

あもんノート

ユークリッド幾何学、ニュートン力学から、相対論、宇宙論、量子論、場の量子論、素粒子論、そして超ひも理論まで、理論物理学を簡潔にかつ幅広く網羅したノートです。TOP へは下の URL をクリックして行けます。専用の画像掲示板で、ご意見、ご質問等も受け付けております。

<http://amonphys.web.fc2.com/>

目次

第 16 章 相対論的場の量子論	3
16.1 場の古典論	3
16.2 場の量子化	4
16.3 実スカラー場	4
16.4 場の粒子と真空のエネルギー	6
16.5 微分断面積	8
16.6 スカラー 4 乗模型	9
16.7 崩壊幅と寿命	10
16.8 2 スカラー模型	11
16.9 伝播関数	12
16.10 正規順序積	13
16.11 ハウスドルフ公式	14
16.12 ウィックの定理	15
16.13 ファインマン規則	16
16.14 くりこみ処方	19
16.15 真空泡グラフ	19
16.16 2 スカラー模型における散乱	20
16.17 複素スカラー場	21
16.18 自発的対称性の破れ	23

第16章 相対論的場の量子論

ローレンツ変換に対して不変な場の量子論を、一般に相対論的場の量子論といいます。これは原子核の理論や素粒子論の基礎となる理論形式です。この章では簡単なスカラー場を例に、まず自由場の量子論を紹介し、次に相互作用のある系を紹介します。その後、伝播関数、ウィックの定理、ファインマン規則など一般的な定理に進み、摂動論の高次補正について説明します。最後に対称性が自発的に破れるメカニズムを簡単な例において説明します。

16.1 場の古典論

一般に時空 $x^\mu = (t, \mathbf{r})$ 上に複数の場 $\varphi_i(x)$ ($i = 1, 2, \dots$) があるとします。作用汎関数が、

$$S[\varphi] = \int dt L = \int d^4x \mathcal{L}$$

のように与えられるとき、 L をラグランジアン、 \mathcal{L} をラグランジアン密度といいます。 \mathcal{L} が場の1階微分までで表されるとき、

$$\delta\mathcal{L} = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\varphi_i} \delta\varphi_i + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\partial_\mu\varphi_i} \delta\partial_\mu\varphi_i = \left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\varphi_i} - \partial_\mu \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\partial_\mu\varphi_i} \right) \delta\varphi_i + \partial_\mu \left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\partial_\mu\varphi_i} \delta\varphi_i \right)$$

ですから、最小作用の原理 $\delta S[\varphi] = 0$ は、

$$\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\varphi_i} - \partial_\mu \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\partial_\mu\varphi_i} = 0$$

を与えます。これをオイラー・ラグランジュ方程式、または単に運動方程式、あるいは場の方程式といいます。

作用が、

$$\delta\varphi_i = \epsilon^a G_i^a$$

という無限小変換に関して不変な場合 (ϵ^a は無限小パラメータ)、 \mathcal{L} の変分は時空の全微分で書けるはずです。これを、

$$\delta\mathcal{L} = \epsilon^a \partial_\mu X^{a\mu}$$

とおきます。一方、上の $\delta\mathcal{L}$ の式から場の方程式を用いて $\delta\mathcal{L} = \partial_\mu((\partial\mathcal{L}/\partial\partial_\mu\varphi_i)\delta\varphi_i)$ なので、

$$\partial_\mu J^{a\mu} = 0, \quad J^{a\mu} = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\partial_\mu\varphi_i} G_i^a - X^{a\mu}$$

がわかります。これをネーターの定理といい、作用が持つ対称性に対応し、保存カレント $J^{a\mu}$ が存在することを示しています。

例えば、時空の並進変換 $x'^\mu = x^\mu - \epsilon^\mu$ に対しては、場とラグランジアン密度がそれぞれ $\delta\phi_i = \epsilon^\nu\partial_\nu\varphi_i$, $\delta\mathcal{L} = \epsilon^\nu\partial_\nu\mathcal{L} = \epsilon^\nu\partial_\mu(\delta^\mu_\nu\mathcal{L})$ と振舞うため、

$$T^\mu_\nu = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\partial_\mu\varphi_i} \partial_\nu\varphi_i - \delta^\mu_\nu\mathcal{L}$$

が保存カレントになります。これをエネルギー運動量テンソルといいます。

16.2 場の量子化

場 $\varphi_i(x)$ の正準共役変数は、

$$\begin{aligned} \frac{\delta L(t)}{\delta\dot{\varphi}_i(t, \mathbf{r})} &= \int d^3\mathbf{r}' \frac{\delta\mathcal{L}(t, \mathbf{r}')}{\delta\dot{\varphi}_i(t, \mathbf{r})} = \int d^3\mathbf{r}' \frac{\delta\dot{\varphi}_k(t, \mathbf{r}')}{\delta\dot{\varphi}_i(t, \mathbf{r})} \frac{\partial\mathcal{L}(t, \mathbf{r}')}{\partial\dot{\varphi}_k(t, \mathbf{r}')} \\ &= \int d^3\mathbf{r}' \delta_k^i \delta^3(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \frac{\partial\mathcal{L}(t, \mathbf{r}')}{\partial\dot{\varphi}_k(t, \mathbf{r}')} = \frac{\partial\mathcal{L}(t, \mathbf{r})}{\partial\dot{\varphi}_i(t, \mathbf{r})} \end{aligned}$$

という評価により、

$$\pi_i = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{\varphi}_i}$$

で与えられることがわかります。正準量子論における正準交換関係は、 $\varphi_i(t, \mathbf{r})$ において (i, \mathbf{r}) を力学変数の添字と同定し、

$$\begin{aligned} [\varphi_i(x), \pi_j(x')]_{t=t'} &= i\delta_j^i \delta^3(\mathbf{r} - \mathbf{r}'), \\ [\varphi_i(x), \varphi_j(x')]_{t=t'} &= [\pi_i(x), \pi_j(x')]_{t=t'} = 0 \end{aligned}$$

