙時  $t$  による微分を意味します。一方、エネルギー運動量テンソルは、

$$T_\nu^\mu = \text{diag}(\rho, -P, -P, -P)_{\mu\nu}$$

であり、物質のエネルギー密度  $\rho$  と圧力  $P$  は一様性のため空間座標に依存しません。宇宙項を含むアインシュタイン方程式  $G_{\nu}^{\mu} - \lambda\delta_{\nu}^{\mu} = 8\pi GT_{\nu}^{\mu}$  は、

$$\frac{3(\dot{a}^2 + \eta)}{a^2} - \lambda = 8\pi G\rho, \quad (1)$$

$$\frac{2a\ddot{a} + \dot{a}^2 + \eta}{a^2} - \lambda = -8\pi GP \quad (2)$$

を与えますが、(2) はやや複雑なので、(1) - (2) および (1) を時間微分した式を比較して得られる、

$$a\dot{\rho} + 3\dot{a}(\rho + P) = 0 \quad (3)$$

を代わりに用います。(1)(3) および物質の状態方程式により、スケール因子  $a(t)$  の時間が発展が決まり、宇宙の膨張の様子が決まります。

(余談) 「“標準”などと称してその理論が絶対正しいかのように主張する」と、ある人、有り体にいえばトンデモな人が述べていましたが、これは逆です。“標準”は、対抗馬がある場合や、叩き台として考えられる場合に用いられる形容です。標準宇宙論の場合、「まずはこれが一番シンプルで様々な観測と整合するモデルなので、違うというなら叩いて否定してください。さもなくば我々は他のモデルには興味が持てません」ということが、共通認識としてあるわけです。

## 24.2 フリードマン方程式とラマートル宇宙

圧力(運動量流密度)が 0 とみなせる物質はダストと呼ばれます。現在の宇宙においては物質はダストとみなして良いでしょうから、 $P = 0$  とおきます。ただしこの仮定は宇宙の極めて初期においては成り立ちません。ここでは  $T_{\nu}^{\mu}$  に関し、輻射(相対論的粒子)の寄与が優勢になると考えられるからです(後述)。

(3) で  $P = 0$  とおけば、

$$\rho a^3 = U (\text{一定})$$

を得ます。そうすると(1)は、

$$\dot{a}^2 = \frac{8\pi GU}{3a} - \eta + \frac{\lambda a^2}{3}$$

となり、これをフリードマン方程式といいます。これは変数分離形の微分方程式で、解析的に解くことが可能です。

特に宇宙定数がない場合 ( $\lambda = 0$ )、フリードマン方程式の解は初等関数で表すことができ、それらは曲率  $\eta$  によって分類され、フリードマン宇宙と総称されます。例えばフラットな場合 ( $\eta = 0$ )、 $t = 0$  のとき  $a = 0$  として、

$$a = (6\pi GU)^{1/3} t^{2/3}$$

が解であり、これはアインシュタイン・ド・ジッター宇宙と呼ばれます。しかしこれらの解は後でみるように観測と合いません。

$\lambda > 0$  の場合は、 $t = 0$  のとき  $a = 0$  として、

$$t = \left(\frac{3}{\lambda}\right)^{1/2} J \left( \left(\frac{\lambda}{8\pi GU}\right)^{1/3} a ; \frac{3\eta}{\lambda^{1/3}(8\pi GU)^{2/3}} \right),$$

$$J(x; k) = \int_0^x ds \left( \frac{s}{1 - ks + s^3} \right)^{1/2}.$$

$\lambda \neq 0$  の宇宙をラマートル宇宙 (ルメートル宇宙) と総称することがあります。特に、

$$J(x; 0) = \int_0^x ds \left( \frac{s}{1 + s^3} \right)^{1/2} = \frac{2}{3} \operatorname{arcsinh} x^{3/2}.$$

これは積分変数を  $s = \sinh^{2/3} \theta$  と置換することで確かめられます。

(余談) アインシュタインは宇宙の定常性を実現するため宇宙項を導入しましたが、1929年、ハッブルにより宇宙の膨張が確認されると、「宇宙項導入は生涯最大の過ちだった」とコメントしています。しかし今日では宇宙が加速膨張していることが確かめられ、宇宙項はやはり必要であることが判明しています。最大の過ちと言ったことが最大の過ちだったのかもしれませんが。

## 24.3 ハッブルパラメータと密度パラメータ

観測と理論を比較するためには、

$$H = \frac{\dot{a}}{a}, \quad \Omega = \frac{8\pi G\rho}{3H^2}, \quad \Lambda = \frac{\lambda}{3H^2}$$

という3つの変数を導入するのが慣わしです。 $H$  はハッブルパラメータ、 $\Omega$  は物質の密度パラメータ、 $\Lambda$  は宇宙の密度パラメータと呼ばれます<sup>(\*)</sup>。 $H$  は時間の逆次元をもちますが、 $\Omega, \Lambda$  は無次元の量です。そうすると (1) は、

$$\Omega + \Lambda - 1 = \frac{\eta}{(aH)^2}$$

となります。もし  $H, \Omega, \Lambda$  の現在値  $H_0, \Omega_0, \Lambda_0$  が判明すると、この式から  $\eta$  およびスケール因子の現在値  $a_0$  が判明します。このとき、

$$8\pi GU = 8\pi G\rho_0 a_0^3 = 3\Omega_0 H_0^2 a_0^3, \quad \lambda = 3\Lambda_0 H_0^2$$

で  $U, \lambda$  が定まり宇宙のモデルが決定します。例えば  $\lambda > 0$  のとき、フリードマン方程式の解は、

$$t = \frac{1}{H_0 \sqrt{\Lambda_0}} J \left( \left(\frac{\Lambda_0}{\Omega_0}\right)^{1/3} \frac{a}{a_0} ; \frac{\Omega_0 + \Lambda_0 - 1}{(\Omega_0^2 \Lambda_0)^{1/3}} \right)$$

