

# あもんノート

ユークリッド幾何学、ニュートン力学から、相対論、宇宙論、量子論、場の量子論、素粒子論、そして超ひも理論まで、理論物理学を簡潔にかつ幅広く網羅したノートです。TOP へは下の URL をクリックして行けます。専用の画像掲示板で、ご意見、ご質問等も受け付けております。

<http://amonphys.web.fc2.com/>

# 目次

第 21 章	くりこみ理論	3
21.1	パラメータ公式	3
21.2	運動量積分公式	4
21.3	スカラー 4 乗模型とくりこみ因子	5
21.4	頂点関数とくりこみ条件	6
21.5	頂点関数のループ数展開	8
21.6	散乱振幅の 2 次補正	12
21.7	QED のくりこみ	13
21.8	QED の頂点関数の有限性	14
21.9	ファリーの定理	16
21.10	シュレーディンガー場のくりこみ	17

## 第21章 くりこみ理論

相対論的場の量子論の章において、摂動の高次において生じるループグラフが発散することを見ました。この章ではこれら発散の処理、すなわち、くりこみ理論について簡単に解説します。スカラー4乗模型、QED、シュレーディンガー場の量子論についてそれぞれ具体的に見ていくことにします。

### 21.1 パラメータ公式

くりこみの話の前に少し数学をやっておく必要があります。

まずは、

$$\frac{1}{ab} = \int_0^1 dx \frac{1}{(ax + b(1-x))^2}, \quad \frac{1}{abc} = \int_0^1 dx \int_0^{1-x} dy \frac{2}{(ax + by + c(1-x-y))^3}$$

といった積分公式で、ファインマンのパラメータ公式と呼ばれます。一般化した式は、

$$\frac{1}{a_1 a_2 \cdots a_n} = \int_0^1 dx_1 \cdots \int_0^1 dx_n \frac{\Gamma(n) \delta(1-x_1-\cdots-x_n)}{(a_1 x_1 + \cdots + a_n x_n)^n}$$

です。ここで  $\Gamma(n)$  はガンマ関数です。証明は以下の通り。

[証明]

$$\begin{aligned} \frac{1}{a_1 \cdots a_n} &= \int_0^\infty dt_1 \cdots \int_0^\infty dt_n e^{-(a_1 t_1 + \cdots + a_n t_n)} \\ &= \int_0^\infty dt \int_0^\infty dt_1 \cdots \int_0^\infty dt_n \delta(t - t_1 - \cdots - t_n) e^{-(a_1 t_1 + \cdots + a_n t_n)}. \end{aligned}$$

ここで  $t_i = tx_i$  で積分変数を置換し、

$$\begin{aligned} &= \int_0^\infty dt \int_0^\infty dx_1 \cdots \int_0^\infty dx_n t^n \delta(t(1-x_1-\cdots-x_n)) e^{-(a_1 x_1 + \cdots + a_n x_n)t} \\ &= \int_0^\infty dx_1 \cdots \int_0^\infty dx_n \delta(1-x_1-\cdots-x_n) \int_0^\infty dt t^{n-1} e^{-(a_1 x_1 + \cdots + a_n x_n)t} \\ &= \int_0^1 dx_1 \cdots \int_0^1 dx_n \frac{\Gamma(n) \delta(1-x_1-\cdots-x_n)}{(a_1 x_1 + \cdots + a_n x_n)^n}. \end{aligned} \quad \text{[証明終]}$$

## 21.2 運動量積分公式

次に一般的な時空次元 ( $= 2\eta$ ) における運動量積分公式です。基本となる公式は、

$$\int \frac{d^{2\eta}k}{(2\pi)^{2\eta}} \frac{1}{(a^2 - k^2 - i\epsilon)^c} = \frac{i\Gamma(c-\eta)}{(4\pi)^\eta \Gamma(c) a^{2(c-\eta)}}$$

です。ここで、 $a^2 > 0$ ,  $c \in \mathbf{Z}^+$  (正の整数),  $k^2 = k \cdot k = (k^0)^2 - |\mathbf{k}|^2$ ,  $\epsilon \rightarrow +0$ .

[証明]  $k^0 = ik_E^0$ ,  $\mathbf{k} = \mathbf{k}_E$  で積分変数を置換 (ユークリッド化) すると、

$$(\text{左辺}) = i \int \frac{d^{2\eta}k_E}{(2\pi)^{2\eta}} \frac{1}{(a^2 + k_E^2 - i\epsilon)^c}.$$

ここで  $k_E^2 = (k_E^0)^2 + |\mathbf{k}_E|^2$  です。このとき  $k_E^0$  の積分範囲は  $+i\infty \sim -i\infty$  ですが、

$$a^2 + k_E^2 - i\epsilon = (k_E^0)^2 + a'^2 - i\epsilon = (k_E^0)^2 - \left(ia' + \frac{\epsilon}{2a'}\right)^2$$

$$\text{ここで } a' = \sqrt{a^2 + |\mathbf{k}_E|^2} > 0$$

に注意すると、被積分関数の極は複素  $k_E^0$  平面の第1象限と第3象限にあることがわかります。よって図 21.1 の積分経路  $C_1$  を  $C_2$  に変形することができ、弧における積分は  $R \rightarrow \infty$  で消えるので、結果  $k_E^0$  の積分範囲を  $-\infty \sim +\infty$  に置き換えることができます。これをウィック回転といいます。

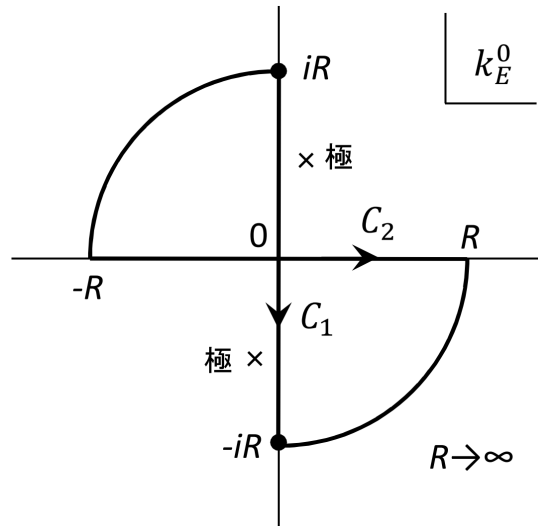


図 21.1: ウィック回転

そうすると、簡単に確かめられる関係、

$$\frac{1}{s^c} = \frac{1}{\Gamma(c)} \int_0^\infty dt t^{c-1} e^{-st} \quad (\text{Re } s > 0)$$

