あもんノート

ユークリッド幾何学、ニュートン力学から、相対論、量子論、素粒子論、宇宙論、そして超ひも理論まで、理論物理学を簡潔にかつ幅広く網羅したノートです。TOP へは下の URL をクリックして行けます。専用の画像掲示板で、ご意見、ご質問等も受け付けております。

http://amonphys.web.fc2.com/

目 次

第6章　リーマン幾何学

リーマン幾何学は一般的な空間を記述するための数学です。特別な場合に従来のユークリッド幾何学に帰着します。特殊相対論はミンコフスキー空間を、一般相対論は曲がった時空を前提とするため、いずれにせよリーマン幾何学の理解が必須になります。表記法の紹介もかねてここにまとめておきます。

6.1　計量空間

N 次元の空間 (多様体) 上に隣接した 2 点を考え、それらの座標を、順に、x^μ, $x^\mu + dx^\mu$ $(\mu = 1, 2, \cdots, N)$ とします。座標の添字を上に付けるのは慣習で、累乗の意味ではありません。このとき 2 点間の**微小距離** ds が、

$$ds^2 = g_{\mu\nu}(x) dx^\mu dx^\nu, \quad ds \geq 0$$

で与えられるとします。縮約規則を用いています。場 $g_{\mu\nu} = g_{\mu\nu}(x)$ を**計量**といいます。一般性を失うことなく、対称性：

$$g_{\mu\nu} = g_{\nu\mu}$$

を仮定できるので、これを仮定します。このようにして距離の概念が導入された空間は、一般に**計量空間**と呼ばれます。

計量の成分は座標の取り方によって変わりますが、空間の全体で定数になるとき、すなわち $\partial g_{\mu\nu}/\partial x^\lambda = 0$ のとき、この座標を**直線座標**といいます。直線座標でない座標を**曲線座標**といいます。直線座標を取ることができる空間を**平ら** (flat) であるといいます。特に $g_{\mu\nu} = \delta^\mu_\nu$ を採用できる空間は、**ユークリッド空間**と呼ばれ、このときの座標を**デカルト座標**といいます。ここで δ^μ_ν はクロネッカーデルタです。デカルト座標は直線座標であり、よってユークリッド空間は平らということになります。

計量 $g_{\mu\nu}$ の逆行列を、添字を上付きにして $g^{\mu\nu}$ と表します：

$$g_{\mu\nu} g^{\nu\lambda} = \delta^\lambda_\mu.$$

いま、適当な上付き添字を持つ量 A^μ があるとき、計量を用いて、

$$A_\mu = g_{\mu\nu} A^\nu$$

で下付き添字の量 A_μ を定義します。この式の両辺に $g^{\lambda\mu}$ をかければ、左辺は $g^{\lambda\mu}A_\mu$. 右辺は $g^{\lambda\mu}g_{\mu\nu}A^\nu = \delta^\lambda_\nu A^\nu = A^\lambda$ となるので、

$$A^\lambda = g^{\lambda\mu}A_\mu.$$

よって一般に下付き添字は上付き添字の計量をかけることで上付き添字に戻せます。これらの操作を**添字の上げ下げ**といいます。添字の位置が定義と異なる場合、暗黙にこの操作を行ったものと理解して下さい。

6.2 一般座標の例

一例として、2 次元ユークリッド空間を考え、デカルト座標を (x, y) とします。

$$x' = x - ay, \quad y' = y \qquad (a \text{ は定数})$$

で**斜交座標** (x', y') を定義すると、微小距離の式は、

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 = (dx' + ady')^2 + dy'^2 = dx'^2 + (1 + a^2)dy'^2 + 2a\,dx'dy'$$

ですから、$x^1 = x',\ x^2 = y'$ という対応において、斜交座標の計量は、

$$g_{11} = 1, \quad g_{22} = 1 + a^2, \quad g_{12} = g_{21} = a$$

となります。この計量は座標に依存しないので、斜交座標は直線座標というわけです。

また、3 次元ユークリッド空間を考え、デカルト座標を (x, y, z) とします。

$$x = r\sin\theta\cos\phi, \quad y = r\sin\theta\sin\phi, \quad z = r\cos\theta,$$

$$0 \le r < \infty, \quad 0 \le \theta \le \pi, \quad 0 \le \phi < 2\pi$$

で 3 次元極座標 (r, θ, ϕ) を定義すると、微小距離の式は、

$$\begin{aligned} ds^2 &= dx^2 + dy^2 + dz^2 \\ &= \quad (\sin\theta\cos\phi\,dr + r\cos\theta\cos\phi\,d\theta - r\sin\theta\sin\phi\,d\phi)^2 \\ &\quad + (\sin\theta\sin\phi\,dr + r\cos\theta\sin\phi\,d\theta + r\sin\theta\cos\phi\,d\phi)^2 \\ &\quad + (\cos\theta\,dr - r\sin\theta\,d\theta)^2 \\ &= dr^2 + r^2d\theta^2 + r^2\sin^2\theta\,d\phi^2 \end{aligned}$$

と計算されるので、$x^1 = r,\ x^2 = \theta,\ x^3 = \phi$ という対応において、極座標の計量は、

$$g_{11} = 1, \quad g_{22} = r^2, \quad g_{33} = r^2\sin^2\theta \qquad (\text{他の成分は} 0)$$