です。同時刻における交換関係であることに注意してください。それゆえ正準交換関係は、場の量子論においては同時刻交換関係と呼ばれることもあります。上式は反交換子で与えられることもあり、その場合生成される粒子はフェルミオンになります。

16.3 実スカラー場

簡単な相対論的モデルとして、実スカラー場 $\phi(x)$ の理論、

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \partial_\mu\phi(x)\partial^\mu\phi(x) - \frac{m^2}{2} \phi^2(x)$$

を考えましょう。このラグランジアン密度は明らかにローレンツ不変です。それゆえ相対論的というわけです。 $\partial\mathcal{L}/\partial\phi = -m^2\phi$, $\partial\mathcal{L}/\partial\partial_\mu\phi = \partial^\mu\phi$ に注意すると、場の方程式は、

$$(\square + m^2)\phi(x) = 0$$

となり、これはクライン・ゴールドン方程式と呼ばれます。 $\square = \partial \cdot \partial$ はダランベルシアンです。

$\phi(x)$ をフーリエ展開し $\phi(x) = \int d^3\mathbf{k} f(t, \mathbf{k}) e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}}$ とおき、これをクライン・ゴールドン方程式に代入すると、2階の微分方程式、

$$\ddot{f}(t, \mathbf{k}) = -(|\mathbf{k}|^2 + m^2) f(t, \mathbf{k})$$

を得ます。この方程式の一般解は、 $\alpha(\mathbf{k})$, $\beta(\mathbf{k})$ を任意の複素数として、

$$f(t, \mathbf{k}) = \alpha(\mathbf{k}) e^{-ik^0 t} + \beta(\mathbf{k}) e^{ik^0 t}, \quad k^0 = \sqrt{|\mathbf{k}|^2 + m^2}$$

ですから、

$$\phi(x) = \int d^3\mathbf{k} \left(\alpha(\mathbf{k}) e^{-ik^0 t + i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} + \beta(\mathbf{k}) e^{ik^0 t + i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} \right).$$

後ろの項において積分変数を $\mathbf{k} \rightarrow -\mathbf{k}$ と変換し、さらに $\alpha(\mathbf{k}) = a(\mathbf{k})/((2\pi)^3 2k^0)$, $\beta(-\mathbf{k}) = b^*(\mathbf{k})/((2\pi)^3 2k^0)$ とおくと、 $a(\mathbf{k})$, $b(\mathbf{k})$ はやはり任意の複素数で、

$$\phi(x) = \int \frac{d^3\mathbf{k}}{(2\pi)^3 2k^0} \left(a(\mathbf{k}) e^{-ik\cdot x} + b^*(\mathbf{k}) e^{ik\cdot x} \right).$$

ここで $*$ は複素共役を意味します (量子論ではエルミート共役)。また、 $k\cdot x = g_{\mu\nu} k^\mu x^\mu = k^0 t - \mathbf{k}\cdot\mathbf{r}$ 。 $\phi(x)$ は実数なので、 $\phi^*(x) = \phi(x)$ より $b(\mathbf{k}) = a(\mathbf{k})$ 。結局、クライン・ゴールドン方程式の一般解は、

$$\phi(x) = \int \frac{d^3\mathbf{k}}{(2\pi)^3 2k^0} \left(a(\mathbf{k}) e^{-ik\cdot x} + a^*(\mathbf{k}) e^{ik\cdot x} \right), \quad k^0 = \sqrt{|\mathbf{k}|^2 + m^2}$$

と書けます。

場 $\phi(x)$ の正準共役は $\partial\mathcal{L}/\partial\dot{\phi}(x) = \dot{\phi}(x)$ なので、正準交換関係は、

$$\begin{aligned} [\phi(x), \dot{\phi}(x')]_{t=t'} &= i\delta^3(\mathbf{r}-\mathbf{r}'), \\ [\phi(x), \phi(x')]_{t=t'} &= [\dot{\phi}(x), \dot{\phi}(x')]_{t=t'} = 0 \end{aligned}$$

で与えられ、これは、

$$[a(\mathbf{k}), a^*(\mathbf{k}')] = (2\pi)^3 2k^0 \delta^3(\mathbf{k}-\mathbf{k}'), \quad [a(\mathbf{k}), a(\mathbf{k}')] = 0$$

において成立します。実際このとき、

$$\begin{aligned}
& [\phi(x), \dot{\phi}(x')]_{t=t'} \\
&= \int \frac{d^3\mathbf{k}d^3\mathbf{k}'}{(2\pi)^6 4k^0 k'^0} (ik'^0) \left[a(\mathbf{k})e^{-ik\cdot x} + a^*(\mathbf{k})e^{ik\cdot x}, -a(\mathbf{k}')e^{-ik'\cdot x'} + a^*(\mathbf{k}')e^{ik'\cdot x'} \right]_{t=t'} \\
&= i \int \frac{d^3\mathbf{k}d^3\mathbf{k}'}{(2\pi)^6 4k^0} \left([a(\mathbf{k}), a^*(\mathbf{k}')] e^{-ik\cdot x + ik'\cdot x'} - [a^*(\mathbf{k}), a(\mathbf{k}')] e^{ik\cdot x - ik'\cdot x'} \right)_{t=t'} \\
&= i \int \frac{d^3\mathbf{k}}{(2\pi)^3 2} \left(e^{-ik\cdot(x-x')} + e^{ik\cdot(x-x')} \right)_{t=t'} = i \int \frac{d^3\mathbf{k}}{(2\pi)^3} e^{ik\cdot(\mathbf{r}-\mathbf{r}')} = i\delta^3(\mathbf{r}-\mathbf{r}')
\end{aligned}$$

で、他も確かめられるでしょう^(*)。そうすると簡単に、

$$[\phi(x), a^*(\mathbf{k})] = e^{-ik\cdot x}, \quad [a(\mathbf{k}), \phi(x)] = e^{ik\cdot x}$$