です。ハッブルパラメータの現在値  $H_0$  はハッブル定数と呼ばれます。

ハッブル定数のおおざっぱな意味は次の通りです。いま、観測者が原点にいるとし、観測される天体が座標  $\zeta_e$  のところに静止しているとします。このとき観測者から天体までの距離  $d_e$  は、ロバートソン・ウォーカー計量に注意し、

$$d_e = a \int_0^{\zeta_e} \frac{d\zeta}{\sqrt{1 - \eta\zeta^2}}$$

ですが、特に近隣の天体については  $d_e = a\zeta_e$ 。よって天体の後退速度は  $v_e = \dot{a}\zeta_e$  であり、これらとハッブルパラメータの定義から、現時刻において、

$$v_e = H_0 d_e$$

です。これはハッブルの法則と呼ばれ、 $H_0 > 0$  においては遠い天体ほど後退速度が大きいことを意味します。しかしこの法則は近隣の天体に限られるし、また、 $v_e$  や  $d_e$  は直接的な観測量でないため、実際にこの法則で  $H_0$  を定めることはできません。そこで以下では観測可能な量について考えていきます。

(\*注) 特に最近では、宇宙項起源のエネルギーを、真空のエネルギー、あるいはダークエネルギーなどと呼ぶので、 $\Lambda$  をダークエネルギーの密度パラメータと呼ぶことがあります。

## 24.4 赤方偏移

天体からやってくる光の波長が  $\lambda$  から  $\lambda + \Delta\lambda$  に偏移しているとき、

$$z = \frac{\Delta\lambda}{\lambda}$$

で、その天体の赤方偏移 (レッドシフト) を定義します。光の世界線においては、

$$dt^2 - \frac{a^2 d\zeta^2}{1 - \eta\zeta^2} = 0 \quad \therefore \frac{dt}{a} = \frac{|d\zeta|}{\sqrt{1 - \eta\zeta^2}}$$

ですから、座標  $\zeta_e$  にある天体が光を発した時刻を  $t_e$ 、原点において光を観測した時刻を  $t_0$  として、

$$\int_{t_e}^{t_0} \frac{dt}{a} = \omega(\zeta_e), \quad \omega(x) = \begin{cases} x & (\eta = 0) \\ \arcsin(x) & (\eta = +1) \\ \operatorname{arcsinh}(x) & (\eta = -1). \end{cases}$$

また、光の振動の1周期  $T$  だけ遅れて来る光については、観測される周期を  $T'$  として、

$$\int_{t_e+T}^{t_0+T'} \frac{dt}{a} = \omega(\zeta_e)$$

ですから、以上の2式を辺々引いて、

$$\int_{t_0}^{t_0+T'} \frac{dt}{a} - \int_{t_e}^{t_e+T} \frac{dt}{a} = 0 \quad \therefore \frac{T'}{a(t_0)} = \frac{T}{a(t_e)}.$$

一方、

$$\frac{T'}{T} = \frac{\lambda + \Delta\lambda}{\lambda} = 1 + z$$

ですから、 $a(t_0) = a_0$ ,  $a(t_e) = a_e$  と書いて、

$$1 + z = \frac{a_0}{a_e}$$

を得ます。これをここでは a-z 関係式と呼びましょう。

要するに光の波長の変化はスケール因子の変化に比例するという事です。宇宙が膨張していて  $a_0 > a_e$  なら、 $z > 0$ , つまり長波長(赤方)側が変わることに注意。赤方偏移は原子のスペクトルを基準に高い精度で観測できるため、遠い天体(遠い銀河やクェーサー)までの距離の指標として代表的なものです。

次に天体の座標  $\zeta_e$  と赤方偏移  $z$  の関係式を求めましょう。フリードマン方程式の解は、

$$t = \frac{1}{H_0\sqrt{\Lambda_0}} J(x; k), \quad J(x; k) = \int_0^x ds \left( \frac{s}{1 - ks + s^3} \right)^{1/2}$$

$$x = \frac{ra}{a_0}, \quad r = \left( \frac{\Lambda_0}{\Omega_0} \right)^{1/3}, \quad k = \frac{\Omega_0 + \Lambda_0 - 1}{(\Omega_0^2\Lambda_0)^{1/3}}$$

と表されるので、

$$\frac{dt}{dx} = \frac{1}{H_0\sqrt{\Lambda_0}} \left( \frac{x}{1 - kx + x^3} \right)^{1/2}.$$

これと  $\omega(\zeta_e) = \int_{t_e}^{t_0} \frac{dt}{a}$  より、

$$\omega(\zeta_e) = \frac{r}{a_0 H_0 \sqrt{\Lambda_0}} \int_{ra_e/a_0}^r \frac{dx}{\sqrt{x(1 - kx + x^3)}}$$

を得ますが、 $x = r/y$  で積分変数を  $y$  に置換すると、a-z 関係式に注意し、

$$\omega(\zeta_e) = \frac{1}{a_0 H_0} \int_1^{1+z} \frac{dy}{\sqrt{\Omega_0 y^3 - (\Omega_0 + \Lambda_0 - 1)y^2 + \Lambda_0}}$$

と整理されます。これをここでは -z 関係式と呼びましょう。

特に  $z \sim 0$  の付近では、上式の積分部分が、

$$z + \frac{2\Lambda_0 - \Omega_0 - 2}{4} z^2 + \dots$$

と展開され、また、 $\omega^{-1}(x) = x + O(x^3)$  であることに注意すると、

$$\zeta_e = \frac{z}{a_0 H_0} \left( 1 + \frac{2\Lambda_0 - \Omega_0 - 2}{4} z + \dots \right)$$

となります。

## 24.5 視直径と輝度

天体の直径を  $D$  としたとき、観測される天体の視直径  $\theta$  を考えます。いま、観測者が原点にいるものとし、天体の座標を  $\zeta_e$  とします。 $\zeta_e =$  一定の円周の長さは、天体が光を発した時点で  $2\pi a_e \zeta_e$  であり、円周の視直径はもちろん  $2\pi$  ですから、

$$\frac{\theta}{2\pi} = \frac{D}{2\pi a_e \zeta_e}.$$

- $z$  関係式および  $a$ - $z$  関係式を用いると、

$$\theta = \frac{DH_0}{z} \left( 1 + \frac{\Omega_0 - 2\Lambda_0 + 6}{4} z + \dots \right)$$