となります。この計量は座標に依存しているので、極座標は曲線座標というわけです。

計量の非対角成分 ($\mu \neq \nu$ における $g_{\mu\nu}$) が全て 0 になる座標は、**直交座標**と呼ばれます。上の例において、極座標は直交座標ですが、斜交座標 ($a \neq 0$) は直交座標でないことがわかります。デカルト座標は直交座標です。

いま、3 次元ユークリッド空間の中に埋め込まれた半径 r の 2 次元球面を考えると、この 2 次元空間は、3 次元極座標における 2 つの角度変数 (θ, ϕ) により張られ、微小距離の式は、

$$ds^2 = r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2\theta\, d\phi^2 \qquad (r \text{ は定数})$$

ということになります。(θ, ϕ) は 2 次元**球面座標**と呼ばれます (図 6.1)。

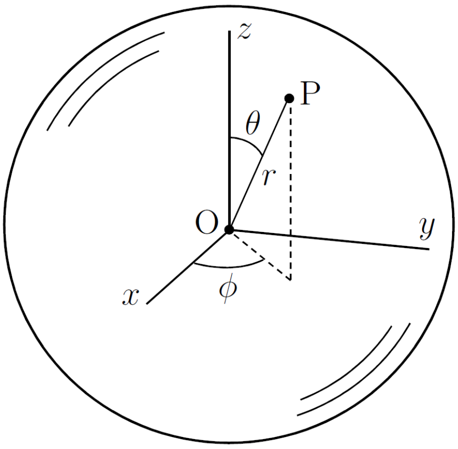

図 6.1: 2 次元球面座標

(余談) 2 次元球面に 2 次元のデカルト座標を張ることは不可能であることが章の最後で証明されます。すなわち 2 次元球面は非ユークリッド空間の簡単な一例です。

6.3 テンソル

一般座標変換を考えると、座標微分 dx^μ は、偏微分の性質から、

$$dx'^\mu = \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\nu}\, dx^\nu$$

という変換則に従います。また、座標微分演算子 $\partial_\mu = \partial/\partial x^\mu$ は、

$$\partial'_\mu = \frac{\partial x^\nu}{\partial x'^\mu}\, \partial_\nu$$

という変換則に従います。そこで一般に、

$$T'^{\mu\nu\cdots}{}_{\lambda\cdots} = \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\rho} \frac{\partial x'^\nu}{\partial x^\sigma} \cdots \frac{\partial x^\kappa}{\partial x'^\lambda} \cdots T^{\rho\sigma\cdots}{}_{\kappa\cdots}$$

という変換則に従う量 $T^{\mu\nu\cdots}{}_{\lambda\cdots}$ を**テンソル**と呼びます。特に添字が1つの場合、それが上付きなら**反変ベクトル**、下付きなら**共変ベクトル**と呼びます。座標微分 dx^μ は反変ベクトルです。添字を持たないテンソルは不変量を意味することになりますが、これは**スカラー**と呼ばれます。微小距離 ds は座標に依らない不変量なのでスカラーです。

テンソル同士の積は再びテンソルになります。例えば、テンソル $A^{\mu\nu}$, B_ν があって、これらをかけあわせ、$C^\mu = A^{\mu\nu}B_\nu$ を定義します。いうまでもなく、この式の右辺は添字 ν について和を取るわけですが、このような添字の対は上下に現れるように配置されているものとします。このとき、

$$\begin{aligned}C'^\mu = A'^{\mu\nu}B'_\nu &= \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\rho}\frac{\partial x'^\nu}{\partial x^\sigma}A^{\rho\sigma}\frac{\partial x^\lambda}{\partial x'^\nu}B_\lambda = \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\rho}\frac{\partial x^\lambda}{\partial x^\sigma}A^{\rho\sigma}B_\lambda \\ &= \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\rho}\delta^\lambda_\sigma A^{\rho\sigma}B_\lambda = \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\rho}A^{\rho\sigma}B_\sigma = \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\rho}C^\rho\end{aligned}$$

ですから、確かに C^μ はテンソルです。これを**積の定理**といいます。逆に C^μ, B_ν がテンソルなら $A^{\mu\nu}$ がテンソルであることも証明できます。これを**商の定理**といいます。

商の定理と計量の定義から、計量 $g_{\mu\nu}$ はテンソルです：

$$g'_{\mu\nu} = \frac{\partial x^\rho}{\partial x'^\mu}\frac{\partial x^\sigma}{\partial x'^\nu}g_{\rho\sigma}.$$

このため計量は、計量テンソルとも呼ばれます。さらに、

$$\delta^\nu_\mu = \frac{\partial x^\rho}{\partial x'^\mu}\frac{\partial x'^\nu}{\partial x^\sigma}\delta^\sigma_\rho$$

が成立するため、クロネッカーデルタ δ^ν_μ もテンソルです。このことと商の定理から上付き添字の計量 $g^{\mu\nu}$ もテンソルであることがわかります。また、積の定理と添字の上げ下げの規則から、テンソルの添字を上げ下げして得られる量が、再びテンソルになることもわかるでしょう。