がわかります。一般解における $1/((2\pi)^3 2k^0)$ の因子はこの式をシンプルにするためのもので、このような $a(\mathbf{k})$ の規格化は不変規格化と呼ばれます。

(*注) 必要十分性を確かめたい場合は、一般解の式から、

$$\int d^3\mathbf{r} e^{ik\cdot x} \phi(x) = \frac{1}{2k^0} (a(\mathbf{k}) + a^*(-\mathbf{k})e^{i2k^0 t}), \quad \int d^3\mathbf{r} e^{ik\cdot x} \dot{\phi}(x) = \frac{-i}{2} (a(\mathbf{k}) - a^*(-\mathbf{k})e^{i2k^0 t})$$

が得られ、ここから $a(\mathbf{k}) = \int d^3\mathbf{r} e^{ik\cdot x} (k^0 \phi(x) + i\dot{\phi}(x))$ となることに注意。

16.4 場の粒子と真空のエネルギー

自由実スカラー場のエネルギー運動量テンソルは、

$$T^{\mu\nu} = \partial^\mu \phi \partial^\nu \phi - g^{\mu\nu} \mathcal{L}$$

となるため、運動量は、

$$P^i = \int d^3\mathbf{r} T^{0i} = \int d^3\mathbf{r} \dot{\phi} \partial^i \phi.$$

一般解の式を代入すれば、

$$\begin{aligned}
P^i = \int \frac{d^3\mathbf{r}d^3\mathbf{k}d^3\mathbf{k}'}{(2\pi)^6 4k^0} k'^i & \left(a(\mathbf{k})a^*(\mathbf{k}')e^{-i(k-k')\cdot x} + a^*(\mathbf{k})a(\mathbf{k}')e^{i(k-k')\cdot x} \right. \\
& \left. - a(\mathbf{k})a(\mathbf{k}')e^{-i(k+k')\cdot x} - a^*(\mathbf{k})a^*(\mathbf{k}')e^{i(k+k')\cdot x} \right)
\end{aligned}$$

のように展開されますが、 \mathbf{r} 積分を実行すると $\delta^3(\mathbf{k}-\mathbf{k}')$ や $\delta^3(\mathbf{k}+\mathbf{k}')$ を生じ、続けて \mathbf{k}' 積分を実行して、

$$= \int \frac{d^3\mathbf{k}}{(2\pi)^3 4k^0} k^i \left(a(\mathbf{k})a^*(\mathbf{k}) + a^*(\mathbf{k})a(\mathbf{k}) - a(\mathbf{k})a(-\mathbf{k})e^{-2ik^0 t} - a^*(\mathbf{k})a^*(-\mathbf{k})e^{2ik^0 t} \right).$$

時間 t を含む項は k の奇関数であることから消え、また、初項については交換関係を用いて、

$$P = \int \frac{d^3 \mathbf{k}}{(2\pi)^3 2k^0} \mathbf{k} a^*(\mathbf{k}) a(\mathbf{k})$$

を得ます。この式から、

$$[P, a^*(\mathbf{k})] = \mathbf{k} a^*(\mathbf{k})$$

がわかるでしょう。すなわち、 $a^*(\mathbf{k})$ は運動量 \mathbf{k} の粒子を生成する演算子とみなせるわけです。

一方、エネルギーは、

$$P^0 = \int d^3 \mathbf{r} T^{00} = \int d^3 \mathbf{r} (\dot{\phi}^2 - \mathcal{L}) = \frac{1}{2} \int d^3 \mathbf{r} (\dot{\phi}^2 + |\nabla \phi|^2 + m^2 \phi^2)$$

ですが、部分積分して場の方程式を用いると、

$$P^0 = \frac{1}{2} \int d^3 \mathbf{r} (\dot{\phi}^2 - \phi \ddot{\phi})$$

と書くこともできます。この方が計算が楽になるでしょう。一般解の式を代入して同様に計算すれば、

$$P^0 = \int \frac{d^3 \mathbf{k}}{(2\pi)^3 4} (a(\mathbf{k}) a^*(\mathbf{k}) + a^*(\mathbf{k}) a(\mathbf{k})) = \int \frac{d^3 \mathbf{k}}{(2\pi)^3 2k^0} k^0 a^*(\mathbf{k}) a(\mathbf{k}) + V_0.$$

ここで、

$$V_0 = \frac{1}{2} \int d^3 \mathbf{k} k^0 \delta^3(\mathbf{k} = \mathbf{0}) = \frac{1}{2} \int d^3 \mathbf{k} k^0 \int \frac{d^3 \mathbf{r}}{(2\pi)^3} e^{i\mathbf{0} \cdot \mathbf{r}} = \frac{1}{2} \int \frac{d^3 \mathbf{r} d^3 \mathbf{k}}{(2\pi)^3} k^0$$

です。 V_0 は実空間の体積と波数空間における紫外破局、両方の意味で無限大です。一方、

$$[P^0, a^*(\mathbf{k})] = k^0 a^*(\mathbf{k})$$

がわかるので、 $a^*(\mathbf{k})$ で生成される粒子のエネルギーは $k^0 = \sqrt{|\mathbf{k}|^2 + m^2}$ です。 \mathbf{k} は粒子の運動量とみなせたので、 m は粒子の質量という意味になります。

真空 $|0\rangle$ を、

$$a(\mathbf{k})|0\rangle = 0 \quad (\forall \mathbf{k})$$

で定義すると、

$$P^0|0\rangle = V_0|0\rangle, \quad P|0\rangle = 0.$$

よって V_0 は真空のエネルギーということになります。角振動数 ω の調和振動子系の基底状態のエネルギーが $\omega/2$ だったことを思い出してください。実スカラー場ではこれが無限に存在するため、無限大の真空のエネルギーを持つというわけ