となります。視直径を確認でき、直径  $D$  が一定であると考えられる複数の天体（例えば同様な銀河）について  $z$  と  $\theta$  を観測し、得られる  $z$ - $\theta$  曲線をこの式と比較すれば  $H_0$  と  $\Omega_0 - 2\Lambda_0$  を決定できることとなります。

一方、視直径が確認できない天体については、天体の明るさを考えます。天体の明るさは、単位時間単位面積当たりを通過する光のエネルギーで表され、これを天体の輝度（ブライツネス）と呼び  $B$  と書きます。天文学でよく用いられる等級は、輝度の対数として表されます。

いま、天体が原点にあるとし、それを  $\zeta_e$  において観測すると考えます。 $\zeta_e$  が一定の球面の面積は、観測時  $t = t_0$  において  $4\pi(a_0 \zeta_e)^2$  です。また、やってくる光の波長は  $(1+z)$  倍に変化しているため、その振動数は  $(1+z)^{-1}$  倍に変化しています。これらに注意して、

$$B = \frac{L}{4\pi(a_0 \zeta_e)^2} \frac{1}{(1+z)^2}.$$

ここで  $L$  は天体が単位時間に放射するエネルギーを意味し、天体の光度（ルミノシティ）といいます。- $z$  関係式を代入して、

$$B = \frac{LH_0^2}{4\pi z^2} \left( 1 + \frac{\Omega_0 - 2\Lambda_0 - 2}{2} z + \dots \right)$$



を得ます。光度  $L$  が一定と考えられる複数の天体 (遠い銀河に含まれるセファイド変光星やある種の超新星) において、 $z$  と  $B$  を観測し、得られる  $z$ - $B$  曲線とこの式とを比較すれば、やはり  $H_0$  と  $\Omega_0 - 2\Lambda_0$  を決定できることになります。

ちなみに、(2) で  $P = 0$  とおいた式から、

$$\Omega - 2\Lambda = -\frac{2\ddot{a}}{aH^2}$$

を得ることができるので、 $\Omega_0 - 2\Lambda_0$  は現在におけるスケール因子の減速の度合いを示すパラメータになっています。文献によっては、

$$q = -\frac{\ddot{a}}{aH^2}$$

で減速パラメータ  $q$  を定義することがあります。

## 24.6 実際の宇宙

実際の観測によれば、

$$H_0 \sim (70 \sim 75) \text{ km/s/Mpc} \sim \frac{1}{(130 \sim 140) \text{ 億年}} \sim (1.5 \sim 1.6) \times 10^{-33} \text{ eV.}$$

および、

$$\Omega_0 - 2\Lambda_0 \sim -1.$$

$\Omega_0 - 2\Lambda_0 < 0$  は現在加速膨張をしていることを意味しています。

一方、密度パラメータ  $\Omega_0$  については、光っている物質の寄与は 0.02 くらいですが、光っていない物質であるダークマターの寄与は銀河の運動などから 0.3 くらいであろうと予想されています。しかもそのほとんどが陽子や中性子のようなバリオンでもニュートリノのような軽い粒子でもないこと<sup>(\*)</sup> がわかっています：

$$\Omega_0 \sim 0.3 \quad \text{よって} \quad \Lambda_0 \sim \frac{\Omega_0 + 1}{2} \sim 0.65.$$

$\Omega_0 + \Lambda_0 \sim 1$  は我々の観測範囲において宇宙がほとんど平らであることを意味しています。

簡単のため  $\Omega_0 = 0.3$ ,  $\Lambda_0 = 0.7$  の場合を考えると、フリードマン方程式の解は、

$$H_0 t = \frac{1}{\sqrt{0.7}} J \left( \left( \frac{7}{3} \right)^{1/3} \frac{a}{a_0}; 0 \right) = \frac{2}{3\sqrt{0.7}} \operatorname{arcsinh} \left( \sqrt{\frac{7}{3}} \left( \frac{a}{a_0} \right)^{3/2} \right)$$

$$\therefore \frac{a}{a_0} = \left( \frac{3}{7} \right)^{1/3} \sinh^{2/3} \left( \sqrt{1.575} H_0 t \right).$$

