回転フープのパラドックス

特殊相対論をよく理解している人向けのパラドックスです。思考を追う形式でわかりやすく説明します。相対論における回転系がどういうものであるかが理解できるでしょう。

パラドックス

ローレンツ系 K において、静止しているフープ A と、回転しているフープ B があり、これらは上下に重なり合っている (図1)。つまり K においてこれらフープの半径は同じである。2つのフープにはそれぞれ実寸の目盛りが刻んであり、K で考えるとフープ B の目盛りはローレンツ収縮により縮んで見えるため、一周の目盛り量、すなわちフープ B の本当の周の長さ L_B は、フープ A の周の長さ L_A より長いことがわかる: $L_B > L_A$.

次にフープ B の上に乗っている人の立場で考えます。この人にとってはフープ A の方が運動しているため、少なくとも局所的にはフープ A の目盛りが縮んで見える。しかもこの人はフープ B の何処に移動しても必ずフープ A の目盛りが縮んで見えるので、フープ A の方が自分の乗っているフープ B より長いであろうと予想する: $L_A > L_B$. しかしこの予想は明らかに上と矛盾する。はてさて!?

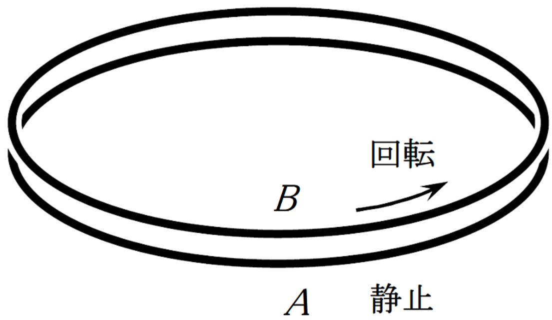

図 1: 2重フープ

ローレンツ収縮とは

とにかく回転しているフープ B に乗っている人の立場というのがくせ者です。この人にとって本当にフープ A の目盛りは縮んでいるのでしょうか? と疑いたく

なるかもしれませんね。しかしフープ B が巨大なら、この人はほとんどローレンツ系にいるので、やはり運動するフープ A の目盛りは縮んでいるはずです。

では具体的には、この人はどうやって A の目盛りが縮んでいると知るのでしょう? 見た目でしょうか? いやいや、見た目ってのは 'みかけ' のことであり、つまり光が到達するまでの時間のずれの効果があるので、基本的ではありません。とすると、ローレンツ収縮はいったい何をもって縮むといっているの? と、必然的に問題は基本的な方向へと行きますね。答えはもちろん、

> ある系で同時刻に物体の両端の位置を知ることで、その物体のその系での長さがわかる。またそうして測られた長さをもって、運動する物体は縮む (本来の長さより短く測られる) といえる。

よって必然的に "同時刻" が問題になってきます。この同時刻を考慮せずに、ローレンツ収縮もへったくれもありません。フープ B に乗っている人が離れた 2 点間の同時刻を設定していない限り、A の目盛りが縮んでいることを認識するのは不可能です。では、フープ B において同時刻を設定してみましょう。

時計の同期

フープ B は、その各部分が部屋に分かれていて、宇宙ステーション (コロニー) のようになっているとお考え下さい。そして、その各部屋には時計が置いてあります。これらの時計を合わせる (同期させる) ことを考えてみます。手始めに、ある部屋 α とその隣の部屋 β の時計を合わせてみましょう。どうします?

> 部屋 β の時計を部屋 α に持って行き、合わせた後、もとの部屋に戻す。

これはダメです。部屋 β の時計は運ぶという運動過程により部屋 α の時計とずれてしまいます。うるさいようですが、相対論的に厳密でなければ今の議論は無意味になってしまいます。じゃあ、どうしましょう?

アインシュタインが述べているように、光を往復させて時計を合わせるのがよさそうです。α の時計が時刻 t_1 を示した時、α の時計から光を発し、これを β の時計でキャッチします。その光をすぐさま α の時計に送り返し、受け取った時の α の時計の示す時刻を t_2 とします。このとき β の時計が光をキャッチした時刻が、

$$t = \frac{t_1 + t_2}{2}$$

となるように β の時計を補正すればOKです。これで 2 つの時計は正確に同期されます。

2つの時計が同期された今、フープ A の目盛りが縮んでいることを確かめるのは容易です。部屋 α の住人と部屋 β の住人が、それぞれの部屋の時計を目の前にして、あらかじめ打ち合わせた時刻に目の前を走るフープ A の目盛りを読めばいいのです。このとき、その目盛り差 (フープ A において実寸) が、2つの部屋の目盛りを読んだ2点間の距離より大きくなっているはずです。フープ A はローレンツ収縮しているだろうからです。

ではフープ B の各部屋の時計を "全て" 同期させてみればどうでしょうか? そしてあらかじめ打ち合わせた時刻に、各部屋でフープ A の目盛りを一斉に読むのです。そのデータから得られる結論は $\cdots$!?