です。しかし重力場を考えない限りはエネルギーの基準はどこでもいいので、これは無限大でも構わないわけです。

(余談) 一方、重力場を考える場合は、例えば、ボゾンとフェルミオンに関する対称性である超対称性を仮定することでこの無限大の問題をクリアできます。フェルミオン(ディラック場)の真空のエネルギーを計算すると、それはマイナス無限大になり、超対称性があればちょうどボゾンの寄与を相殺することがわかるからです。超対称性を仮定しないなら相殺のために無限大の宇宙定数(真空のエネルギー密度)が必要になります。「無限大の宇宙定数なんてあり得ない!」という風に考える人もいるかもしれませんが、くりこみ理論によれば相対論的な場の相互作用系の裸の物理量は、そもそも無限大だらけで、元来有限な量の方が、もしあるとすれば稀といえるくらいです。例えば電子の質量や電荷は、元々は無限大で、相互作用の効果で有限に見えると考えられるわけです。詳しくはくりこみ理論の章を参照してください。

16.5 微分断面積

相互作用がある場合の断面積の式を求めておきましょう。すでに非相対論的な場合を散乱問題の章でやっているの、ここでは相対論的な場合をごく簡単に説明します。

$$|i\rangle = a^*(\mathbf{k}_1)a^*(\mathbf{k}_2)|0\rangle \rightarrow |f\rangle = a^*(\mathbf{k}_3)a^*(\mathbf{k}_4)|0\rangle$$

という2粒子(異種でも良い)の散乱が起こる微小確率は、 S を S 行列として、

$$d\Gamma = \frac{|\langle f|S|i\rangle|^2}{\langle i|i\rangle} \frac{d^3\mathbf{k}_3}{(2\pi)^3 2k_3^0} \frac{d^3\mathbf{k}_4}{(2\pi)^3 2k_4^0}$$

と書けます。

$$\langle f|S|i\rangle = (2\pi)^4 \delta^4(k_3 + k_4 - k_1 - k_2) \mathfrak{M}$$

で散乱振幅 \mathfrak{M} を定義すると、 T を散乱の時間、 V を空間の体積として、

$$|\langle f|S|i\rangle|^2 = (2\pi)^4 TV \delta^4(k_3 + k_4 - k_1 - k_2) |\mathfrak{M}|^2, \quad \langle i|i\rangle = 4k_1^0 k_2^0 V^2$$

がわかるので、 $d\Gamma$ の式は、

$$d\Gamma = \frac{T|\mathfrak{M}|^2}{64\pi^2 V k_1^0 k_2^0 k_3^0 k_4^0} \delta(k_3^0 + k_4^0 - k_1^0 - k_2^0) d^3\mathbf{k}_3 \Big|_{\mathbf{k}_4 = \mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2 - \mathbf{k}_3}$$

となります。重心系をとり、 $\mathbf{k}_1 = -\mathbf{k}_2 = \mathbf{k}$, $\mathbf{k}_3 = -\mathbf{k}_4 = \mathbf{k}'$ とすると、

$$d(k_3^0 + k_4^0) = \frac{k_3^0 + k_4^0}{k_3^0 k_4^0} |\mathbf{k}'| d|\mathbf{k}'|, \quad d^3\mathbf{k}_3 = |\mathbf{k}'|^2 d|\mathbf{k}'| d\Omega$$

に注意して、

$$d\Gamma = \frac{T|\mathfrak{M}|^2 |\mathbf{k}'| d\Omega}{64\pi^2 V k_1^0 k_2^0 (k_1^0 + k_2^0)}$$

を得ます。 $d\Omega$ は \mathbf{k}' の微小立体角です。

一方、入射粒子の相対速度が、

$$v = \frac{|\mathbf{k}|}{k_1^0} + \frac{|\mathbf{k}|}{k_2^0} = \frac{(k_1^0 + k_2^0)|\mathbf{k}|}{k_1^0 k_2^0}$$

であることに注意すると、微小散乱確率は、 $d\sigma$ を微小断面積として、

$$d\Gamma = \frac{vT d\sigma}{V} = \frac{(k_1^0 + k_2^0)|\mathbf{k}|T d\sigma}{k_1^0 k_2^0 V}$$

と書けるので、これら $d\Gamma$ の式を比較して、微分断面積の式、

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{1}{64\pi^2 E^2} \frac{|\mathbf{k}'|}{|\mathbf{k}|} |\mathfrak{M}|^2$$

を得ます。ここで、 $E = k_1^0 + k_2^0$ は系のエネルギーです。

16.6 スカラー 4 乗模型

相互作用がある実スカラー場のモデルとして、

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \partial_\mu \phi \partial^\mu \phi - \frac{m^2}{2} \phi^2 - \frac{\lambda}{4!} \phi^4$$

を考えましょう。 λ は定数で、結合定数と呼ばれます。これをスカラー 4 乗模型 (ϕ^4 模型) といいます。一般に場の次数が 3 以上の項が相互作用項であり、相互作用表示をとった場合、

$$\mathcal{L}_0 = \frac{1}{2} \partial_\mu \phi \partial^\mu \phi - \frac{m^2}{2} \phi^2, \quad \mathcal{L}_I = -\frac{\lambda}{4!} \phi^4$$

のように、自由部分 \mathcal{L}_0 と相互作用項 \mathcal{L}_I に分けて考えます。作用汎関数の相互作用項は $S_I = \int d^4x \mathcal{L}_I$ で、S 行列は、時間順序積を T として、 $S = T e^{iS_I}$ となります (散乱問題の章参照)。

いま、 ϕ 粒子の 2 粒子散乱 $\phi\phi \rightarrow \phi\phi$ を考えると、その S 行列要素は、摂動の最低次で、

$$\langle f|S|i \rangle = \langle f|(1 + iT S_I)|i \rangle = -\frac{i\lambda}{4!} \int d^4x \langle f|\phi^4(x)|i \rangle$$

となるでしょう。ブラケット部分 $\langle f|\phi^4(x)|i \rangle$ ですが、始状態の 2 粒子と終状態の 2 粒子では運動量の分配が異なるので、生成消滅の対をとる際に、それらが対になるものは除かれます (直通の寄与は 0)。そうすると始状態と終状態の生成消滅演算子が、全て場 $\phi(x)$ と対を取るものだけが残し、それは組み合わせ的に