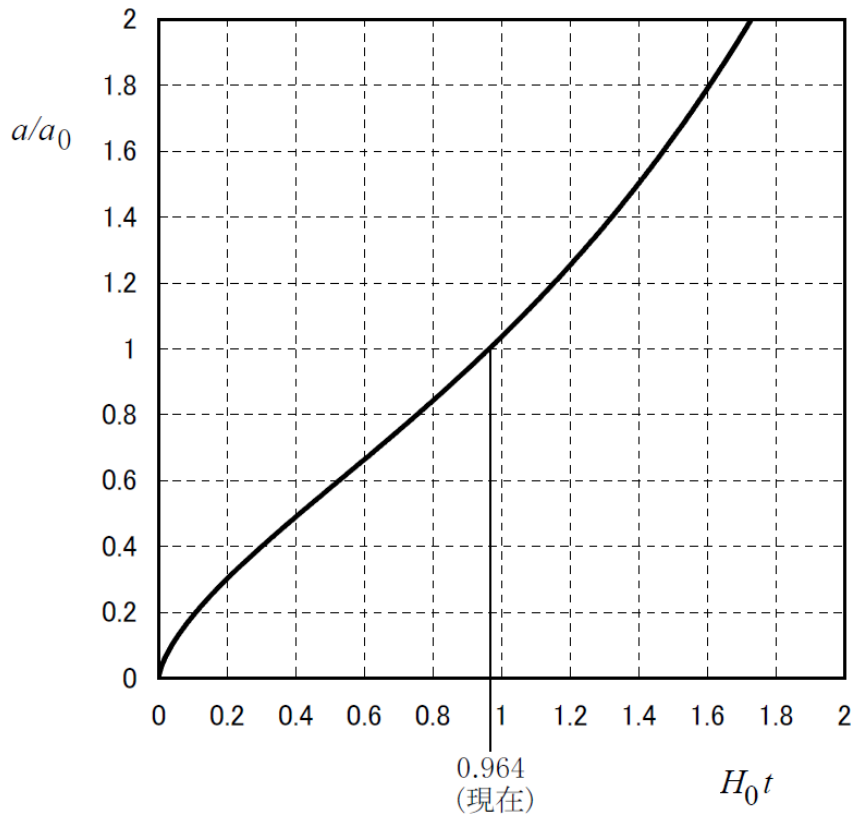


図 24.1: スケール因子の発展

グラフを図 24.1 に示します。  $a = a_0$  のとき  $H_0 t$  はほとんど 1 になるので、

$$t_0 \sim H_0^{-1} \sim (130 \sim 140) \text{ 億年}$$

がおおよそ宇宙の年齢になります。

共動座標  $\zeta_e$  の天体までの、現時刻における物理的な距離は、

$$d_e = a_0 \int_0^{\zeta_e} \frac{d\zeta}{\sqrt{1 - \eta\zeta^2}} = a_0 \omega(\zeta_e)$$

で与えられ、これを共動距離といいます。  $-z$  関係式を使えば、

$$d_e = \frac{1}{H_0} \int_1^{1+z} \frac{dy}{\sqrt{\Omega_0 y^3 - (\Omega_0 + \Lambda_0 - 1)y^2 + \Lambda_0}}$$

と書けます。粒子的地平線 ( $z \rightarrow \infty$ ) までの共動距離を  $d_h$  とすると、特に  $\Omega_0 = 0.3$ ,  $\Lambda_0 = 0.7$  の宇宙においては、

$$d_h \sim 3.31 H_0^{-1} \sim (430 \sim 465) \text{ 億光年}$$

と評価され、これが現在観測可能な宇宙の半径というわけです。この半径は時間と共に大きくなっていきます。

(\*注) ダークマターの主成分がバリオンでないことは、原子核合成の理論とクェーサーの観測の整合性に依ります。また、ニュートリノなど質量の小さい素粒子、すなわちホットダークマター (HDM) でないことは、主に銀河形成の理論に依ります。これら以外のダークマターの候補をコールドダークマター (CDM) といいますが、初期宇宙における素粒子論を考えると、CDM はむしろ存在する方が自然で、ないと仮定する方が不自然と考えられます。観測からわかることは、そのエネルギー密度が光っている物質のそれをはるかに上回るという点です。標準宇宙論は、CDM と宇宙の密度パラメータ  $\Lambda$  が宇宙の発展を決めているため、 $\Lambda$ -CDM モデルとも呼ばれます。

## 24.7 輻射のエネルギー密度

万有引力定数が自然単位系で、

$$G \sim 6.7 \times 10^{-57} \text{ eV}^{-2}$$

であることに注意すると、現在の宇宙における物質のエネルギー密度は、

$$\rho_0 = \frac{3\Omega_0 H_0^2}{8\pi G} \sim 10^{-11} \text{ eV}^4 \quad (\sim \text{核子質量}/\text{m}^3).$$

一方、宇宙の背景輻射の温度が、

$$T_0 \sim 2.7\text{K} \sim 2.3 \times 10^{-4} \text{ eV}$$

であることに注意すると、現在の宇宙における輻射のエネルギー密度は、ステファン・ボルツマンの式から、

$$\rho_{r0} = \frac{f\pi^2}{30} T_0^4 \sim f \times 10^{-15} \text{ eV}^4.$$

ここで  $f$  は輻射の内部自由度とフェルミオン因子  $7/8$  の積で、光子の寄与は 2、ニュートリノの寄与は質量が  $T_0$  より小さいものの世代数を  $n$  として  $4n \times (7/8)$  です (素粒子論と統計力学の章参照)。いずれにせよ、

$$\rho_0 \gg \rho_{r0}$$

であり、現在においては物質優勢で、物質が宇宙の膨張を支配しています。

しかしながら、物質においては  $\rho a^3 = U = \text{一定}$  だったのに対し、輻射においては、統計力学、もしくは電磁場のエネルギー運動量テンソルがトレースレス ( $T_\mu^\mu = 0$ ) であることからわかるように、状態方程式が  $P_r = \rho_r/3$  となるので、(3) から、

$$\rho_r a^4 = \text{一定}$$

がわかります。よって  $a\rho_r/\rho = \text{一定}$  です。すなわちスケール因子  $a$  が小さくなれば、輻射と物質のエネルギー密度比  $\rho_r/\rho$  は大きくなるはずで、このことから過去に輻射優勢な時代があったことがわかります。

$\rho_r/\rho$  が 1 になる時のスケール因子を  $a_1$  とおけば、

$$\frac{a_1}{a_0} = \frac{\rho_{r0}}{\rho_0} \sim f \times 10^{-4}.$$

すなわちスケール因子が現在の  $10^{-3}$  程度だった頃、宇宙は輻射優勢から物質優勢に変わったということです。 $\rho_r \propto T^4 \propto a^{-4}$  から  $T \propto a^{-1}$  なので、温度でいえば現在の  $10^3$  倍、すなわち eV の時代です。これは宇宙の晴れ上がりの時代(後述)とおよそ同じ頃です。よって我々が天体を観測できる範囲においては物質優勢の宇宙と考えてよいわけです。

## 24.8 初期宇宙とインフレーション

宇宙初期、ビッグバン直後の超高温状態では、各素粒子とその反粒子が熱平衡状態にあり、 $T^4$  則に従い多数存在してわけですが、宇宙の膨張により温度が低下すると、対消滅によりそのほとんど全てが消えてなくなり、粒子反粒子の非対称性によりわずかに残ったのが現在宇宙にある物質です。

光子とニュートリノはかつてあった熱平衡の分布が宇宙の膨張にともなって引き伸ばされた形として残り、特に光子は 2.7K に相当する背景輻射として現在観測されます。これら以外の素粒子は、弱い相互作用による崩壊、強い相互作用による凝集(核子や原子核の形成)、電磁相互作用による凝集(原子の形成)、さらには重力による凝集(星や銀河の形成)により、熱平衡状態にあったときの面影は消えうせてしまっています。現在宇宙にある原子核(バリオン)のうち、 ${}^7_3\text{Li}$  までは宇宙初期に合成されましたが、これより重い原子核はその後星の内部で作られ超新星爆発によりばらまかれたものです。