6.4 共変微分と接続係数

スカラー場 $\phi(x)$ の座標微分 $\partial_\mu\phi$ を作ると、これは共変ベクトルになります：

$$\partial'_\mu\phi' = \frac{\partial x^\nu}{\partial x'^\mu}\partial_\nu\phi.$$

しかし反変ベクトル $A^\mu(x)$ の座標微分はテンソルになりません：

$$\partial'_\mu A'^\nu = \frac{\partial x^\rho}{\partial x'^\mu}\partial_\rho\left(\frac{\partial x'^\nu}{\partial x^\sigma}A^\sigma\right) = \frac{\partial x^\rho}{\partial x'^\mu}\frac{\partial x'^\nu}{\partial x^\sigma}\partial_\rho A^\sigma + \frac{\partial x^\rho}{\partial x'^\mu}\frac{\partial^2 x'^\nu}{\partial x^\rho\partial x^\sigma}A^\sigma.$$

第2項があるためこれはテンソルではないわけです。そこでこの第2項を打ち消すような新しいベクトルの座標微分を次のように定義します :

$$\nabla_\mu A^\nu = \partial_\mu A^\nu + \Gamma^\nu{}_{\lambda\mu} A^\lambda.$$

∇_μ を**共変微分** (演算子) といい、$\Gamma^\nu{}_{\lambda\mu}$ を**接続係数**あるいは**クリストッフェル記号**といいます。接続係数がしかるべき変換をすることで、$\nabla_\mu A^\nu$ がテンソルになると考えるわけです。このため接続係数はテンソルではあり得ません。接続係数の変換式を求めてみましょう。

共変微分の式はダッシュ系において $(\nabla_\mu A^\nu)' = \partial'_\mu A'^\nu + \Gamma'^\nu{}_{\lambda\mu} A'^\lambda$. よって、

$$\frac{\partial x^\rho}{\partial x'^\mu}\frac{\partial x'^\nu}{\partial x^\sigma}\nabla_\rho A^\sigma = \frac{\partial x^\rho}{\partial x'^\mu}\partial_\rho\left(\frac{\partial x'^\nu}{\partial x^\sigma}A^\sigma\right) + \Gamma'^\nu{}_{\lambda\mu}\frac{\partial x'^\lambda}{\partial x^\sigma}A^\sigma$$

$$\therefore\ \frac{\partial x^\rho}{\partial x'^\mu}\frac{\partial x'^\nu}{\partial x^\sigma}\left(\partial_\rho A^\sigma + \Gamma^\sigma{}_{\lambda\rho}A^\lambda\right) = \frac{\partial x^\rho}{\partial x'^\mu}\frac{\partial x'^\nu}{\partial x^\sigma}\partial_\rho A^\sigma + \frac{\partial x^\rho}{\partial x'^\mu}\frac{\partial^2 x'^\nu}{\partial x^\rho \partial x^\sigma}A^\sigma + \Gamma'^\nu{}_{\lambda\mu}\frac{\partial x'^\lambda}{\partial x^\sigma}A^\sigma.$$

左辺の括弧を展開すると、第1項は右辺第1項と相殺し、第2項においては添字 σ, λ を入れ換えて、

$$\frac{\partial x^\rho}{\partial x'^\mu}\frac{\partial x'^\nu}{\partial x^\lambda}\Gamma^\lambda{}_{\sigma\rho}A^\sigma = \frac{\partial x^\rho}{\partial x'^\mu}\frac{\partial^2 x'^\nu}{\partial x^\rho \partial x^\sigma}A^\sigma + \Gamma'^\nu{}_{\lambda\mu}\frac{\partial x'^\lambda}{\partial x^\sigma}A^\sigma$$

となります。A^σ は任意のベクトルであり、全ての項に共通なので消すことができ、

$$\frac{\partial x'^\lambda}{\partial x^\sigma}\Gamma'^\nu{}_{\lambda\mu} = \frac{\partial x^\rho}{\partial x'^\mu}\frac{\partial x'^\nu}{\partial x^\lambda}\ \Gamma^\lambda{}_{\sigma\rho} - \frac{\partial x^\rho}{\partial x'^\mu}\frac{\partial^2 x'^\nu}{\partial x^\rho \partial x^\sigma}.$$

辺々に $\partial x^\sigma / \partial x'^\kappa$ を乗じて、

$$\Gamma'^\nu{}_{\kappa\mu} = \frac{\partial x'^\nu}{\partial x^\lambda}\frac{\partial x^\sigma}{\partial x'^\kappa}\frac{\partial x^\rho}{\partial x'^\mu}\Gamma^\lambda{}_{\sigma\rho} - \frac{\partial x^\sigma}{\partial x'^\kappa}\frac{\partial x^\rho}{\partial x'^\mu}\frac{\partial^2 x'^\nu}{\partial x^\sigma \partial x^\rho}$$

を得ます。これが接続係数の変換式で、右辺第2項の存在により、接続係数はテンソルではないわけです。ただし線形変換に限って考えれば、あたかもテンソルのように変換されることもわかります。

6.5 一般のテンソルの共変微分

一般のテンソルの共変微分を作るために、次の要請をします :

- スカラーの共変微分は座標微分と等価 : $\nabla_\mu \phi = \partial_\mu \phi$.
- ライプニッツ則 : $\nabla_\mu (AB) = (\nabla_\mu A)B + A\nabla_\mu B$.