に注意して、

$$\begin{aligned}
(\text{左辺}) &= i \int \frac{d^{2\eta} k_E}{(2\pi)^{2\eta}} \frac{1}{\Gamma(c)} \int_0^\infty dt t^{c-1} e^{-(a^2+k_E^2)t} \\
&= \frac{i}{(2\pi)^{2\eta}\Gamma(c)} \int_0^\infty dt t^{c-1} e^{-a^2t} \int d^{2\eta} k_E e^{-k_E^2t} \\
&= \frac{i}{(2\pi)^{2\eta}\Gamma(c)} \int_0^\infty dt t^{c-1} e^{-a^2t} \left(\frac{\pi}{t}\right)^\eta \\
&= \frac{i\pi^\eta}{(2\pi)^{2\eta}\Gamma(c)} \int_0^\infty dt t^{c-\eta-1} e^{-a^2t} = \frac{i\Gamma(c-\eta)}{(4\pi)^\eta\Gamma(c)a^{2(c-\eta)}}. \quad [\text{証明終}]
\end{aligned}$$

上の運動量積分公式で、 $k^\mu \rightarrow k^\mu - b^\mu$ ,  $a^2 \rightarrow a^2 + b^2$  とすれば、

$$\int \frac{d^{2\eta} k}{(2\pi)^{2\eta}} \frac{1}{(a^2 + 2b \cdot k - k^2 - i\epsilon)^c} = \frac{i\Gamma(c-\eta)}{(4\pi)^\eta\Gamma(c)} \frac{1}{(a^2 + b^2)^{c-\eta}}.$$

これを辺々  $b^\mu$  で微分して整理すれば、

$$\int \frac{d^{2\eta} k}{(2\pi)^{2\eta}} \frac{k^\mu}{(a^2 + 2b \cdot k - k^2 - i\epsilon)^c} = \frac{i\Gamma(c-\eta)}{(4\pi)^\eta\Gamma(c)} \frac{b^\mu}{(a^2 + b^2)^{c-\eta}}.$$

同様にさらに微分して整理すれば、

$$\int \frac{d^{2\eta} k}{(2\pi)^{2\eta}} \frac{k^\mu k^\nu}{(a^2 + 2b \cdot k - k^2 - i\epsilon)^c} = \frac{i}{(4\pi)^\eta\Gamma(c)} \left( \frac{\Gamma(c-\eta)b^\mu b^\nu}{(a^2 + b^2)^{c-\eta}} - \frac{\Gamma(c-\eta-1)g^{\mu\nu}}{2(a^2 + b^2)^{c-\eta-1}} \right)$$

が得られるでしょう。これら運動量積分公式はループグラフの計算で用います。

### 21.3 スカラー4乗模型とくりこみ因子

スカラー場  $\phi(x)$  に対し、スカラー4乗模型のラグランジアン密度は、

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} (\partial\phi)^2 - \frac{m^2}{2} \phi^2 - \frac{\lambda}{4!} \phi^4$$

でした。ここで  $m$  は  $\phi$  粒子の質量、 $\lambda$  は相互作用における結合定数ですが、このように相互作用がある場合は、その影響で、質量、結合定数、さらには場のスケールがずれ、よってこれらの量は物理的に観測されるものとは一般に異なります。

そこで本来のラグランジアン密度を、改めて、

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} (\partial\phi_0)^2 - \frac{m_0^2}{2} \phi_0^2 - \frac{\lambda_0}{4!} \phi_0^4$$

のように書きます。このとき  $m_0$  を裸の質量、 $\lambda_0$  を裸の結合定数、 $\phi_0(x)$  を裸の場と呼びます。これらは物理的なものとは異なり、無限大である可能性もあります。そして次のように、くりこまれた量  $m, \lambda, \phi$  を定義します。

$$\phi_0 = \sqrt{1 + \zeta_\phi} \phi, \quad m_0^2 = \frac{1 + \zeta_m}{1 + \zeta_\phi} m^2, \quad \lambda_0 = \frac{1 + \zeta_\lambda}{(1 + \zeta_\phi)^2} \lambda.$$

$\zeta_\phi, \zeta_m, \zeta_\lambda$  をくりこみ因子といいます。このときラグランジアン密度は、

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} (\partial\phi)^2 - \frac{m^2}{2} \phi^2 + \frac{\zeta_\phi}{2} (\partial\phi)^2 - \frac{\zeta_m m^2}{2} \phi^2 - \frac{\lambda(1 + \zeta_\lambda)}{4!} \phi^4$$

となるでしょう。くりこみ因子  $\zeta_i$  ( $i = \phi, m, \lambda$ ) を含む項を相殺項といいます。



図 21.2: 頂点のグラフ

そうすると、ファインマングラフには図 21.2 のような頂点が存在することになります。(a) は 2 本の線が入る頂点で、流入する運動量を  $p^\mu$  として、

$$(a) = \frac{i}{2} (\zeta_\phi p^2 - \zeta_m m^2).$$

(b) は 4 本の線が入る頂点で、

$$(b) = -\frac{i\lambda(1 + \zeta_\lambda)}{4!}$$

です。(a) の式については、

$$\frac{\zeta_\phi}{2} (\partial\phi)^2 - \frac{\zeta_m m^2}{2} \phi^2 = \frac{1}{2} \phi (-\zeta_\phi \square - \zeta_m m^2) \phi + (\text{全微分項})$$

および、ファインマングラフの頂点において微分演算子  $\partial_\mu$  は、頂点に流入する 4 元運動量を  $p^\mu$  として  $\partial_\mu \rightarrow -ip_\mu$  となることに注意すればわかるでしょう。

(余談) 一般に相互作用系では実はツリーレベルでもこのようなくりこみの処理を行っていて、 $\phi(x)$  はくりこまれた場で、 $m$  や  $\lambda$  はくりこまれた量です。しかしツリーレベルではくりこみ因子の効果を見逃して良いので、このことをあらわに意識することはなかったわけです。

## 21.4 頂点関数とくりこみ条件

$n$  個 ( $n \geq 2$ ) の端点を持つ分離していないグラフがあって、どの内線を切ってもグラフが分離しないとき、このグラフを 1 粒子既約であるといいます。このよ

うなグラフの外線を取り除いてできるグラフを全て足したものを  $n$  点頂点関数といい、 $\Pi_{\phi^n}$  と書きます。

頂点関数はファインマングラフの重要な構成単位になります。全てのファインマングラフは頂点関数を内線で繋いだものと考えることができます。ファインマングラフを仮に自然数だとすると、頂点関数は素数のような役割を果たすわけです。

スカラー 4 乗模型の頂点関数を図 21.3 に示します。  $n$  が奇数のグラフはトポロジカルな理由により存在しないので、  $n$  が奇数のときは  $\Pi_{\phi^n} = 0$  です。