宇宙の歴史の中で、原子の形成期 ( $T \sim$  原子の電離温度  $\sim$  eV ) は観測上特に重要で、この時期、荷電粒子が飛び交うプラズマ状態から光が直進できる透明な宇宙に変わったわけで、これを宇宙の晴れ上がりといいます(英語では recombination)。我々が現在光学的に観測できる宇宙のもっとも遠方がこの晴れ上がり直後の宇宙であり、そこから来る光(電波)が背景輻射です。それより向こう(過去)はプラズマの濃い霧になっていて、その表面しか見ることはできないというわけです。粒子的地平線は古典的にはビッグバンの特異点と等価ですが、これはその霧の向こうにあります。宇宙の歴史の概略を図 24.2 に示します。

また、宇宙の極めて初期に宇宙項が優勢になり、スケール因子が指数関数的に大きくなった時代があったらうという予想があり、インフレーションと呼ばれています。インフレーションの理論は背景輻射が持つ極めて精度の高い等方性に対して自然な説明を与えます。インフレーション宇宙においては粒子的地平線が存在しないため、宇宙全体に相関があったと考えられるからです。

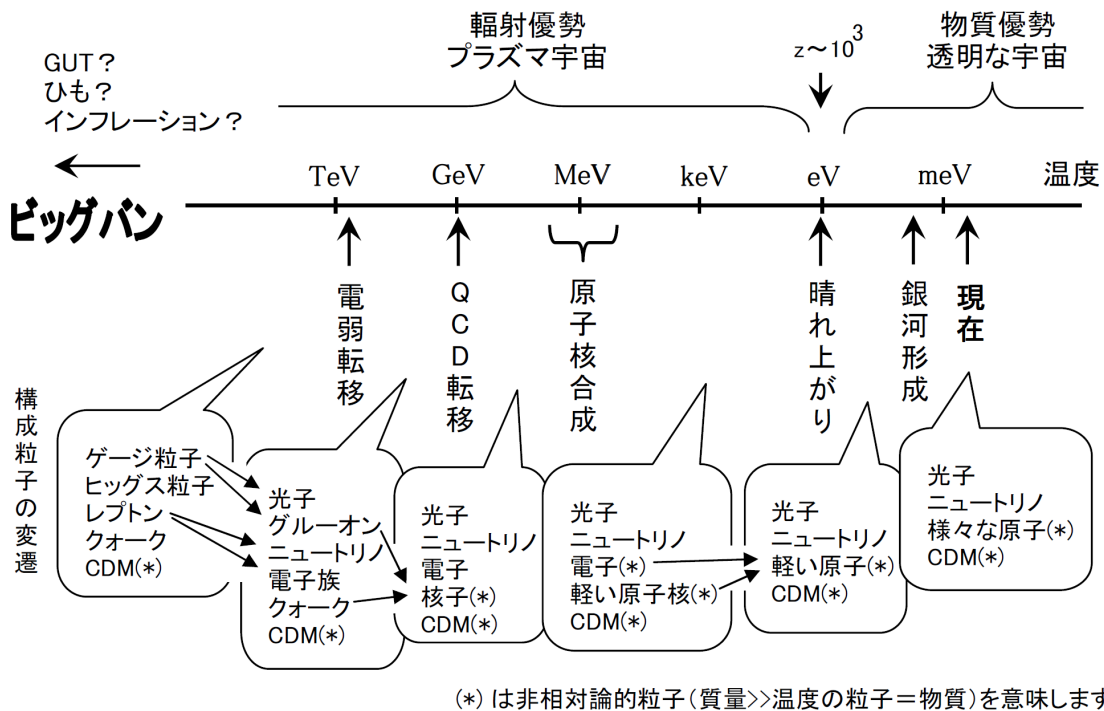


図 24.2: 宇宙の歴史

実際、宇宙定数  $\lambda$  が優勢とすると、(1) から

$$\dot{a} = \sqrt{\lambda/3} a \quad \therefore a \propto e^{\sqrt{\lambda/3} t}$$

です。よって、

$$1 + z = a_0/a_e = e^{\sqrt{\lambda/3} (t_0 - t_e)}$$

であり、地平面 ( $z \rightarrow \infty$ ) は無限の過去 ( $t_e \rightarrow -\infty$ ) ということになります。

## 24.9 宇宙の構造とスケール

ここで観測的事実による宇宙の構造とスケールについて簡単に触れておきます。

地球から月までの距離は、

約 40 万 km ~ 地球 10 周 ~ 1.3 光秒.

地球から太陽までの距離は、

約 1 億 5000 万 km ~ 1AU ~ 8 光分.

海王星の公転軌道半径は、

30AU ~ 4 光時間

であり、これが太陽系のスケールです。太陽系の質量はほとんど太陽の質量であり、

$$M_{\odot} \sim 2 \times 10^{30} \text{ kg}$$

です。

太陽にもっとも近い恒星は $\alpha$ ケンタウリと呼ばれる3重連星で、4.3光年ほどの距離にあります。もっとも明るく見える恒星はシリウスで、これは8.6光年ほどの距離にあります。夜空に肉眼で見える明るい恒星はこれらを筆頭におよそ1000光年以内の距離にあると考えていいでしょう。

2000～4000億個の恒星が集まり銀河系(天の川銀河)を作っています。銀河系の質量のオーダーは $10^{12}M_{\odot}$ 程度です。銀河系の半径は4～5万光年で、太陽系から銀河系中心までの距離はおよそ2.8万光年です。銀河系の中心にはブラックホールがあると考えられています。銀河系の公転周期はおよそ2.4億年であり、太陽系の年齢は約46億年ですから、太陽系はすでに20回程度銀河系で公転したことになります。