例えば A^ν と B_ν を共にベクトルとすると $A^\nu B_\nu$ はスカラーだから、要請より、

$$\nabla_\mu(A^\nu B_\nu) = \partial_\mu(A^\nu B_\nu).$$

この式の左辺は、共変微分のライプニッツ則の要請と反変ベクトルの共変微分の式から、$(\partial_\mu A^\nu + \Gamma^\nu{}_{\lambda\mu}A^\lambda)B_\nu + A^\nu\nabla_\mu B_\nu$. 一方、右辺は $(\partial_\mu A^\nu)B_\nu + A^\nu\partial_\mu B_\nu$ となるので、

$$\Gamma^\nu{}_{\lambda\mu}A^\lambda B_\nu + A^\nu\nabla_\mu B_\nu - A^\nu\partial_\mu B_\nu = 0.$$

後ろ2項の添字 ν を λ に取り替えれば A^λ をくくり出せて、A^λ は任意だから、

$$\nabla_\mu B_\lambda = \partial_\mu B_\lambda - \Gamma^\nu{}_{\lambda\mu}B_\nu$$

を得ます。これが共変ベクトルの共変微分です。

2階テンソル $C^{\mu\nu}$ についてはA$^\mu$, B^ν を共にベクトルとして、$C^{\mu\nu} = A^\mu B^\nu$ とおけば、やはり共変微分の公式を作れます。このようにして、結果、一般に次のようになります：

$$\begin{aligned}\nabla_\mu T^{\nu\rho\cdots}{}_{\sigma\cdots} = \partial_\mu T^{\nu\rho\cdots}{}_{\sigma\cdots} + \Gamma^\nu{}_{\lambda\mu}T^{\lambda\rho\cdots}{}_{\sigma\cdots} + \Gamma^\rho{}_{\lambda\mu}T^{\nu\lambda\cdots}{}_{\sigma\cdots}\cdots \\ - \Gamma^\lambda{}_{\sigma\mu}T^{\nu\rho\cdots}{}_{\lambda\cdots}\cdots .\end{aligned}$$

添字の位置がややこしいですが、よく眺めると簡単な規則性があります。テンソルでない量の共変微分は定義されません。

6.6 リーマン空間とテンソル定理

空間に直線座標が張れるなら、その座標において接続係数は0に定義されるのが普通で、これを**自然な接続**といいます。

任意の点の近傍で局所的に直線座標が採用でき、このときその点において接続係数が0になると仮定された計量空間は、**リーマン空間**と呼ばれます。すなわちリーマン空間とは、座標変換により、任意の1点で $\partial_\lambda g_{\mu\nu} = 0$ かつ $\Gamma_{\lambda\mu\nu} = 0$ を実現できる空間です。例えばユークリッド空間に埋め込まれた空間はリーマン空間とみなすことができます。以下、リーマン空間について考えていきます。

あるテンソルがあって、それが $\partial_\lambda g_{\mu\nu}$ や $\Gamma_{\lambda\mu\nu}$ をあらわに (微分なしで) 含む項だけに展開できるとき、そのテンソルは全空間で0です。なぜなら仮定から、任意の1点でそのテンソルが0になるような座標を選ぶことができますが、テンソルの変換性から、ある座標で0ならばどの座標でもそれは0になるはずです。このことは空間上の全ての点についていえるので、そのテンソルは恒等的に0であるとわかります。これを**テンソル定理**と呼びましょう。

6.7 計量条件と計量接続空間

計量はテンソルなので、その共変微分を考えることができます。それは、

$$\begin{aligned}\nabla_\lambda g_{\mu\nu} &= \partial_\lambda g_{\mu\nu} - \Gamma^\rho{}_{\mu\lambda} g_{\rho\nu} - \Gamma^\rho{}_{\nu\lambda} g_{\mu\rho} \\ &= \partial_\lambda g_{\mu\nu} - \Gamma_{\nu\mu\lambda} - \Gamma_{\mu\nu\lambda}\end{aligned}$$

となります。テンソル定理からこれは 0 です：

$$\nabla_\lambda g_{\mu\nu} = 0 \quad \text{すなわち} \quad \partial_\lambda g_{\mu\nu} = \Gamma_{\mu\nu\lambda} + \Gamma_{\nu\mu\lambda}.$$

これは**計量条件**と呼ばれます。計量条件は、計量が共変微分に対して "定数なみ" であることをいっています。

次にスカラー場 ϕ の 2 階共変微分を考えましょう。$\nabla_\nu \phi = \partial_\nu \phi$ が共変ベクトルであることに注意して、

$$\nabla_\mu \nabla_\nu \phi = \partial_\mu \partial_\nu \phi - \Gamma^\lambda{}_{\nu\mu} \partial_\lambda \phi.$$

この式の添字 μ, ν を交換した式を考え、この式から引くと、偏微分は可換だから、

$$(\nabla_\mu \nabla_\nu - \nabla_\nu \nabla_\mu)\phi = (\Gamma^\lambda{}_{\mu\nu} - \Gamma^\lambda{}_{\nu\mu})\partial_\lambda \phi.$$

テンソル定理からこれは 0 で、$\partial_\lambda \phi$ は任意だから、

$$\Gamma_{\lambda\mu\nu} = \Gamma_{\lambda\nu\mu}$$

がいえます。すなわち接続係数は後ろの 2 つの添字について対称です。

計量条件の式 (後式) の添字をサイクリックに入れ換えた式を 2 つ作り、それらの和から元の式を引き、接続係数の対称性に注意すれば、

$$\Gamma_{\lambda\mu\nu} = \frac{1}{2}\left(-\partial_\lambda g_{\mu\nu} + \partial_\nu g_{\lambda\mu} + \partial_\mu g_{\nu\lambda}\right)$$