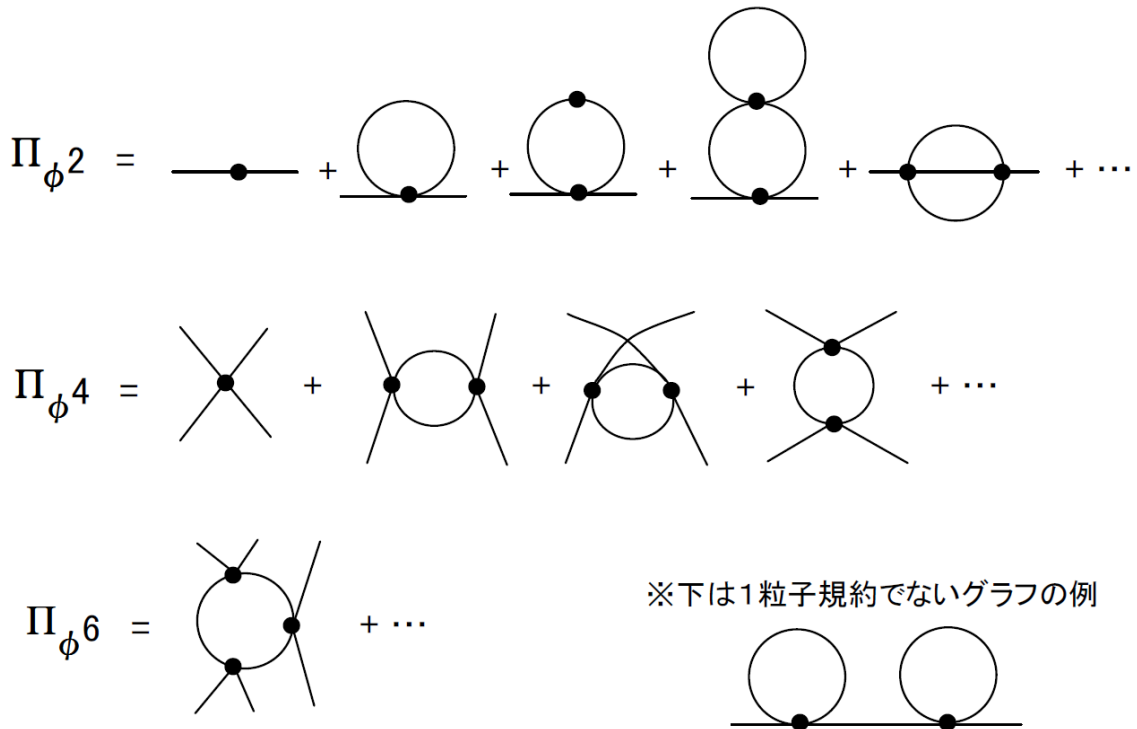


図 21.3: 頂点関数

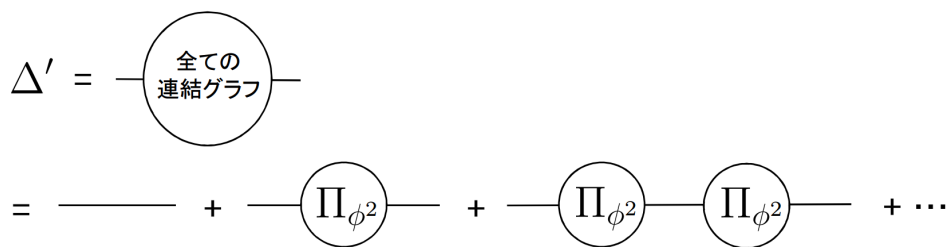


図 21.4: 相互作用の効果を含む内線

スカラー場の伝播関数の運動量表示、すなわち内線は、

$$\Delta(p) = \int d^4x \langle 0 | T \phi(x) \phi(0) | 0 \rangle e^{ip \cdot x} = \frac{i}{p^2 - m^2 + i\epsilon}$$

ですが、相互作用と相殺項の効果を含め内線  $\Delta'(p)$  を考えると、これは図 21.4 のように 2 点頂点関数を用いて展開されるので、

$$\begin{aligned}\Delta' &= \Delta + \Delta \Pi_{\phi^2} \Delta + \Delta \Pi_{\phi^2} \Delta \Pi_{\phi^2} \Delta + \cdots = \Delta \sum_{n=0}^{\infty} (\Pi_{\phi^2} \Delta)^n \\ &= \frac{\Delta}{1 - \Pi_{\phi^2} \Delta} = \frac{1}{\Delta^{-1} - \Pi_{\phi^2}} = \frac{i}{p^2 - m^2 + i\epsilon - i\Pi_{\phi^2}}\end{aligned}$$

となります。ここでもし、くりこまれた質量  $m$  や場  $\phi(x)$  が物理的なものなら、 $\Delta'(p)$  の極は  $p^2 = m^2 - i\epsilon$  にあり、その留数は  $i$  になるだろうと考えられるので、

$$\lim_{p^2 \rightarrow m^2 - i\epsilon} (p^2 - m^2 + i\epsilon) \Delta'(p) = i \quad \therefore \lim_{p^2 \rightarrow m^2} \frac{\Pi_{\phi^2}}{p^2 - m^2} = 0.$$

ここから、

$$\Pi_{\phi^2}|_{p^2=m^2} = 0, \quad \frac{\partial}{\partial p^2} \Pi_{\phi^2}|_{p^2=m^2} = 0$$

を得るでしょう。このような条件はくりこみ条件と呼ばれます。

同様に、くりこまれた結合定数  $\lambda$  が物理的なものであるという要請から、4 点頂点関数について、

$$\Pi_{\phi^4}|_{p_1^2=p_2^2=p_3^2=p_4^2=m^2} = -i\lambda$$

ですが、実は 4 点頂点関数に流れ込む運動量  $p_1^\mu, p_2^\mu, p_3^\mu, p_4^\mu$  を全て質量殻上 ( $p_i^2 = m^2$ ) においても、まだ  $p_i \cdot p_j$  に不定性が残ります。そこでここでは、4 元運動量の保存  $p_1^\mu + p_2^\mu + p_3^\mu + p_4^\mu = 0$  に注意して、

$$\mu : p_1^\mu = p_2^\mu = -p_3^\mu = -p_4^\mu = (m, \mathbf{0})$$

をくりこみ点として、

$$\Pi_{\phi^4}|_{\mu} = -i\lambda$$

というくりこみ条件を設定します。

(余談) もし別のくりこみ点を取れば、散乱振幅や断面積の計算結果は変わってくるわけですが、それは質量や結合定数をずらすことで他と一致します。質量や結合定数などの物理量は実験から決まるいわゆる入力パラメータであることを考えると、このことは本質的な違いではないわけです。ちなみに物理定数表などにある素粒子の質量や電荷の値は、無限遠方、すなわち低エネルギー極限における値を意味しています。

## 21.5 頂点関数のループ数展開

頂点関数  $\Pi_{\phi^n}$  をフルに計算することは一般には不可能なので、何らかの分類による摂動計算が必要になります。ここではループ数展開というものを採用します。つまり、グラフに含まれるループ数 (未定運動量の数) で分類し展開するわけです。

$$\Pi_{\phi^n} = \Pi_{\phi^n}^{(0)} + \Pi_{\phi^n}^{(1)} + \Pi_{\phi^n}^{(2)} + \cdots$$