4! 通りあります。それらが全て同じ寄与を与えること、および $[\phi(x), a^*(\mathbf{k})] = e^{-ik \cdot x}$, $[a(\mathbf{k}), \phi(x)] = e^{ik \cdot x}$ に注意すると、

$$\begin{aligned} \langle f|S|i \rangle &= -i\lambda \int d^4x e^{ik_3 \cdot x} e^{ik_4 \cdot x} e^{-ik_1 \cdot x} e^{-ik_2 \cdot x} \\ &= -i\lambda (2\pi)^4 \delta^4(k_3 + k_4 - k_1 - k_2). \end{aligned}$$

よって散乱振幅は $\mathfrak{M} = -i\lambda$ と見積もられます。重心系をとり、入射運動量を $k_1 = k$, $k_2 = -k$ とすると、系のエネルギーは $E = 2\sqrt{|\mathbf{k}|^2 + m^2}$. 微分断面積は、

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{|\mathfrak{M}|^2}{64\pi^2 E^2} = \frac{\lambda^2}{256\pi^2 (|\mathbf{k}|^2 + m^2)}$$

となり、これは散乱角に依存しません。すなわち等方散乱であることがわかります。

断面積を求めるには少し注意が必要です。今の場合、終状態が同種粒子であるため、散乱角の定義域は $(0, \pi)$ ではなく $(0, \pi/2)$ です。このため全立体角は 2π になります。よって断面積は、

$$\sigma = \int d\Omega \frac{d\sigma}{d\Omega} = 2\pi \frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{\lambda^2}{128\pi (|\mathbf{k}|^2 + m^2)}$$

ということになります。

16.7 崩壊幅と寿命

次に、ある粒子が相互作用を通じて2粒子に崩壊する過程：

$$|i \rangle = a_1^*(\mathbf{k}_1)|0 \rangle \rightarrow |f \rangle = a_2^*(\mathbf{k}_2)a_3^*(\mathbf{k}_3)|0 \rangle$$

を考えましょう。その微小確率は、微分断面積の場合と同様に計算して、

$$\begin{aligned} d\Gamma &= \frac{|\langle f|S|i \rangle|^2}{\langle i|i \rangle} \frac{d^3\mathbf{k}_2}{(2\pi)^3 2k_2^0} \frac{d^3\mathbf{k}_3}{(2\pi)^3 2k_3^0} \\ &= \frac{(2\pi)^4 TV \delta^4(k_2 + k_3 - k_1) |\mathfrak{M}|^2}{2k_1^0 V} \frac{d^3\mathbf{k}_2 d^3\mathbf{k}_3}{(2\pi)^6 4k_2^0 k_3^0} \\ &= \frac{T \delta(k_2^0 + k_3^0 - k_1^0) |\mathfrak{M}|^2}{32\pi^2 k_1^0 k_2^0 k_3^0} d^3\mathbf{k}_2 \Big|_{\mathbf{k}_3 = \mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_2} \end{aligned}$$

ですが、重心系をとり、 $\mathbf{k}_1 = 0$, $\mathbf{k}_2 = -\mathbf{k}_3 = \mathbf{k}$ とすると、

$$d(k_2^0 + k_3^0) = \frac{k_2^0 + k_3^0}{k_2^0 k_3^0} |\mathbf{k}| d|\mathbf{k}|, \quad d^3\mathbf{k}_2 = |\mathbf{k}|^2 d|\mathbf{k}| d\Omega$$

に注意して、

$$\frac{1}{T} \frac{d\Gamma}{d\Omega} = \frac{|\mathbf{k}|}{32\pi^2 M^2} |\mathfrak{M}|^2$$

を得ます。ここで M は初期粒子の質量です。この式を立体角積分して得られる Γ/T は、初期粒子が単位時間あたりに考えているモードに崩壊する確率を意味していて、そのモードの崩壊幅と呼ばれます。可能な全てのモードで崩壊幅を足したものは全幅 (あるいは崩壊定数) と呼ばれます。全幅は初期粒子が単位時間あたりに崩壊する確率を意味し、その逆数は初期粒子の寿命と呼ばれます。

粒子の寿命を τ と書くと、 τ^{-1} は全幅で、単位時間あたりに粒子が何らかのモードを通じて崩壊する確率です。よっていま、時刻 t に粒子が崩壊していない確率を $P(t)$ と書けば、

$$P(t + \Delta t) = P(t)(1 - \tau^{-1}\Delta t) \quad \therefore \dot{P}(t) = -\tau^{-1}P(t).$$

この微分方程式の解は、 $P(0) = 1$ として、

$$P(t) = e^{-t/\tau}$$

です。ちなみに放射性物理でよく用いられる半減期は、これを $T_{1/2}$ と書くと、 $P(T_{1/2}) = 1/2$ ですから、

$$T_{1/2} = \tau \log 2 \sim 0.693 \tau$$

で与えられることになります。

16.8 2スカラー模型

粒子の崩壊が起こる簡単なモデルとして、2つの実スカラー場 $\Phi(x)$, $\phi(x)$ を持つモデル、

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \partial_\mu \Phi \partial^\mu \Phi - \frac{M^2}{2} \Phi^2 + \frac{1}{2} \partial_\mu \phi \partial^\mu \phi - \frac{m^2}{2} \phi^2 + \frac{g}{2} \Phi \phi^2$$

を考えましょう。ここで M, m は、それぞれの場の粒子の質量で、 g は結合定数です。 $\mathcal{L}_I = (g/2)\Phi\phi^2$ が相互作用項であり、 $M \geq 2m$ の場合、この相互作用項を通じて $\Phi \rightarrow \phi\phi$ という Φ 粒子の崩壊が起こり得ることが予想できるでしょう。