を得ます。これがリーマン空間における**接続係数の式**です。計量だけから接続係数を導くことができる空間を、一般に**計量接続空間**といいます。リーマン空間は計量接続空間の一例です。

(余談) リーマン空間の仮定をせず、計量条件だけを仮定した計量空間は、**リーマン・カルタン空間**と呼ばれます。リーマン・カルタン空間では接続係数の添字の対称性が成り立たず、このため接続係数を計量だけで書き表すことができなくなります。すなわちリーマン・カルタン空間は計量接続空間ではありません。このような空間には "**捩れ**" と呼ばれる構造があると考えられ、スピノルを含む重力理論、例えば超重力理論などではこのような時空が仮定されます。

6.8 リーマンテンソル

反変ベクトル A^ρ の 2 階共変微分の式を作ってみましょう。$\mu\nu$ の対称項を随時まとめて、

$$
\begin{aligned}
\nabla_\mu \nabla_\nu A^\rho &= \partial_\mu \nabla_\nu A^\rho - \Gamma^\lambda{}_{\nu\mu} \nabla_\lambda A^\rho + \Gamma^\rho{}_{\lambda\mu} \nabla_\nu A^\lambda \\
&= \partial_\mu (\partial_\nu A^\rho + \Gamma^\rho{}_{\lambda\nu} A^\lambda) + \Gamma^\rho{}_{\lambda\mu} (\partial_\nu A^\lambda + \Gamma^\lambda{}_{\sigma\nu} A^\sigma) + (\ \mu\nu \text{ の対称項}) \\
&= \partial_\mu \Gamma^\rho{}_{\lambda\nu} A^\lambda + \Gamma^\rho{}_{\lambda\mu} \Gamma^\lambda{}_{\sigma\nu} A^\sigma + (\ \mu\nu \text{ の対称項}) \\
&= (\partial_\mu \Gamma^\rho{}_{\sigma\nu} + \Gamma^\rho{}_{\mu\lambda} \Gamma^\lambda{}_{\nu\sigma}) A^\sigma + (\ \mu\nu \text{ の対称項}).
\end{aligned}
$$

よって $\mu\nu$ を交換した式と差をとれば、

$$
\begin{aligned}
&(\nabla_\mu \nabla_\nu - \nabla_\nu \nabla_\mu) A^\rho = R^\rho{}_{\sigma\mu\nu} A^\sigma, \\
&R^\rho{}_{\sigma\mu\nu} = \partial_\mu \Gamma^\rho{}_{\sigma\nu} + \Gamma^\rho{}_{\mu\lambda} \Gamma^\lambda{}_{\nu\sigma} - (\ \mu\nu \text{ を交換した項})
\end{aligned}
$$

を得ます。商の定理から $R^\rho{}_{\sigma\mu\nu}$ はテンソルで、これを**リーマンテンソル**と呼びます。

直線座標においては明らかにリーマンテンソルは 0 になります。テンソル性を加味すれば、直線座標を張ることのできる空間においてはリーマンテンソルは全空間で 0 になります。対偶をとれば、リーマンテンソルが 0 でない空間には直線座標を張れない、すなわちその空間は平らでなく曲がっているということです。この意味で、リーマンテンソルは**曲率テンソル**とも呼ばれます。

リーマンテンソルの最初の添字を下付きにすれば、

$$
\begin{aligned}
R_{\rho\sigma\mu\nu} = g_{\rho\lambda} R^\lambda{}_{\sigma\mu\nu} &= g_{\rho\lambda} \partial_\mu \Gamma^\lambda{}_{\sigma\nu} + g_{\rho\lambda} \Gamma^\lambda{}_{\mu\tau} \Gamma^\tau{}_{\nu\sigma} - (\mu\nu\text{交換}) \\
&= \partial_\mu \Gamma_{\rho\sigma\nu} - (\partial_\mu g_{\rho\lambda}) \Gamma^\lambda{}_{\sigma\nu} + \Gamma_{\rho\mu\tau} \Gamma^\tau{}_{\nu\sigma} - (\mu\nu\text{交換}) \\
&= \frac{1}{2}\, \partial_\mu (-\partial_\rho g_{\sigma\nu} + \partial_\nu g_{\rho\sigma} + \partial_\sigma g_{\nu\rho}) \\
&\qquad - (\Gamma_{\rho\lambda\mu} + \Gamma_{\lambda\rho\mu}) \Gamma^\lambda{}_{\sigma\nu} + \Gamma_{\rho\mu\lambda} \Gamma^\lambda{}_{\nu\sigma} - (\mu\nu\text{交換}) \\
&= -\frac{1}{2}\, \partial_\mu \partial_\rho g_{\sigma\nu} + \frac{1}{2}\, \partial_\mu \partial_\sigma g_{\rho\nu} - \Gamma_{\lambda\rho\mu} \Gamma^\lambda{}_{\sigma\nu} - (\mu\nu\text{交換}).
\end{aligned}
$$

この式を注意深く眺めれば、次の対称性がわかるでしょう：

$$
R_{\rho\sigma\mu\nu} = -R_{\rho\sigma\nu\mu} = -R_{\sigma\rho\mu\nu} = R_{\mu\nu\rho\sigma}, \qquad R_{\rho\sigma\mu\nu} + R_{\rho\nu\sigma\mu} + R_{\rho\mu\nu\sigma} = 0.
$$