$\Pi_{\phi^n}^{(0)}$  は0ループ部分、すなわちツリー部分で、 $\Pi_{\phi^n}^{(1)}$  は1ループ部分、 $\Pi_{\phi^n}^{(2)}$  は2ループ部分、以下同様です。このとき同時に、くりこみ因子  $\zeta_i$  を、1ループ相当、2ループ相当、... とみなした項で展開し、

$$\zeta_i = \zeta_i^{(1)} + \zeta_i^{(2)} + \dots$$

とします。 $\zeta_i^{(m)}$  は  $m$ ループ相当の項で、これを頂点に持つグラフは、その頂点に  $m$ ループがあるものとみなします。

そうすると、頂点関数のツリー部分と1ループ部分は図 21.5 のようになります。頂点に (1) と書いてあるのはくりこみ因子1ループ相当の項を捨てることを意味しています。また、何も書いてない頂点はくりこみ因子を含まない項を捨てることを意味します。

$$\begin{aligned} \Pi_{\phi^2}^{(0)} &= 0, & \Pi_{\phi^2}^{(1)} &= \overset{(1)}{\text{---}\bullet\text{---}} + \text{---}\bullet\text{---} \\ \Pi_{\phi^4}^{(0)} &= \text{---}\bullet\text{---} = -i\lambda \\ \Pi_{\phi^4}^{(1)} &= \overset{(1)}{\text{---}\bullet\text{---}} + \text{---}\bullet\text{---} + \text{---}\bullet\text{---} + \text{---}\bullet\text{---} \end{aligned}$$

図 21.5: ループ数展開

2点頂点関数の1ループ部分  $\Pi_{\phi^2}^{(1)}$  を考えてみましょう。それは、

$$\Pi_{\phi^2}^{(1)} = 2 \cdot \frac{i}{2} (\zeta_{\phi}^{(1)} p^2 - \zeta_m^{(1)} m^2) + \frac{4!}{2} \left( -\frac{i\lambda}{4!} \right) \int \frac{d^{2\eta}k}{(2\pi)^{2\eta}} \frac{i}{k^2 - m^2 + i\epsilon}$$

と表せます。時空の次元を  $2\eta$  としました。運動量積分公式により積分部分を計算すると、

$$I = \int \frac{d^{2\eta}k}{(2\pi)^{2\eta}} \frac{i}{k^2 - m^2 + i\epsilon} = \frac{\Gamma(1-\eta)}{(4\pi)^\eta (m^2)^{1-\eta}}$$

時空の次元は4なので、 $\eta = 2 - \epsilon$  ( $\epsilon \rightarrow 0$ ) とすると、

$$I = \frac{m^2}{16\pi^2} \Gamma(-1 + \epsilon) (4\pi)^\epsilon (m^2)^{-\epsilon}$$

ですが、ここで、

$$\Gamma(-1 + \epsilon) = \frac{\Gamma(\epsilon)}{-1 + \epsilon} = -\Gamma(\epsilon) (1 + \epsilon + O(\epsilon^2)) = -(\Gamma(\epsilon) + 1 + O(\epsilon)),$$

$$x^\epsilon = e^{\epsilon \log x} = 1 + \epsilon \log x + O(\epsilon^2)$$

に注意すれば、

$$I = -\frac{m^2}{16\pi^2} \left( \Gamma(\epsilon) + 1 + \log \frac{4\pi}{m^2} + O(\epsilon) \right)$$

と評価されるので、結局、

$$\Pi_{\phi^2}^{(1)} = i(\zeta_\phi^{(1)} p^2 - \zeta_m^{(1)} m^2) + \frac{i\lambda m^2}{32\pi^2} \left( \Gamma(\epsilon) + 1 + \log \frac{4\pi}{m^2} \right)$$

です。よってくりこみ条件から、

$$\zeta_\phi^{(1)} = 0, \quad \zeta_m^{(1)} = \frac{\lambda}{32\pi^2} \left( \Gamma(\epsilon) + 1 + \log \frac{4\pi}{m^2} \right)$$

とくりこみ因子が定まり、この結果、

$$\Pi_{\phi^2}^{(1)} = 0$$

となります。 $\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \Gamma(\epsilon)$  は無限大ですが、それがくりこみ因子  $\zeta_m^{(1)}$  からの寄与と相殺し、結果、頂点関数は有限になっていることに注意してください。ループグラフによる補正は無限大、質量の補正は無限大で、これら無限大が打ち消しあって、結果、全体の補正は有限というわけです。時空の次元を4からずらし発散する積分をいったん有限化(正則化)して計算する方法は、次元正則化と呼ばれます。

次に4点頂点関数の1ループ部分  $\Pi_{\phi^4}^{(1)}$  ですが、図21.5の第2項のループグラフは、パラメータ公式と運動量積分公式を用いて次のように計算されます。

$$\begin{aligned} & \frac{(4!)^2}{2} \left( -\frac{i\lambda}{4!} \right)^2 \int \frac{d^{2\eta}k}{(2\pi)^{2\eta}} \frac{i}{(k-p_1)^2 - m^2 + i\epsilon} \frac{i}{(k+p_3)^2 - m^2 + i\epsilon} \\ &= \frac{\lambda^2}{2} \int \frac{d^{2\eta}k}{(2\pi)^{2\eta}} \frac{1}{m^2 - (k-p_1)^2 - i\epsilon} \frac{1}{m^2 - (k+p_3)^2 - i\epsilon} \\ &= \frac{\lambda^2}{2} \int \frac{d^{2\eta}k}{(2\pi)^{2\eta}} \int_0^1 dx \frac{1}{\left( (m^2 - (k-p_1)^2 - i\epsilon)x + (m^2 - (k+p_3)^2 - i\epsilon)(1-x) \right)^2} \\ &= \frac{\lambda^2}{2} \int \frac{d^{2\eta}k}{(2\pi)^{2\eta}} \int_0^1 dx \frac{1}{\left( m^2 - xp_1^2 - (1-x)p_3^2 + 2k \cdot (xp_1 - (1-x)p_3) - k^2 - i\epsilon \right)^2} \\ &= \frac{\lambda^2}{2} \frac{i\Gamma(2-\eta)}{(4\pi)^\eta} \int_0^1 dx \frac{1}{\left( m^2 - x(1-x)(p_1+p_3)^2 \right)^{2-\eta}} \\ &= \frac{i\lambda^2}{32\pi^2} \Gamma(\epsilon) (4\pi)^\epsilon \int_0^1 dx \left( m^2 - x(1-x)(p_1+p_3)^2 \right)^{-\epsilon} \\ &= \frac{i\lambda^2}{32\pi^2} \left( \Gamma(\epsilon) + \log \frac{4\pi}{m^2} - I \left( \frac{(p_1+p_3)^2}{m^2} \right) \right). \end{aligned}$$

ここで  $I(s) = \int_0^1 dx \log(1-x(1-x)s)$ . よって、

$$\begin{aligned} \Pi_{\phi^4}^{(1)} = & -i\lambda\zeta_\lambda^{(1)} + \frac{i\lambda^2}{32\pi^2} \left( 3 \left( \Gamma(\epsilon) + \log \frac{4\pi}{m^2} \right) \right. \\ & \left. - I \left( \frac{(p_1+p_3)^2}{m^2} \right) - I \left( \frac{(p_1+p_4)^2}{m^2} \right) - I \left( \frac{(p_1+p_2)^2}{m^2} \right) \right) \end{aligned}$$