銀河系の近くには、大マゼラン雲、小マゼラン雲などの小さな銀河があり、太陽系からの距離で、それぞれ、16万光年、20万光年です。さらに遠くには銀河系の2倍程度の大きさをもつアンドロメダ銀河(M31)、銀河系と同程度の大きさのさんかく座銀河(M33)があります。M31までの距離はおよそ250万光年、M33までの距離は240～300万光年です。我々の銀河、M31、M33を筆頭に、他小さな銀河が多数群れていて、これを局部銀河群といいます。

局部銀河群はおとめ座超銀河団と呼ばれる銀河集団の一部です。おとめ座超銀河団の直径は約2億光年、質量は $10^{15}M_{\odot}$ 程度と考えられています。このような超銀河団がいくつか集まり、超銀河団複合体(グレートウォール、銀河フィラメント)を作っています。全体として銀河の分布には泡状(断面は網目状)のむらがあることがわかっています。超銀河団はその壁を成しているわけです。銀河の少ない部分はボイドと呼ばれます。この大規模構造のスケールは5億光年くらいになります(赤方偏移で $z \sim 0.03$ 程度)。

我々の観測範囲はおよそ430～465億光年ですから、この観測範囲において大規模構造は、小さいが無視できないスケールのゆらぎになっているわけです。もしこれより更に大きな構造のゆらぎがあり、例えば宇宙がフラクタル構造のようになっているとしたら、一様等方性はあまり良い仮定ではない可能性も考えられるわけです。

(余談) 国立天文台4次元デジタル宇宙プロジェクトによるMitakaというフリーウェアにより、宇宙を色々な角度やスケールで見ることができます。このフリーウェアはインターネットを通じて誰でも入手できます(<http://4d2u.nao.ac.jp/html/program/mitaka/>)。図24.3はMitakaにより10億光年のスケールで宇宙を表示したものです。左側は広い立体角において銀河を全て表示しているため白く塗りつぶされてしまっていますが、右側は表示している立体角が狭いため(薄切りされているため)、大規模構造の存在をうっすら見てとれます。また、特に銀河が密集しているところ

るでは局所的な重力の影響で各々の銀河固有の速度が大きくなるため、赤方偏移で測られる距離においてはそのような銀河集団は視線方向に伸びて観測されます。この現象を“神の指”といいます。図 24.3 の画像においても神の指をいくつか確認できるでしょう。

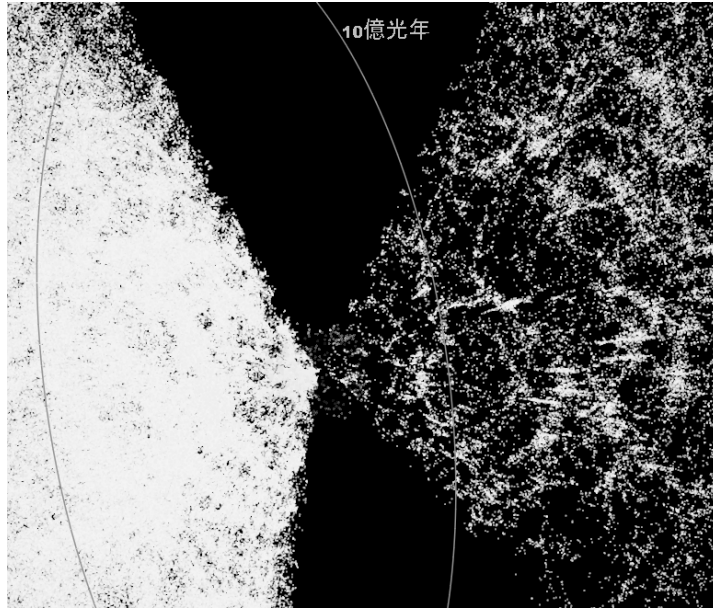


図 24.3: 大規模構造

## 24.10 キリングベクトルと一様等方空間

ここで予告通り、一様等方空間についてちゃんと説明しておきます。

一般に  $N$  次元の計量空間を考えます。無限小の座標変換  $x'^{\mu} = x^{\mu} + \xi^{\mu}(x)$  における計量の変分 (リー微分) は、

$$\delta g_{\mu\nu} = -g_{\mu\lambda}\partial_{\nu}\xi^{\lambda} - g_{\nu\lambda}\partial_{\mu}\xi^{\lambda} - \xi^{\lambda}\partial_{\lambda}g_{\mu\nu}$$

です。よってもしこの座標変換で計量が不変に保たれるなら、

$$g_{\mu\lambda}\partial_{\nu}\xi^{\lambda} + g_{\nu\lambda}\partial_{\mu}\xi^{\lambda} + \xi^{\lambda}\partial_{\lambda}g_{\mu\nu} = 0$$

が成り立ちます。これをキリング方程式といい、与えられた計量に対する解  $\xi^{\mu}(x)$  をキリングベクトルといいます。

例えばユークリッド空間においては、キリング方程式は  $\partial_{\mu}\xi^{\nu} + \partial_{\nu}\xi^{\mu} = 0$  となり、キリングベクトルは  $\xi^{\mu} = \alpha_{\mu} + \beta_{\mu\nu}x^{\nu}$  となります。ここで  $\alpha_{\mu}$  は任意の無限小パラメータで、 $\beta_{\mu\nu}$  は  $\beta_{\mu\nu} = -\beta_{\nu\mu}$  を満たす無限小パラメータです。 $\alpha_{\mu}$  の部分は、空間上の全ての点を移動させるので並進を意味します。並進において不変な計量空間は一様であるといいます。一方、 $\beta_{\mu\nu}$  の部分は原点のまわりの回転を意味します。回転において不変な計量空間は等方であるといいます。一様でかつ等方な計

量空間が一様等方空間であり、ユークリッド空間はその代表例です。ではユークリッド空間以外にはどんな一様等方空間があるのでしょうか？

一般に計量が、

$$g_{\mu\nu} = F(r)\delta_{\nu}^{\mu}, \quad r = \sqrt{x^{\mu}x^{\mu}}$$

で与えられる空間が等方であることは簡単に確かめられます。計量がこの形で与えられる座標は一般に等方座標と呼ばれます。これがさらに一様になる条件を見つけましょう。

この計量のもとで、キリング方程式は、 $\mu \neq \nu$  においては、

$$\partial_{\mu}\xi^{\nu} + \partial_{\nu}\xi^{\mu} = 0 \quad (\mu \neq \nu). \quad (4)$$