これら対称性のため、リーマンテンソルの独立な成分はみかけほどは多くありません。n 次元の場合、少なくとも左式より、$R_{\rho\sigma\mu\nu}$ は ρ, σ および μ, ν についてそれぞれ反対称で、(ρ, σ) と (μ, ν) の組について対称ですから、$n(n-1)/2$ 次の対称行列と同じで、その独立な成分は、$n(n-1)(n^2-n+2)/8$ 個です。よって $n = 2$ で 1 個, $n = 3$ で 6 個, $n = 4$ で 21 個という具合です。$n = 4$ のときは上の右式によりさらに 1 個減ります。

6.9 ビアンキ恒等式

次にリーマンテンソルの共変微分を作ってみましょう。それは、

$$\nabla_\lambda R^\rho{}_{\sigma\mu\nu} = \partial_\lambda\partial_\mu\Gamma^\rho{}_{\sigma\nu} - \partial_\lambda\partial_\nu\Gamma^\rho{}_{\sigma\mu} + (\Gamma\,\text{をあらわに含む項})$$

という形になります。よって、$\nabla_\lambda R^\rho{}_{\sigma\mu\nu} + \nabla_\nu R^\rho{}_{\sigma\lambda\mu} + \nabla_\mu R^\rho{}_{\sigma\nu\lambda}$ という式を考えれば、それは Γ をあらわに含む項だけで表され、テンソル定理から 0 です：

$$\nabla_\lambda R^\rho{}_{\sigma\mu\nu} + \nabla_\nu R^\rho{}_{\sigma\lambda\mu} + \nabla_\mu R^\rho{}_{\sigma\nu\lambda} = 0.$$

これは**ビアンキ恒等式**と呼ばれます。

リーマンテンソルから、

$$R_{\mu\nu} = g^{\rho\sigma}R_{\rho\mu\sigma\nu}, \quad R = g^{\mu\nu}R_{\mu\nu}$$

で定義される量を、順に、**リッチテンソル**、**スカラー曲率**と呼びます。リッチテンソルは対称テンソルであることがわかります。(文献によってはリッチテンソルを $R_{\mu\nu} = g^{\rho\sigma}R_{\rho\mu\nu\sigma}$ で定義します。これはここでの定義と符号だけ異なります。)

ビアンキ恒等式に $\delta^\mu_\rho g^{\nu\sigma}$ をかけて、丁寧に整理すれば、

$$\nabla_\mu G^{\mu\nu} = 0, \qquad G^{\mu\nu} = R^{\mu\nu} - \frac{1}{2}\,g^{\mu\nu}R$$

を得るでしょう。$G^{\mu\nu}$ は**アインシュタインテンソル**と呼ばれるので、左の恒等式は、アインシュタインテンソルに関するビアンキ恒等式と呼ばれます。

6.10 体積要素

N 次元計量空間の**体積要素**は、通常、

$$dv = \sqrt{\ }\, d^Nx$$

で定義されます。ここで、

$$\sqrt{\ } = \sqrt{|\det g|}.$$

g は計量が作る行列、$\det g$ はその行列式です。また、

$$d^Nx = dx^1 \wedge dx^2 \wedge \cdots \wedge dx^N$$

です。$\sqrt{\ }$ および d^Nx は、一般座標変換に対し、

$$\sqrt{\ }' = \left|\det\frac{\partial x}{\partial x'}\right|\sqrt{\ } \quad \text{および} \quad d^Nx' = \det\frac{\partial x'}{\partial x}\, d^Nx$$

と振舞うため、体積要素 dv は符号の不定性を除き座標に依存しません。特に N 次元ユークリッド空間においてはデカルト座標を x^μ として $dv = d^Nx$ です。

6.11　計量の微分公式

ここで計量に関する微分公式をいくつか紹介しておきます。

$g_{\mu\nu} g^{\nu\lambda} = \delta^\lambda_\mu$ の微分をとることで、上付き計量の微分は、

$$\delta g^{\mu\nu} = -g^{\mu\rho} g^{\nu\sigma} \delta g_{\rho\sigma}$$

となるでしょう。また、一般に行列式の行列各成分による微分は、その行列の余因子になるから、$\delta \det g = \det g \, g^{\mu\nu} \delta g_{\mu\nu}$. よって、

$$\delta \surd = \frac{1}{2\surd} \, \delta |\det g| = \frac{1}{2\surd} \, |\det g| \, g^{\mu\nu} \delta g_{\mu\nu} = \frac{1}{2} \surd \, g^{\mu\nu} \delta g_{\mu\nu}$$

です。特に座標微分において、

$$\partial_\mu \surd = \frac{\partial \surd}{\partial g_{\rho\sigma}} \partial_\mu g_{\rho\sigma} = \frac{1}{2} \surd \, g^{\rho\sigma} \partial_\mu g_{\rho\sigma} = \frac{1}{2} \surd \, g^{\rho\sigma} (\Gamma_{\rho\sigma\mu} + \Gamma_{\sigma\rho\mu}) = \surd \, \Gamma^\rho{}_{\rho\mu}$$

を得ます。

これを用いると、一般にベクトル A^μ に対して、

$$\surd \, \nabla_\mu A^\mu = \surd \, (\partial_\mu A^\mu + \Gamma^\mu{}_{\nu\mu} A^\nu) = \surd \, \partial_\mu A^\mu + (\partial_\nu \surd) A^\nu = \partial_\mu (\surd \, A^\mu).$$