ですが、くりこみ条件  $\Pi_{\phi^4}^{(1)}|_{\mu=0} = 0$  から、 $I(0) = 0$  に注意して、

$$\zeta_\lambda^{(1)} = \frac{\lambda}{32\pi^2} \left( 3 \left( \Gamma(\epsilon) + \log \frac{4\pi}{m^2} \right) - I(4) \right)$$

とくりこみ因子が定まり、

$$\Pi_{\phi^4}^{(1)} = -\frac{i\lambda^2}{32\pi^2} \left( I \left( \frac{(p_1+p_3)^2}{m^2} \right) + I \left( \frac{(p_1+p_4)^2}{m^2} \right) + I \left( \frac{(p_1+p_2)^2}{m^2} \right) - I(4) \right)$$

を得ます。無限大である  $\Gamma(\epsilon)$  はやはりくりこみ因子により相殺しました。

6点以上の頂点関数の1ループの部分  $\Pi_{\phi^6}^{(1)}$ ,  $\Pi_{\phi^8}^{(1)}$ ,  $\dots$  が有限になることは、ループ運動量の次数を考えればわかるでしょう。

(余談) 一方で、例えばスカラー5乗模型:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} (\partial\phi)^2 - \frac{m^2}{2} \phi^2 - k\phi^5 \quad (k \text{ は定数})$$

の6点頂点関数を考えると、図21.6のグラフが対数発散し、これを相殺する相殺項もありません。すなわちスカラー5乗模型はくりこみ可能ではないわけです。結合定数  $k$  は質量次元  $-1$  であることがわかりますが、一般に結合定数が負の質量次元を持つ理論は、次元解析による分析からそのくりこみ可能性が絶望的であることが知られています。ちなみにもし図21.6の発散を相殺しようとするなら、相殺項を用意するために  $\phi^6$  の相互作用項の追加が必要です。しかしそうすると7点頂点関数や8点頂点関数が同様の理由で発散し、これを相殺するためにさらに  $\phi^7$  や  $\phi^8$  の相互作用項の追加が必要となり、このようなことは永遠に続いてしまいます。

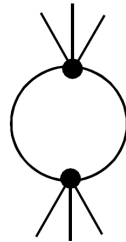


図 21.6: スカラー5乗模型の発散グラフ

## 21.6 散乱振幅の2次補正

スカラー4乗模型において  $\phi\phi \rightarrow \phi\phi$  の散乱振幅を考えると、 $\lambda$  の最低次 (1次) は図21.7(a) により与えられ、 $\mathfrak{M}^{(1)} = -i\lambda$  でした。

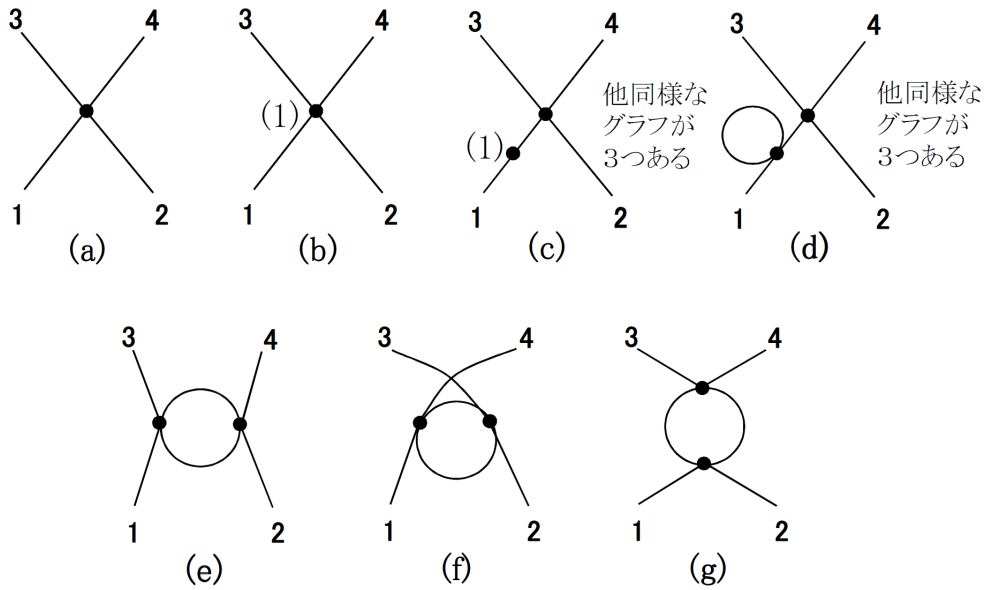


図 21.7: 散乱振幅の2次補正

$\lambda$  の2次の補正を考えると、それは図21.7(b)~(g) のグラフの和になるでしょう。これらグラフは12個ありますが、(c) と (d) は  $\Pi_{\phi^2}^{(1)} = 0$  により相殺し、残ったグラフの和はちょうど  $\Pi_{\phi^4}^{(1)}$  に相当します。ただし散乱振幅においては  $p_3^\mu$  と  $p_4^\mu$  が頂点から出て行く方向に定義されるので、散乱振幅の2次補正は、

$$\mathfrak{M}^{(2)} = -\frac{i\lambda^2}{32\pi^2} \left( I \left( \frac{(p_1-p_3)^2}{m^2} \right) + I \left( \frac{(p_1-p_4)^2}{m^2} \right) + I \left( \frac{(p_1+p_2)^2}{m^2} \right) - I(4) \right)$$

ということになります。

特に重心系においては、入射粒子の運動量を  $\pm p$ . 散乱角を  $\theta$  として、

$$\begin{aligned} (p_1-p_3)^2 &= -2|\mathbf{p}|^2(1-\cos\theta), & (p_1-p_4)^2 &= -2|\mathbf{p}|^2(1+\cos\theta), \\ (p_1+p_2)^2 &= 4(m^2 + |\mathbf{p}|^2). \end{aligned}$$

また、

$$I(s) = \int_0^1 dx \log(1-x(1-x)s) = \begin{cases} r \log \frac{r+1}{r-1} - 2 & (s < 0) \\ r \log \frac{1+r}{1-r} - 2 + i\pi r & (s \geq 4). \end{cases}$$

ここで  $r = \sqrt{1-(4/s)}$  です。これらに注意して、重心系における散乱振幅の2次補正は、

$$\mathfrak{M}^{(2)} = -\frac{i\lambda^2}{32\pi^2} \left( r_1 \log \frac{r_1+1}{r_1-1} + r_2 \log \frac{r_2+1}{r_2-1} - 4 + r_3 \log \frac{1+r_3}{1-r_3} + i\pi r_3 \right)$$

となります。ここで、

$$r_1 = \sqrt{1 + \frac{2m^2}{|\mathbf{p}|^2(1-\cos\theta)}}, \quad r_2 = \sqrt{1 + \frac{2m^2}{|\mathbf{p}|^2(1+\cos\theta)}}, \quad r_3 = \frac{|\mathbf{p}|}{\sqrt{m^2+|\mathbf{p}|^2}}.$$

計算の途中で現れる無限大はくりこみにより消え去り、有限の結果が得られました。微分断面積は、 $\lambda$  の1次においては等方的でしたが、2次の補正においては方向依存性を持つことがわかります。