フープ A はフープ B より長い

…ですね。隣り合う各2部屋の間でフープ A が縮んでいることになるのだから当然です。しかしこの結論はローレンツ系 K における結論と矛盾します。

問題を煮詰めてはみたものの、結局スタート地点に戻ってしまいました。しかしこの考察は無駄ではありません。今回の話のどこかに、無理な仮定が1つだけあるのですが、それが何だかわかるでしょうか? そしてこのことこそ、回転系の、ローレンツ系とは異なる、重要な特徴なのです!

大域的同期ができない

実のところ、回転系では全ての部屋の時計を同期させることはできないのです。ある部屋を起点として次々と隣の部屋の時計を同期させてゆくことは、前回の光往復の方法で可能です。しかし一回りしてきて、最後に同期させた時計を隣にある起点の時計と比較したとき、これらが同期されている保証はどこにもありません。このことは、同時刻を大域的に定義できないことを意味しています。

全ての時計を同期できない理由は、ローレンツ系 K から眺めれば自明です。フープ B 内で同期された、互いに隣り合った2つの部屋の時計は、K で眺めればずれているからです (同時刻の相対性)。このずれは、フープ B を一周することにより積み重ねられ、しかるに最後の時計と起点の時計が同期できるわけがありません。時計が大域的に同期できないのは、回転系の特徴であるといえます。

やむを得ないので、起点の部屋には時計を2つ置くことにしましょう。その片方は右隣の部屋の時計と、もう片方は左隣の部屋の時計と同期されているとします。(そしてこれら右隣と左隣の部屋の時計は、宇宙ステーションを一周するという経路において同期されている $\cdots$!) このことに留意して、あらためてフープ A の長さについて考察してみます。

フープ A の目盛りの観測を12時ジャストに行うとします。このとき起点の部屋の住人は2回観測を行わなければならないのは明らかです (そこにある2つの時計

がずれているから)。起点の部屋を0号室として、その隣を1号室、その隣を2号室と部屋番号を割り当てます。部屋が全部でn個あれば、最後の部屋が$(n-1)$号室であり、その隣はまた0号室です。

時計には部屋と同じ番号を割り当てますが、0号室にある2つ時計については、1号室と同期されている方を0番時計、$(n-1)$号室と同期されている方をn番時計と呼ぶことにします。フープ A には、目盛りの他、適当な記号が一周にわたって書いてあるとすれば、観測は、例えば図2のように行われるでしょう。

部屋番号　0　1　2　3　4　····　n-3　n-2　n-1　0

時計番号　0　1　2　3　4　····　n-3　n-2　n-1　n
　　　　　　↓　↓　↓　↓　↓　　　　↓　↓　↓　↓
観測記号　$\mathbf{s}\ \mu\ \tau\ \mathbf{B}\ \mathbf{t}\ \gamma\ \mathbf{u}\ \chi\ \mathbf{f}$　····　$\xi\ \mathbf{o}\ \phi\ \mathbf{s}\ \mu\ \tau\ \mathbf{B}$

図 2: フープの同時刻観測

下線部が重複しています。時計が大域的に同期できないため、観測が1対1対応にいかないのです。よってフープAが局所的に縮んで見えることと、フープ A がフープ B より短いこととは矛盾しないわけです。

実際、このことに基づくフープ A の長さに関する厳密な計算は、ローレンツ系 K における結果と一致します。結果はもちろん、

$$L_A = L_B\sqrt{1-(v/c)^2}$$

です。v はフープ B の回転速度、c は光の速さです。

回転系のもつ、この “大域的に同時刻が定義できない” 性質は、一般相対論においては “静的でない” と呼ばれます。また、どこかに時計を2つ用意するような座標の取り方は、数学において “カットを入れる” などと呼ばれます。これらの言葉を用いれば、

> 静的でない系において、同期された座標 (ローレンツ座標) を採用するには、どこかにカットを入れる必要がある

ということになりますが、一般相対論においては、このような場合、同期された座標を取ることを放棄するのが普通です (非対角計量の採用)。このとき運動する物体が縮む$\cdots$とは限りません。