ところで、作用汎関数 S は、通常、無次元 (角運動量次元) で定義されるため、ラグランジアン密度 \mathcal{L} は質量次元 4 です (自然単位系で eV^4 の単位を持つ)。そうすると、 ∂_μ の質量次元が 1 であることに注意して、スカラー場の次元は 1, ここでの結合定数 g の次元は 1 ということになります。一方、スカラー 4 乗模型の結合定数 λ は質量次元 0 です。

Φ 粒子の崩壊の話に戻ります。 $\Phi \rightarrow \phi\phi$ の S 行列要素は、摂動の最低次で、

$$\langle f|S|i\rangle = \frac{ig}{2} \int d^4x \langle f|\Phi(x)\phi^2(x)|i\rangle$$

となり、 $|i\rangle$ は Φ 粒子の 1 粒子状態、 $|f\rangle$ は ϕ 粒子の 2 粒子状態です。生成消滅の対の取り方は 2 通りで、同じ寄与を与えます。結果、散乱振幅が $\mathfrak{M} = ig$ になることはもはやすぐにわかるでしょう。よって、

$$\frac{1}{T} \frac{d\Gamma}{d\Omega} = \frac{g^2 |\mathbf{k}|}{32\pi^2 M^2}.$$

全立体角が 2π であること、および、エネルギー保存から

$$M = 2\sqrt{|\mathbf{k}|^2 + m^2} \quad \therefore |\mathbf{k}| = \frac{\sqrt{M^2 - 4m^2}}{2}$$

であることに注意して、崩壊幅は、

$$\frac{\Gamma}{T} = \frac{g^2 \sqrt{M^2 - 4m^2}}{32\pi M^2}$$

となります。崩壊モードはこれしかないのです、これは Φ 粒子崩壊の全幅であり、 Φ 粒子の寿命はこれの逆数になります。

結合定数 g が十分小さければ、この最低次の摂動計算は十分な精度を与えると考えられます。結合定数が大きいと、摂動論自体が無効になることがあります。高次に行くほど補正が大きくなると考えられるからです。

(余談) スカラー 4 乗模型も 2 スカラー模型もおもちゃの模型 (toy model) であり、計算結果と直接比較できる実験対象がありません。ここでの計算はあくまで簡単な教育的演習です。実験と比較できる本格的な断面積・寿命計算については、素粒子論の計算の章を参照してください。

16.9 伝播関数

スカラー場の伝播関数をここで計算しておきましょう。伝播関数は、2 点の場の時間順序積の真空期待値のことで、

$$\begin{aligned} \langle \phi(x)\phi(x') \rangle &:= \langle 0|T\phi(x)\phi(x')|0\rangle \\ &= \theta(t-t') \langle 0|\phi(x)\phi(x')|0\rangle + \theta(t'-t) \langle 0|\phi(x')\phi(x)|0\rangle \end{aligned}$$

で与えられます。ここで $\theta(t)$ は階段関数 (ステップ関数) で、 $t > 0$ のとき 1, $t < 0$ のとき 0 を与える関数です。これは積分形式で、

$$\theta(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\omega}{2\pi i} \frac{1}{\omega - i\epsilon} e^{i\omega t} \quad (\epsilon \rightarrow +0)$$

と書けます。このことは積分変数 ω を複素数に拡張すれば留数計算で確かめられるでしょう。一方、スカラー場の一般解の式から、

$$\langle 0|\phi(x)\phi(x')|0\rangle = \int \frac{d^3\mathbf{k}}{(2\pi)^3 2k^0} e^{-ik\cdot(x-x')} \quad (k^0 = \sqrt{|\mathbf{k}|^2 + m^2}).$$

これらから、伝播関数 $\langle \phi(x)\phi(x') \rangle$ の第1項は、

$$\int \frac{d\omega d^3\mathbf{k}}{(2\pi)^4 2k^0} \frac{-i}{-\omega + k^0 - i\epsilon} e^{-i\omega(t-t') + ik\cdot(r-r')}$$

と計算されます。途中、 $\omega - k^0 \rightarrow -\omega$ という変数変換を行いました。一方、第2項は、第1項の x と x' を入れ換えた式なので、積分変数を $\omega \rightarrow -\omega$, $\mathbf{k} \rightarrow -\mathbf{k}$ とし、

$$\int \frac{d\omega d^3\mathbf{k}}{(2\pi)^4 2k^0} \frac{-i}{\omega + k^0 - i\epsilon} e^{-i\omega(t-t') + ik\cdot(r-r')}$$

です。これらを足して、

$$\langle \phi(x)\phi(x') \rangle = \int \frac{d\omega d^3\mathbf{k}}{(2\pi)^4} \frac{i}{\omega^2 - |\mathbf{k}|^2 - m^2 + i\epsilon'} e^{-i\omega(t-t') + ik\cdot(r-r')}$$

となりますが ($\epsilon' = 2k^0\epsilon \rightarrow +0$)、変数 k^μ を $k^\mu = (\omega, \mathbf{k})_\mu$ で再定義すれば、

$$\langle \phi(x)\phi(x') \rangle = \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{i}{k^2 - m^2 + i\epsilon} e^{-ik\cdot(x-x')} \quad (\epsilon \rightarrow +0)$$

と表せます。 k^μ の4成分が独立な場合、これを off-shell (質量殻外) といいます。一方、 $k^2 = m^2$ の束縛関係 (分散関係) にある場合を on-shell (質量殻上) といいます。上式の積分変数 k^μ は off-shell ということになります。

上の伝播関数に関して、

$$i(\square_x + m^2) \langle \phi(x)\phi(x') \rangle = \delta^4(x - x')$$

が簡単にわかるでしょう。すなわち、スカラー場の伝播関数は、自由スカラー場の場の方程式の演算子 $\times i$ である $i(\square + m^2)$ という演算子の“逆”です。このような事情はスカラー場に限りならずかなり一般に成り立ちます。(その理由は経路積分を用いると明確になります。)