$\mu = \nu = 1$  においては、

$$2\partial_1\xi^1 F(r) + \frac{\xi^{\mu}x^{\mu}}{r}F'(r) = 0 \quad (5)$$

を与え、 $\mu = \nu = 2$  以降も同様な式が与えられるから、

$$\partial_1\xi^1 = \partial_2\xi^2 = \dots = \partial_N\xi^N \quad (6)$$

です。いま、並進のキリングベクトルとして、

$$\xi^{\mu}(x) = \alpha_{\mu} + \gamma_{\mu\rho\sigma}x^{\rho}x^{\sigma}$$

を考えると、(4)(6) から、

$$\gamma_{\mu\lambda\nu} = -\gamma_{\nu\lambda\mu} \quad (\mu \neq \nu), \quad \gamma_{1\lambda 1} = \gamma_{2\lambda 2} = \dots = \gamma_{N\lambda N} := \gamma_{\lambda}$$

を得ます。これを用いれば(5)は、

$$\frac{F'(r)}{F(r)} = -\frac{4\gamma_{\lambda}x^{\lambda}r}{\alpha_{\lambda}x^{\lambda} + \gamma_{\lambda}x^{\lambda}r^2}$$

と整理されます。左辺は  $r$  だけの関数ですから、右辺も  $r$  だけの関数のはず。そのためには  $\gamma_{\lambda} = A\alpha_{\lambda}$  であればよく ( $A$  は任意定数)、このとき上式は  $F(0) = 1$  の条件のもとで、

$$F(r) = \frac{1}{(1 + Ar^2)^2}$$

と解けます。 $\alpha_{\mu}$  はいまだ独立パラメータだから、

$$g_{\mu\nu} = \frac{1}{(1 + Ar^2)^2} \delta_{\nu}^{\mu}$$

で与えられる計量空間が一様等方です。 $A = 0$  のとき、これはユークリッド空間になることに注意して下さい。



次にこの一様等方空間のスカラー曲率を計算します。一様性からそれは空間の点に依存しないはずだから、原点付近で考えれば十分です。そこでは、

$$g_{\mu\nu} = \delta_{\nu}^{\mu}, \quad \partial_{\lambda} g_{\mu\nu} = 0, \quad \partial_{\rho} \partial_{\sigma} g_{\mu\nu} = -4A \delta_{\sigma}^{\rho} \delta_{\nu}^{\mu}$$

となることに注意し、スカラー曲率は、

$$R = 4N(N - 1)A$$

と計算されます。よって  $A$  の符号とスカラー曲率の符号は同じです。

## 24.11 2次元の一様等方空間

2次元の一様等方空間の線素の式は、等方座標で、

$$ds^2 = \frac{1}{(1 + Ar^2)^2} ((dx^1)^2 + (dx^2)^2), \quad r = \sqrt{x^i x^i}$$

ですが、 $x^1 = r \cos \phi$ ,  $x^2 = r \sin \phi$  で極座標を導入すると、

$$ds^2 = \frac{1}{(1 + Ar^2)^2} (dr^2 + r^2 d\phi^2)$$

となります。空間の曲率が正で、 $A > 0$  のときは、 $r = A^{-1/2} \tan(\theta/2)$  で座標変換し、

$$ds^2 = \frac{1}{4A} (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2)$$

を得るでしょう。これは3次元ユークリッド空間内部の2次元球面とみなすことができ、その半径は  $\rho = 1/(2\sqrt{A})$  です (リーマン幾何学の章参照)。

一方、曲率が負で、 $A < 0$  のときは、 $r = |A|^{-1/2} \tanh(\theta/2)$  で座標変換し、

$$ds^2 = \frac{1}{4|A|} (d\theta^2 + \sinh^2 \theta d\phi^2)$$

を得るでしょう。これは実は、3次元ミンコフスキー空間内部の擬球面 (双曲線を回転してできる面) とみなせます。

[証明] 3次元ミンコフスキー空間のローレンツ座標を  $(x, y, z)$  とし、線素の式を、

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 - dz^2$$

とします。この空間内部の擬球面：

$$-x^2 - y^2 + z^2 = \rho^2 \text{ (一定)}$$

を考えると、特に  $z > 0$  にある曲面は、

$$x = \rho \sinh \theta \cos \phi, \quad y = \rho \sinh \theta \sin \phi, \quad z = \rho \cosh \theta$$

と  $(\theta, \phi)$  で媒介変数表示することができ、このとき、

$$ds^2 = \rho^2 (d\theta^2 + \sinh^2 \theta d\phi^2)$$

が確かめられ、 $\rho = 1/(2\sqrt{|A|})$  で上の線素の式と一致します。[証明終]

球面が3次元ユークリッド空間における回転変換に対して不変であるのに対し、擬球面は3次元ミンコフスキー空間におけるローレンツ変換に対して不変なので、一様等方性を有していると考えられます。

(余談) 2次元負曲率の一様等方空間はロバチェフスキー空間と呼ばれ、歴史的に有名です。ユークリッド幾何学の古い公理系における第5公準の独立性(他の公理から証明も反証もされないこと)の証明に用いられた、最初の非ユークリッド幾何学だからです。特に等方座標では測地線が円を成し、エッシャーの作品「円の極限」でも利用されています。

## 24.12 3次元の一様等方空間

3次元の一様等方空間の線素の式は、等方座標で、

$$ds^2 = \frac{1}{(1 + Ar^2)^2} ((dx^1)^2 + (dx^2)^2 + (dx^3)^2), \quad r = \sqrt{x^i x^i}$$

ですが、ここで、 $x^1 = r \sin \theta \cos \phi$ ,  $x^2 = r \sin \theta \sin \phi$ ,  $x^3 = r \cos \theta$  で極座標  $(r, \theta, \phi)$  に移ると、

$$ds^2 = \frac{1}{(1 + Ar^2)^2} (dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2 \theta d\phi^2).$$