## 21.7 QEDのくりこみ

次に QED のくりこみについて見ておきます。QED のラグランジアン密度は、ゲージ固定項を含めて、

$$\mathcal{L} = \bar{\psi}(i\not{\partial} - m)\psi - \frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} - \frac{1}{2\alpha} (\partial \cdot A)^2 - q A_\mu \bar{\psi} \gamma^\mu \psi$$

でした。ここでの定数と場を裸の量とみなし添字 0 を付けて表し、改めて、

$$\begin{aligned} \psi_0 &= \sqrt{1 + \zeta_\psi} \psi, & A_0^\mu &= \sqrt{1 + \zeta_A} A^\mu, & \alpha_0 &= (1 + \zeta_A) \alpha, \\ m_0 &= \frac{1 + \zeta_m}{1 + \zeta_\psi} m, & q_0 &= \frac{1 + \zeta_q}{(1 + \zeta_\psi) \sqrt{1 + \zeta_A}} q \end{aligned}$$

でくりこまれた量 (添字なし) を定義すると、

$$\begin{aligned} \mathcal{L} &= \bar{\psi}(i\not{\partial} - m)\psi - \frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} - \frac{1}{2\alpha} (\partial \cdot A)^2 \\ &\quad + \zeta_\psi \bar{\psi} i\not{\partial} \psi - \zeta_m m \bar{\psi} \psi - \frac{1}{4} \zeta_A F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} - q(1 + \zeta_q) A_\mu \bar{\psi} \gamma^\mu \psi \end{aligned}$$

のように、ラグランジアン密度に相殺項が付加されます。

これにより  $\psi\bar{\psi}$  に対応する頂点として  $i(\zeta_\psi\not{\partial} - \zeta_m m)$ 、また、

$$-\frac{i\zeta_A}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} = \frac{i\zeta_A}{2} A^\mu (-\partial_\mu \partial_\nu + g_{\mu\nu} \square) A^\nu + (\text{全微分項})$$

に注意すると、 $A^\mu A^\nu$  に対応する頂点として  $(i\zeta_A/2)(p_\mu p_\nu - g_{\mu\nu} p^2)$ 。さらに、 $\psi\bar{\psi} A^\mu$  に対応する頂点として  $-iq(1 + \zeta_q)\gamma_\mu$  が存在することがわかります。

ゲージパラメータは、くりこまれた量である  $\alpha$  を、通常 1 にとります (ファインマンゲージ)。このため裸のゲージパラメータ  $\alpha_0$  は 1 からずれることに注意してください。ゲージパラメータを導入しておく理由がここにあります。

(余談) QED くりこみの考案者は、ファインマン、シュウィンガー、朝永。次元正則化はトホーフト・ベルトマン (1972) によります。

## 21.8 QED の頂点関数の有限性

QED の頂点関数で、1 ループにおいて発散の危険性があるものはまずは図 21.8 に示す 3 つです。これらがきちんと有限になることを見ておきましょう。

最初に  $\Pi_{\psi\bar{\psi}}^{(1)}$  ですが、第 1 項は  $i(\zeta_{\psi}^{(1)}\not{p} - \zeta_m^{(1)}m)$ , 第 2 項のループグラフは、

$$\int \frac{d^{2\eta}k}{(2\pi)^{2\eta}} (-iq\gamma_{\mu}) \frac{-ig^{\mu\nu}}{i\epsilon} (-1)\text{tr} \left( (-iq\gamma_{\nu}) \frac{i(\not{k} + m)}{k^2 - m^2 + i\epsilon} \right)$$

であり、非常に特異性の強いグラフですが、 $\not{k}$  の項は奇関数の積分であることから消え、そうすると  $\text{tr}(\gamma_{\nu}) = 0$  であることからこの式は 0 であるとわかります。一方、第 3 項のループグラフは、パラメータ公式と運動量積分公式を用いて、

$$\begin{aligned} & \int \frac{d^{2\eta}k}{(2\pi)^{2\eta}} (-iq\gamma_{\mu}) \frac{i(\not{p} - \not{k} + m)}{(p-k)^2 - m^2 + i\epsilon} (-iq\gamma_{\nu}) \frac{-ig^{\mu\nu}}{k^2 + i\epsilon} \\ &= -2q^2 \int \frac{d^{2\eta}k}{(2\pi)^{2\eta}} \int_0^1 dx \frac{\not{k} - \not{p} + 2m}{((m^2 - p^2)x + 2xp \cdot k - k^2 - i\epsilon)^2} \\ &= \frac{iq^2}{16\pi^2} \Gamma(\epsilon)(\not{p} - 4m) + O(1) \end{aligned}$$

と評価されます。ここで  $O(1)$  は  $\epsilon$  の 0 次以上の項、すなわち  $\epsilon \rightarrow 0$  で有限に留まる項です。よって、

$$\zeta_{\psi}^{(1)} = -\frac{q^2}{16\pi^2} \Gamma(\epsilon) + O(1), \quad \zeta_m^{(1)} = -\frac{q^2}{4\pi^2} \Gamma(\epsilon) + O(1)$$

とすることにより  $\Pi_{\psi\bar{\psi}}^{(1)}$  は有限になります。

次に  $\Pi_{A^{\mu}A^{\nu}}^{(1)}$  ですが、第 1 項は  $i\zeta_A^{(1)}(p_{\mu}p_{\nu} - g_{\mu\nu}p^2)$ , 第 2 項のループグラフは、

$$\begin{aligned} & \int \frac{d^{2\eta}k}{(2\pi)^{2\eta}} (-1)\text{tr} \left( (-iq\gamma_{\mu}) \frac{i(\not{k} + m)}{k^2 - m^2 + i\epsilon} (-iq\gamma_{\nu}) \frac{i(\not{k} - \not{p} + m)}{(k-p)^2 - m^2 + i\epsilon} \right) \\ &= -4q^2 \int \frac{d^{2\eta}k}{(2\pi)^{2\eta}} \int_0^1 dx \frac{2k_{\mu}k_{\nu} - g_{\mu\nu}k^2 - p_{\mu}k_{\nu} - p_{\nu}k_{\mu} + g_{\mu\nu}p \cdot k + g_{\mu\nu}m^2}{(m^2 - xp^2 + 2xp \cdot k - k^2 - i\epsilon)^2} \\ &= \frac{iq^2}{12\pi^2} \Gamma(\epsilon)(p_{\mu}p_{\nu} - g_{\mu\nu}p^2) + O(1) \end{aligned}$$



と評価されます<sup>(\*)</sup>。よって、

$$\zeta_q^{(1)} = -\frac{q^2}{16\pi^2} \Gamma(\epsilon) + O(1)$$

とすることで  $\Pi_{\psi\bar{\psi}A^\mu}^{(1)}$  は有限になるわけです。

この他、 $\Pi_{A^\mu A^\nu A^\lambda}^{(1)}$  や  $\Pi_{A^\mu A^\nu A^\rho A^\sigma}^{(1)}$  など発散する危険性がありそうに見えますが、 $\Pi_{A^\mu A^\nu A^\lambda}^{(1)}$  は図 21.9 に示すフェルミオンの三角ループグラフ 2 つから成り、これらは相殺し消えてしまいます (後述)。一方、 $\Pi_{A^\mu A^\nu A^\rho A^\sigma}^{(1)}$  は  $3! = 6$  つの四角ループグラフ (ボックスグラフ) からなり、やはり有限になることが知られています。頂点が 5 個以上あるフェルミオンループはループ運動量の次数を考えればわかるように、収束します。