16.10 正規順序積

正規順序積は非相対論的な場の量子論でもすでに扱っていますが、相対論的な場合、1つの場の中に生成演算子と消滅演算子が共存しているので注意が必要です。

実スカラー場 $\phi(x)$ においては、

$$\phi(x) = \phi^+(x) + \phi^-(x),$$

$$\phi^+(x) = \int \frac{d^3\mathbf{k}}{(2\pi)^3 2k^0} a(\mathbf{k}) e^{-ik \cdot x}, \quad \phi^-(x) = \int \frac{d^3\mathbf{k}}{(2\pi)^3 2k^0} a^*(\mathbf{k}) e^{ik \cdot x}$$

のように、消滅演算子 $a(\mathbf{k})$ を含む部分 (正振動数部分) $\phi^+(x)$ と、生成演算子 $a^*(\mathbf{k})$ を含む部分 (負振動数部分) $\phi^-(x)$ を定義します。

$\phi(x_1)\phi(x_2)\cdots\phi(x_n)$ の正規順序積 $N\phi(x_1)\phi(x_2)\cdots\phi(x_n)$ は、これを展開したときに、その各項において、生成演算子を左に、消滅演算子を右に並び替えるということであり、例えば、

$$N\phi(x)\phi(x') = \phi^+(x)\phi^+(x') + \phi^-(x')\phi^+(x) + \phi^-(x)\phi^+(x') + \phi^-(x)\phi^-(x')$$

ということです。右辺第2項の順序が入れ代わっていることに注意してください。一般に任意の正の整数 n に対し、

$$\langle 0 | N\phi(x_1)\phi(x_2)\cdots\phi(x_n) | 0 \rangle = 0$$

が簡単にわかるでしょう。

16.11 ハウスドルフ公式

一般に、代数 A, B の交換子 $[A, B]$ が A, B と交換する場合、

$$e^A e^B = e^{A+B} e^{\frac{1}{2}[A, B]}.$$

これをハウスドルフ公式といいます。

[証明] 自然数 k に対して、 $A^k B = B A^k + k A^{k-1} [A, B]$ は容易にわかるでしょう。ここから、

$$e^A B = (B + [A, B]) e^A$$

を得ます。よって実数 x に対し $f(x) = e^{xA} e^{xB}$ とおくと、

$$f'(x) = (A + B + x[A, B]) f(x)$$

ですが、 $f(0) = 1$ に注意して、解は、

$$f(x) = e^{x(A+B) + \frac{1}{2} x^2 [A, B]}$$

です。 $x = 1$ とおいて与題を得ます。[証明終]

交換子がそれぞれ複素数になる代数が n 個あれば、ハウスドルフ公式は、

$$\prod_{i=1}^n e^{A_i} = e^{\sum_i A_i} e^{\frac{1}{2} \sum_{i < j} [A_i, A_j]}$$

と拡張されることがわかるでしょう。

16.12 ウィックの定理

時間順序積、正規順序積、伝播関数の間には、

$$T e^{\int d^4x J(x)\phi(x)} = N e^{\int d^4x J(x)\phi(x)} e^{\frac{1}{2} \int d^4x d^4x' J(x)J(x') \langle \phi(x)\phi(x') \rangle}$$

という関係があり、ウィックの定理と呼ばれます。 $J(x)$ は実数に値を取る任意の関数で、ソースと呼ばれます。上式は母関数形式ですが、両辺を、

$$\frac{\delta}{\delta J(x_1)} \frac{\delta}{\delta J(x_2)} \cdots \frac{\delta}{\delta J(x_n)}$$

により汎関数微分し、 $J(x) = 0$ とおけばわかるように、

$$\begin{aligned} & T\phi(x_1)\phi(x_2)\cdots\phi(x_n) \\ &= N\phi(x_1)\phi(x_2)\cdots\phi(x_n) \\ &+ \langle \phi(x_1)\phi(x_2) \rangle N\phi(x_3)\cdots\phi(x_n) + (\text{他の組み合わせ}) \\ &+ \langle \phi(x_1)\phi(x_2) \rangle \langle \phi(x_3)\phi(x_4) \rangle N\phi(x_5)\cdots\phi(x_n) + (\text{他の組み合わせ}) \\ &+ \cdots \end{aligned}$$

ということをいっています。すなわち、場の積の時間順序積は、任意の個数、任意の対に対する伝播関数と残りの正規順序積との積を作って、その組み合わせの総和になるということです。 $n = 2, 3, 4$ の場合を具体的に書くと、

$$T\phi(x_1)\phi(x_2) = N\phi(x_1)\phi(x_2) + \langle \phi(x_1)\phi(x_2) \rangle,$$

$$\begin{aligned} T\phi(x_1)\phi(x_2)\phi(x_3) &= N\phi(x_1)\phi(x_2)\phi(x_3) \\ &+ \langle \phi(x_1)\phi(x_2) \rangle \phi(x_3) + \langle \phi(x_1)\phi(x_3) \rangle \phi(x_2) + \langle \phi(x_2)\phi(x_3) \rangle \phi(x_1), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} T\phi(x_1)\phi(x_2)\phi(x_3)\phi(x_4) &= N\phi(x_1)\phi(x_2)\phi(x_3)\phi(x_4) \\ &+ \langle \phi(x_1)\phi(x_2) \rangle N\phi(x_3)\phi(x_4) + \langle \phi(x_1)\phi(x_3) \rangle N\phi(x_2)\phi(x_4) \\ &+ \langle \phi(x_1)\phi(x_4) \rangle N\phi(x_2)\phi(x_3) + \langle \phi(x_2)\phi(x_3) \rangle N\phi(x_1)\phi(x_4) \\ &+ \langle \phi(x_2)\phi(x_4) \rangle N\phi(x_1)\phi(x_3) + \langle \phi(x_3)\phi(x_4) \rangle N\phi(x_1)\phi(x_2) \\ &+ \langle \phi(x_1)\phi(x_2) \rangle \langle \phi(x_3)\phi(x_4) \rangle + \langle \phi(x_1)\phi(x_3) \rangle \langle \phi(x_2)\phi(x_4) \rangle \\ &+ \langle \phi(x_1)\phi(x_4) \rangle \langle \phi(x_2)\phi(x_3) \rangle \end{aligned}$$