ここで  $r = A^{-1/2} \tan(\psi/2)$  などと座標変換すれば、4次元空間内の3次元球面あるいは3次元擬球面と同一視されるでしょうが、ここでは、

$$\chi = \frac{r}{1 + Ar^2}$$

で座標変換してみましよう。そうすると、

$$ds^2 = \frac{d\chi^2}{1 - 4A\chi^2} + \chi^2 d\theta^2 + \chi^2 \sin^2 \theta d\phi^2$$

を得るでしょう。さらに  $a$  を正の定数として  $\chi = a\zeta$  でスケール変換すれば、

$$ds^2 = a^2 \left( \frac{d\zeta^2}{1 - 4Aa^2\zeta^2} + \zeta^2 d\theta^2 + \zeta^2 \sin^2 \theta d\phi^2 \right).$$

$A \neq 0$  のときは特に  $a = 1 / (2\sqrt{|A|})$  と選ぶことにすれば、

$$ds^2 = a^2 \left( \frac{d\zeta^2}{1 - \eta\zeta^2} + \zeta^2 d\theta^2 + \zeta^2 \sin^2 \theta d\phi^2 \right)$$

となります。ここで  $\eta$  は  $A$  の符号、すなわち空間の曲率符号です。これがロバートソン・ウォーカー計量で用いられた空間計量であるわけです。

## 24.13 宇宙の全エネルギー

閉じた一様等方宇宙の全エネルギーは正確に 0 になります。章の最後にこのことを証明しておきましょう。

閉じた (正曲率の) 一様等方宇宙の計量は、宇宙時  $x^0$ , 等方座標  $x^i$  ( $i = 1, 2, 3$ ) において、

$$g_{00} = 1, \quad g_{11} = g_{22} = g_{33} = -\frac{1}{(1 + Ar^2)^2} \quad (r = \sqrt{x^i x^i}, A = A(x^0) > 0)$$

であり、非対角成分は 0 です。一方、重力場の寄与を含めたエネルギー密度は、

$$\sqrt{(T^0_0 + t^0_0)} = -\frac{1}{8\pi G} \partial_\lambda F^{\lambda 0}_0$$

のように書くことができ、ここで、

$$F^{\lambda 0}_0 = \frac{1}{2} \sqrt{\left( \tilde{\Gamma}^\lambda - \Gamma^\lambda + g^{\lambda 0} \Gamma_0 + \delta_0^\lambda \Gamma^0 - 2\Gamma^{\lambda 0}_0 \right)}$$

および、

$$\tilde{\Gamma}^\lambda = \Gamma^{\lambda\mu}_\mu, \quad \Gamma_\lambda = \Gamma^\mu_{\mu\lambda}, \quad \sqrt{\phantom{x}} = \sqrt{-\det g}$$

でした (一般相対論の章参照)。重力場のエネルギーを評価する際には、共動座標  $(\zeta, \theta, \phi)$  のような特異性のある座標は使えないので注意してください。

そうすると、

$$F^{00}_0 = 0$$

が簡単に確かめられるので、エネルギー密度の式は空間の全微分で表されます。よって、ある 3次元領域にあるエネルギーはその境界面の積分で表すことができますが、閉じた空間では全領域の境界が存在しないため、全エネルギーは 0 になると、素朴には考えられるでしょう。実際、宇宙のトポロジーがトーラスなら、このような考え方は正しいでしょう。しかし今の場合、 $-\infty < x^i < \infty$  であり、原点の反対側の点は座標の無限遠方になっていて、等方座標によって唯一覆われていない点です。一般に  $N \geq 2$  のとき、 $N$ 次元球面  $S^N$  を特異性のない 1つの座標で覆うことはできません。

しかし覆われていない点は高々1点なので、空間積分を広義に行うことで全エネルギーを計算できるはずです。上から、

$$F^{i0}_0 = \frac{-4Ax^i}{(1 + Ar^2)^2}$$

を示すことができるので、閉じた一様等方宇宙の全エネルギーは、

$$\begin{aligned} E &= \int d^3x \sqrt{(T^0_0 + t^0_0)} = -\frac{1}{8\pi G} \int d^3x \partial_i F^{i0}_0 = -\frac{1}{8\pi G} \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{r=R} d^2x_i F^{i0}_0 \\ &= -\frac{1}{8\pi G} \lim_{R \rightarrow \infty} \int_0^\pi d\theta \int_0^{2\pi} d\phi r \sin \theta x^i F^{i0}_0 \Big|_{r=R} = \frac{2A}{G} \lim_{R \rightarrow \infty} \frac{R^3}{(1 + AR^2)^2} = 0 \end{aligned}$$

となり、与題が示されました。

# 索引

## あ

アインシュタイン・ド・ジッター宇宙	5
一様	15
一様等方空間	16
インフレーション	12
宇宙原理	3
宇宙時	3
宇宙の晴れ上がり	12
宇宙の密度パラメータ	5
宇宙論	3
a-z 関係式	7

## か

完全宇宙原理	3
擬球面	17
輝度	8
共動距離	10
共動座標	3
曲率符号	3
キリングベクトル	15
キリング方程式	15
銀河フィラメント	14
グレートウォール	14
減速パラメータ	9
光度	8
コールドダークマター	11

## さ

真空のエネルギー	6
スケール因子	3
-z 関係式	7
赤方偏移	6

## た

ダークエネルギー	6
ダークマター	9
大規模構造	14
ダスト	4
超銀河団複合体	14
等方	15
等方座標	16

## は

背景輻射	11
ハッブル定数	6
ハッブルの法則	6
ハッブルパラメータ	5
標準宇宙論	3
輻射優勢	11
物質の密度パラメータ	5
物質優勢	11
ブライトネス	8
フリードマン宇宙	4
フリードマン方程式	4
ボイド	14
ホットダークマター	11

## ら

ラマートル宇宙	5
-CDM モデル	11
粒子的地平線	10
ルミノシティ	8
ルメートル宇宙	5
レッドシフト	6
ロバートソン・ウォーカー計量	3
ロバチェフスキー空間	18