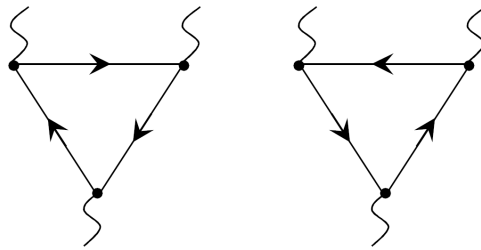


図 21.9: 三角ループグラフ

(\*注) ここでの計算には、

$$\int \frac{d^{2\eta}k}{(2\pi)^{2\eta}} \frac{k^\mu k^\nu}{(k^2 + i\epsilon)(k^2 - m^2 + i\epsilon)^2} = \frac{i\Gamma(\epsilon)g^{\mu\nu}}{64\pi^2} + O(1)$$

という積分公式を用いるのがとっとり早いです。証明ですが、この積分を  $I^{\mu\nu}$  とすると、 $I^{\mu\nu} = Cg^{\mu\nu}$  と書けるはずですが、このとき、

$$I_\mu^\mu = 2\eta C = \int \frac{d^{2\eta}k}{(2\pi)^{2\eta}} \frac{1}{(k^2 - m^2 + i\epsilon)^2} = \frac{i\Gamma(\epsilon)}{16\pi^2} + O(1)$$

が運動量積分公式からすぐにわかります。よって  $C = \frac{i\Gamma(\epsilon)}{64\pi^2} + O(1)$  です。

## 21.9 ファリーの定理

一般に QED においては、正の奇数  $n$  に対し、電磁場の  $n$  点頂点関数の 1 ループ補正は正確に 0 になります。これをファリーの定理といいます。

証明ですが、まず電磁カレント  $j^\mu(x) = \bar{\psi}(x)\gamma^\mu\psi(x)$  が荷電共役変換  $C$  に対して、 $(j^\mu(x))^C = Cj^\mu(x)C^{-1} = -j^\mu(x)$  と符号を変えること、および  $C|0\rangle = |0\rangle$  に注意すると、正の奇数  $n$  に対し、

$$\langle 0|Tj^{\mu_1}(x_1)j^{\mu_2}(x_2)\cdots j^{\mu_n}(x_n)|0\rangle = 0 \quad (*)$$



がわかります。なぜなら左辺は、カレントとカレントの間、およびカレントと真空の間に  $C^{-1}C = 1$  を挟めば、 $n$  が奇数のとき符号が変わるからです。

$n = 1$  のとき (\*) は、

$$\langle 0|T\bar{\psi}(x)\gamma^\mu\psi(x)|0\rangle = 0 \quad \therefore \text{tr}(\gamma^\mu\Delta(0)) = 0.$$

ここで、

$$\Delta(x-x') = \langle 0|T\psi(x)\bar{\psi}(x')|0\rangle = \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{i(\not{k} + m)}{k^2 - m^2 + i\epsilon} e^{-ik\cdot(x-x')}$$

はフェルミオンの伝播関数です。この結果はすでに  $\Pi_{\psi\bar{\psi}}^{(1)}$  の第2項の評価で見た通りです。

$n = 3$  のとき (\*) は、

$$\langle 0|T\bar{\psi}(x_1)\gamma^{\mu_1}\psi(x_1)\bar{\psi}(x_2)\gamma^{\mu_2}\psi(x_2)\bar{\psi}(x_3)\gamma^{\mu_3}\psi(x_3)|0\rangle = 0$$

ですが、ウィックの定理で展開し、 $n = 1$  の結果に注意すれば、

$$\begin{aligned} & \text{tr}(\gamma^{\mu_1}\Delta(x_1-x_2)\gamma^{\mu_2}\Delta(x_2-x_3)\gamma^{\mu_3}\Delta(x_3-x_1)) \\ & + \text{tr}(\gamma^{\mu_1}\Delta(x_1-x_3)\gamma^{\mu_3}\Delta(x_3-x_2)\gamma^{\mu_2}\Delta(x_2-x_1)) = 0 \end{aligned}$$

を得ます。左辺はちょうど  $\Pi_{A^{\mu_1}A^{\mu_2}A^{\mu_3}}^{(1)}$ 、すなわち三角ループグラフ2つの和(その空間表示)に比例していて、それが0だというわけです。

以下、 $n = 5, n = 7, \dots$  においても同様のことを示すことができ、よってファリーの定理がいえます。

## 21.10 シュレーディンガー場のくりこみ

最後に非相対論的な場の量子論であるシュレーディンガー場の量子論のくりこみについて見ておきましょう。

シュレーディンガー場を  $\psi(x)$  として、作用は、

$$S = \int d^4x \psi^\dagger(x) \left( i\partial_t + \frac{1}{2m} \Delta \right) \psi(x).$$

$m$  は粒子の質量を意味します。場の方程式、および正準交換関係(フェルミオンの場合は反交換関係)は、

$$\left( i\partial_t + \frac{1}{2m} \Delta \right) \psi(x) = 0, \quad [\psi_s(x), \psi_{s'}^*(x')]_{t=t'} = \delta_{ss'}\delta^3(\mathbf{r}-\mathbf{r}')$$

となり、他は同時刻(反)可換です。一般解は、

$$\psi_s(x) = \int \frac{d^3\mathbf{k}}{(2\pi)^3} c_s(\mathbf{k}) e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r} - i\epsilon(\mathbf{k})t}, \quad \epsilon(\mathbf{k}) = \frac{|\mathbf{k}|^2}{2m}$$

となり、ここで、

$$[c_s(\mathbf{k}), c_{s'}^*(\mathbf{k}')] = (2\pi)^3 \delta_{ss'} \delta^3(\mathbf{k} - \mathbf{k}').$$

他は(反)可換です。伝播関数は、

$$\begin{aligned} \langle 0 | T \psi_s(x) \psi_{s'}^*(x') | 0 \rangle &= \theta(t-t') \langle 0 | \psi_s(x) \psi_{s'}^*(x') | 0 \rangle \\ &= \int \frac{d\omega}{2\pi i} \frac{1}{\omega - i\epsilon} e^{i\omega(t-t')} \delta_{ss'} \int \frac{d^3\mathbf{k}}{(2\pi)^3} e^{i\mathbf{k}\cdot(\mathbf{r}-\mathbf{r}') - i\epsilon(\mathbf{k})(t-t')} \\ &= \int \frac{d\omega d^3\mathbf{k}}{(2\pi)^4} \frac{i\delta_{ss'}}{-\omega + i\epsilon} e^{i\mathbf{k}\cdot(\mathbf{r}-\mathbf{r}') - i(\epsilon(\mathbf{k}) - \omega)(t-t')} \\ &= \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{i\delta_{ss'}}{k^0 - \epsilon(\mathbf{k}) + i\epsilon} e^{-ik\cdot(x-x')} \end{aligned}$$