同様に、2 階の反対称テンソル $F^{\mu\nu}$ について、

$$\surd \, \nabla_\mu F^{\mu\nu} = \partial_\mu (\surd \, F^{\mu\nu}).$$

さらに、2 階の対称テンソル T^μ_λ について、

$$\surd \, \nabla_\mu T^\mu_\lambda = \partial_\mu (\surd \, T^\mu_\lambda) - \frac{1}{2} \surd \, \partial_\lambda g_{\mu\nu} T^{\mu\nu}$$

という関係が示せるでしょう。

6.12　測地線

リーマン空間における曲線の長さは、微小距離の積分、

$$I = \int ds = \int d\lambda \sqrt{g_{\mu\nu} \frac{dx^\mu}{d\lambda} \frac{dx^\nu}{d\lambda}}$$

で与えられます。ここで λ は曲線上のパラメータです。

いま、曲線の端の 2 点が定まっているとし、曲線の長さを最小にしたいとします。そのような曲線はどのように与えられるでしょうか？ これは変分法の問題で

す。そのためには、曲線 $x^\mu(\lambda)$ に任意の仮想変分 $\delta x^\mu(\lambda)$ を与え、このとき積分が停留値性：

$$\delta I = 0$$

を持っていることが必要です。このような停留値性をもつ曲線を**測地線**といいます。測地線が満たすべき方程式を導出してみましょう。

I の式の被積分関数の変分を計算すると、

$$\begin{aligned}
\delta\sqrt{g_{\mu\nu}\frac{dx^\mu}{d\lambda}\frac{dx^\nu}{d\lambda}} &= \frac{1}{2}\left(g_{\rho\sigma}\frac{dx^\rho}{d\lambda}\frac{dx^\sigma}{d\lambda}\right)^{-1/2}\delta\left(g_{\mu\nu}\frac{dx^\mu}{d\lambda}\frac{dx^\nu}{d\lambda}\right) \\
&= \frac{1}{2}\frac{d\lambda}{ds}\left(\partial_\lambda g_{\mu\nu}\delta x^\lambda\frac{dx^\mu}{d\lambda}\frac{dx^\nu}{d\lambda} + 2g_{\mu\nu}\frac{dx^\mu}{d\lambda}\frac{d\delta x^\nu}{d\lambda}\right) \\
&= \frac{1}{2}\partial_\lambda g_{\mu\nu}\frac{dx^\mu}{ds}\frac{dx^\nu}{d\lambda}\delta x^\lambda + g_{\mu\nu}\frac{dx^\mu}{ds}\frac{d\delta x^\nu}{d\lambda} \\
&= \frac{1}{2}\partial_\lambda g_{\mu\nu}\frac{dx^\mu}{ds}\frac{dx^\nu}{d\lambda}\delta x^\lambda - \frac{d}{d\lambda}\left(g_{\mu\lambda}\frac{dx^\mu}{ds}\right)\delta x^\lambda + \frac{d}{d\lambda}(\cdots).
\end{aligned}$$

最後の全微分項は積分をとったときに落ちます。そこで δx^λ の係数をさらに整理していきます。

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2}\partial_\lambda g_{\mu\nu}\frac{dx^\mu}{ds}\frac{dx^\nu}{d\lambda} - \frac{d}{d\lambda}\left(g_{\mu\lambda}\frac{dx^\mu}{ds}\right) \\
&\quad= \frac{1}{2}\partial_\lambda g_{\mu\nu}\frac{dx^\mu}{ds}\frac{dx^\nu}{d\lambda} - \partial_\nu g_{\mu\lambda}\frac{dx^\nu}{d\lambda}\frac{dx^\mu}{ds} - g_{\mu\lambda}\frac{d^2x^\mu}{d\lambda ds} \\
&\quad= \frac{1}{2}\left(\partial_\lambda g_{\mu\nu} - \partial_\nu g_{\mu\lambda} - \partial_\mu g_{\nu\lambda}\right)\frac{dx^\mu}{ds}\frac{dx^\nu}{d\lambda} - g_{\mu\lambda}\frac{d^2x^\mu}{d\lambda ds} \\
&\quad= -\Gamma_{\lambda\mu\nu}\frac{dx^\mu}{ds}\frac{dx^\nu}{d\lambda} - g_{\mu\lambda}\frac{d^2x^\mu}{d\lambda ds.}
\end{aligned}$$

よって結局、

$$\delta I = -\int d\lambda\left(g_{\lambda\mu}\frac{d^2x^\mu}{d\lambda ds} + \Gamma_{\lambda\mu\nu}\frac{dx^\mu}{d\lambda}\frac{dx^\nu}{ds}\right)\delta x^\lambda$$

を得たことになります。$\delta x^\lambda(\lambda)$ は任意ですから、測地線の満たすべき方程式は、

$$g_{\lambda\mu}\frac{d^2x^\mu}{d\lambda ds} + \Gamma_{\lambda\mu\nu}\frac{dx^\mu}{d\lambda}\frac{dx^\nu}{ds} = 0.$$

あるいはこれに $g^{\rho\lambda}\,d\lambda/ds$ をかけて、

$$\frac{d^2x^\rho}{ds^2} + \Gamma^\rho{}_{\mu\nu}\frac{dx^\mu}{ds}\frac{dx^\nu}{ds} = 0$$