のように計算されます。途中、 $k^0 = \epsilon(\mathbf{k}) - \omega$  で積分変数を置換しました。よってファインマングラフにおける粒子の内線は、粒子の4元運動量を  $(k^0, \mathbf{k})$  として、 $i\delta_{ss'}/(k^0 - \epsilon(\mathbf{k}) + i\epsilon)$  です。

以上の自由場の理論に次の相互作用項を付加します。

$$S_I = -V \int d^4x \psi^\dagger(x) \psi(x) - \frac{1}{2} \int d^4x d^4x' G(x-x') \psi^\dagger(x) \psi(x) \psi^\dagger(x') \psi(x').$$

ここで  $V$  は定数の外部ポテンシャルを意味します。また、自己相互作用としてクーロン力だけがあるとし、

$$G(x) = \frac{q^2 \delta(t)}{4\pi |\mathbf{r}|} = \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{q^2}{|\mathbf{k}|^2} e^{-ik\cdot x}$$

とします。 $q$  は粒子の電荷を意味します。このときファインマングラフには図 21.10 に示す2つの頂点が存在し、それぞれ、

$$(a) = -iV \delta_{s_1 s_2}, \quad (b) = \frac{-iq^2}{|\mathbf{k}|^2} \delta_{s_1 s_2} \delta_{s_3 s_4}$$

ということになります。ここで  $\mathbf{k}$  は点線部(仮想光子)の運動量を意味します。

外部ポテンシャル  $V$  をループ数で展開し、 $V = V^{(1)} + V^{(2)} + \dots$  としましょう。そうすると、2点頂点関数の1ループ部分  $\Pi_{\psi\psi^*}^{(1)}$  は図 21.11 のように与えられますが、簡単のためスピン0のボゾンの場合を考えると、第1項は  $-iV^{(1)}$ 、第2項は、

$$\frac{-iq^2}{|\mathbf{0}|^2} \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{i}{k^0 - \epsilon(\mathbf{k}) + i\epsilon} = \frac{-iq^2}{2|\mathbf{0}|^2} \int \frac{d^3\mathbf{k}}{(2\pi)^3}.$$

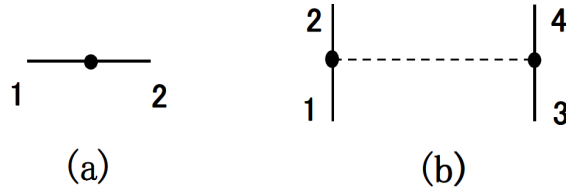


図 21.10: シュレーディンガー場の頂点

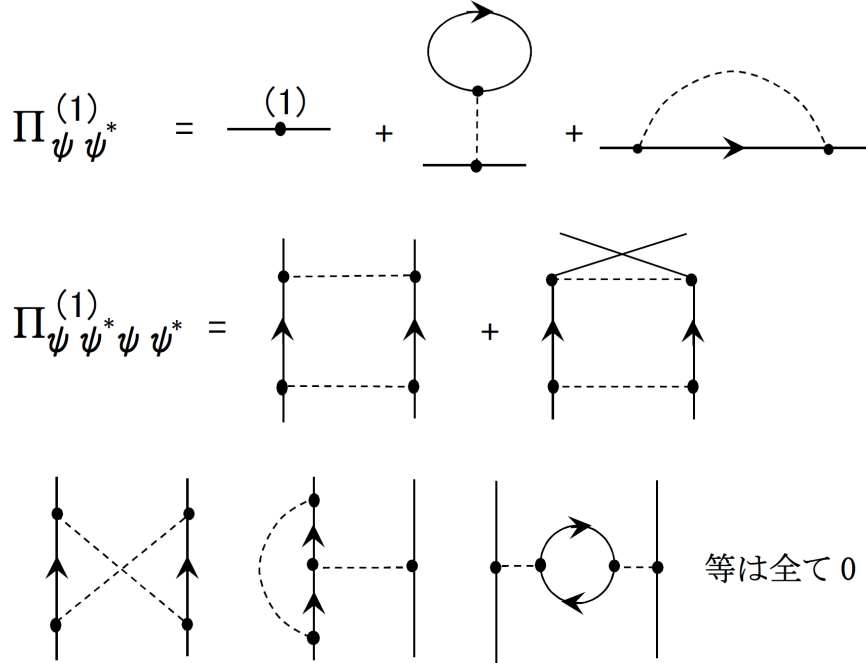


図 21.11: シュレーディンガー場の頂点関数

第3項は、流入する運動量を  $p$  として、

$$\int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{i}{k^0 - \epsilon(\mathbf{k}) + i\epsilon} \frac{-iq^2}{|\mathbf{k} - \mathbf{p}|^2} = \frac{-iq^2}{2} \int \frac{d^3 \mathbf{k}}{(2\pi)^3} \frac{1}{|\mathbf{k}|^2}$$

と評価されます。ここで簡単に確かめられる積分公式：

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{x - ia} = \begin{cases} +i\pi & (a > 0) \\ -i\pi & (a < 0) \end{cases}$$

を用いて、それぞれの  $k^0$  積分を実行しました。第2項と第3項は共に無限大ですが、これらを  $V^{(1)}$  によりくりこんで、

$$\Pi_{\psi\psi^*}^{(1)} = 0$$

とおくことができます。第2項も第3項も流入する4元運動量  $(p^0, \mathbf{p})$  に依存しないため、恒等的に上式を仮定でき、くりこみ点の概念は必要ありません。これは非相対論的な場の量子論の特徴といえます。

4点頂点関数  $\Pi_{\psi\psi^*\psi\psi^*}^{(1)}$  については、ループに沿って内線が同じ向きになるグラフが、

$$\int dk^0 \frac{1}{k^0 + A + i\epsilon} \frac{1}{k^0 + B + i\epsilon}$$

$$= \frac{1}{B - A} \int dk^0 \left( \frac{1}{k^0 + A + i\epsilon} - \frac{1}{k^0 + B + i\epsilon} \right) = 0$$

という機構により全て消えるので、図21.11に示すように2つの梯子グラフだけから成り、これらは有限であることが確かめられます。

QED がくりこみ可能であれば、その近似理論であるシュレーディンガー場の量子論(+クーロン相互作用)がくりこみ可能である必要はないわけですが、このように少なくとも1ループにおいてはくりこみが可能で、正しい補正計算を行うことができるわけです。

# 索引

あ	
1 粒子既約	6
ウィック回転	4
運動量積分公式	4
か	
くりこみ因子	6
くりこみ条件	8
くりこみ点	8
くりこみ理論	3
さ	
次元正則化	10
相殺項	6
た	
頂点関数	7
は	
裸の結合定数	6
裸の質量	6
裸の場	6
パラメータ公式	3
ファインマンのパラメータ公式	3
ファリーの定理	16
や	
ユークリッド化	4
ら	
ループ数展開	8