となります。

特にユークリッド座標においては、$d^2x^\rho/ds^2 = 0$ となり、これは直線の方程式に他なりません。測地線は、ユークリッド空間における直線を拡張した概念なのです。

6.13 2次元球面

簡単で自明でないリーマン空間の例として2次元球面を考えてみましょう。

球面座標を (θ, ϕ) とすると、線素の式は、

$$ds^2 = r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2\theta d\phi^2$$

でした。r は球の半径で、定数です。$\theta = x^1$, $\phi = x^2$ という対応で、計量は、

$$g_{11} = r^2, \quad g_{22} = r^2\sin^2\theta, \quad g_{12} = g_{21} = 0.$$

上付き計量は、

$$g^{11} = \frac{1}{r^2,} \quad g^{22} = \frac{1}{r^2\sin^2\theta,} \quad g^{12} = g^{21} = 0.$$

計量の座標微分で 0 でないものが、

$$\partial_1 g_{22} = \frac{\partial r^2\sin^2\theta}{\partial\theta} = 2r^2\sin\theta\cos\theta$$

だけであることに注意すると、接続係数は、

$$\Gamma_{122} = -\frac{1}{2}\partial_1 g_{22} = -r^2\sin\theta\cos\theta, \quad \Gamma_{212} = \Gamma_{221} = \frac{1}{2}\partial_1 g_{22} = r^2\sin\theta\cos\theta$$

で、他の成分は0です。添字を上付きにしたものは、

$${\Gamma^1}_{22} = g^{11}\Gamma_{122} = -\sin\theta\cos\theta, \quad {\Gamma^2}_{12} = {\Gamma^2}_{21} = g^{22}\Gamma_{212} = \frac{\cos\theta}{\sin\theta}$$

で、他の成分は0です。

空間は2次元ですから、リーマンテンソルの成分で独立なものは R_{1212} だけですが、これは、リーマンテンソルの定義式に注意して、

$$R_{1212} = g_{11}{R^1}_{212} = g_{11}\left(\partial_1{\Gamma^1}_{22} - \partial_2{\Gamma^1}_{21} + {\Gamma^1}_{1\lambda}{\Gamma^\lambda}_{22} - {\Gamma^1}_{2\lambda}{\Gamma^\lambda}_{12}\right)$$

です。括弧内第2項と第3項は0であるとわかり、第4項は $\lambda = 2$ の寄与だけ残ります。結果、

$$R_{1212} = g_{11}\left(\partial_1{\Gamma^1}_{22} - {\Gamma^1}_{22}{\Gamma^2}_{12}\right) = r^2\sin^2\theta.$$

これが0でないことは、この2次元空間が曲がっていることを意味しています。

リッチテンソルは、

$$R_{11} = g^{22} R_{2121} = g^{22} R_{1212} = 1, \qquad R_{22} = g^{11} R_{1212} = \sin^2\theta$$

で、他の成分は 0. スカラー曲率は、

$$R = g^{11} R_{11} + g^{22} R_{22} = \frac{2}{r^2}$$

と計算されます。球面ですからスカラー曲率が定数になるのは当然と考えられます。

測地線の方程式： $\dfrac{d^2 x^\rho}{ds^2} + \Gamma^\rho{}_{\mu\nu} \dfrac{dx^\mu}{ds} \dfrac{dx^\nu}{ds} = 0$ は、$\theta =$ 一定 のもとで、

$$\sin\theta\cos\theta \left(\frac{d\phi}{ds}\right)^2 = 0, \qquad \frac{d^2\phi}{ds^2} = 0$$

を与えるでしょう。よって地球表面の緯度線を考えると、赤道 $(\theta = \pi/2)$ は測地線ですが、他の緯度線は測地線でないことがわかります。

(余談) 2 次元球面座標のアインシュタインテンソル $G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - (1/2)\, g_{\mu\nu} R$ を計算すると、その成分が全て 0 であることが確かめられますが、これはたまたまではありません。一般に 2 次元リーマン空間のアインシュタインテンソルは恒等的に 0 なのです。なぜなら 2 次元リーマン空間のリーマンテンソルは、その対称性から、2 次元レビ・チビタ $\epsilon_{\mu\nu}$ を用いて $R_{\rho\mu\sigma\nu} = R_{1212}\, \epsilon_{\rho\mu}\epsilon_{\sigma\nu}$ と表されるので、リッチテンソルは、$R_{\mu\nu} = g^{\rho\sigma} R_{1212}\, \epsilon_{\rho\mu}\epsilon_{\sigma\nu} = R_{1212}\, (\tilde{g}^{-1})_{\mu\nu}$. ここで $\tilde{g}^{-1}$ は計量の逆行列の余因子行列で、余因子行列の性質から、$g^{-1}\tilde{g}^{-1} = \det(g^{-1})\, \delta \ \therefore \tilde{g}^{-1} = (\det g)^{-1} g$. よって、

$$R_{\mu\nu} = \frac{R_{1212}}{\det g}\, g_{\mu\nu}, \qquad R = g^{\mu\nu} \frac{R_{1212}}{\det g}\, g_{\mu\nu} = \frac{2R_{1212}}{\det g}$$

がわかり、$G_{\mu\nu} = 0$ が確かめられます。アインシュタインテンソルが 0 でない成分を持つのは、3 次元以上のリーマン空間においてであるわけです。

索 引