となります。

特に $n = 2$ の場合、証明は簡単です。 $T\phi(x_1)\phi(x_2)$ も $N\phi(x_1)\phi(x_2)$ も $\phi(x_1)\phi(x_2)$ との差はただの複素数であることに注意すると、

$$T\phi(x_1)\phi(x_2) = N\phi(x_1)\phi(x_2) + C(x_1, x_2).$$

ここで $C(x_1, x_2)$ は複素数です。この式の真空期待値をとって、

$$C(x_1, x_2) = \langle \phi(x_1)\phi(x_2) \rangle$$

を得るので、 $n = 2$ の場合のウィックの定理がいえるわけです。

以下、一般的なウィックの定理の証明です。

[証明] $e^{\int d^4x J(x)\phi(x)}$ の時間順序積については、時間積分をいったん離散化して考え、ハウズドルフ公式に注意して、

$$\begin{aligned} T e^{\int d^4x J(x)\phi(x)} &= \prod_{i: \text{時刻大きい順}} e^{\Delta t \int d^3\mathbf{r} J(t_i, \mathbf{r})\phi(t_i, \mathbf{r})} \\ &= e^{\int d^4x J(x)\phi(x)} e^{\frac{1}{2} \int d^4x d^4x' J(x)J(x')\theta(t-t')[\phi(x), \phi(x')]} . \end{aligned}$$

一方、正規順序積については、やはりハウズドルフ公式を用いて、

$$\begin{aligned} N e^{\int d^4x J(x)\phi(x)} &= e^{\int d^4x J(x)\phi^-(x)} e^{\int d^4x J(x)\phi^+(x)} \\ &= e^{\int d^4x J(x)\phi(x)} e^{\frac{1}{2} \int d^4x d^4x' J(x)J(x')[\phi^-(x), \phi^+(x')]} . \end{aligned}$$

よって、これらから、

$$T e^{\int d^4x J(x)\phi(x)} = N e^{\int d^4x J(x)\phi(x)} e^{\frac{1}{2} \int d^4x d^4x' J(x)J(x')(\theta(t-t')[\phi(x), \phi(x')] - [\phi^-(x), \phi^+(x')])}$$

を得ますが、ここで $\theta(t-t')[\phi(x), \phi(x')] - [\phi^-(x), \phi^+(x')]$ はただの数なので、真空期待値をとって計算すればいいです：

$$\begin{aligned} &\theta(t-t')[\phi(x), \phi(x')] - [\phi^-(x), \phi^+(x')] \\ &= \langle 0 | (\theta(t-t')[\phi(x), \phi(x')] - [\phi^-(x), \phi^+(x')]) | 0 \rangle \\ &= \langle 0 | (\theta(t-t')[\phi(x), \phi(x')] + \phi(x')\phi(x)) | 0 \rangle \\ &= \langle 0 | T\phi(x)\phi(x') | 0 \rangle = \langle \phi(x)\phi(x') \rangle . \end{aligned}$$

これでウィックの定理が得られました。[証明終]

添字がわずらわしいので1つのスカラー場で紹介しましたが、ウィックの定理は一般に複数の異なる場に対しても成り立つことは容易に想像がつくでしょう：

$$T e^{\int d^4x J_i(x)\varphi_i(x)} = N e^{\int d^4x J_i(x)\varphi_i(x)} e^{\frac{1}{2} \int d^4x d^4x' J_j(x)J_k(x')\langle \varphi_j(x)\varphi_k(x') \rangle} .$$

16.13 ファインマン規則

一般に S 行列要素は、

$$\begin{aligned} \langle f | S | i \rangle &= \langle f | T e^{iS_I} | i \rangle = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \langle f | T (iS_I)^n | i \rangle \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} \int d^4x_1 d^4x_2 \cdots d^4x_n \langle f | T (i\mathcal{L}_I(x_1))(i\mathcal{L}_I(x_2)) \cdots (i\mathcal{L}_I(x_n)) | i \rangle \end{aligned}$$

と書けます。今までは結合定数が十分小さいと考え、摂動の最低次だけを扱っていたわけですが、ここでは高次の寄与がどのようなものか見ていきましょう。

上式のブラケット部分ですが、時間順序積をウィックの定理で展開するといくつかの伝播関数と1つの正規順序積を生じます。正規順序積のブラケット部分、 $\langle f|N\varphi\varphi\cdots\varphi|i\rangle$ は今まで行ってきたように、生成消滅の対の組み合わせを考え、それらの寄与の和になります。 d^4x_1, d^4x_2, \cdots の積分を行うとデルタ関数を生じ、伝播関数の d^4k 積分のいくつかが実行できるなど...。これらのことを丁寧に考えると、 $\langle f|S|i\rangle$ に対する散乱振幅 \mathfrak{M} の摂動 n 次は次のようなグラフ的な規則で与えられます。

簡単のためスカラー4乗模型を例に書きます。

- 始状態および終状態の粒子をそれぞれ端点とみなす。端点には線が1本入る。さらに n 個の頂点 (vertex) を用意する。頂点には線が4本入る (相互作用項が ϕ^4 だから)。端点と端点を結ぶ線 (直結線) は許されない。端点と非連結な部分 (真空泡) を持つグラフは除外する。端点は区別するが頂点は区別しない (指数関数展開から来た $1/n!$ 因子のため)。この制約のもとで可能なグラフを書く。グラフを1つも書けない場合は n 次の摂動は0である。端点と頂点を結ぶ線を外線、頂点と頂点を結ぶ線を内線と呼ぶ。
- 始状態の端点からはその粒子が持つ4元運動量が入り、終状態の端点からはその粒子が持つ4元運動量が出てゆく。頂点における4元運動量の流入流出量は等しい。(回路計算の電流と同様。各頂点に対応する時空座標 x で積分したときデルタ関数を生じるため。)
- 各頂点には $-i\lambda/4!$ を付与する。各内線には、そこに流れる4元運動量を k^μ として $i/(k^2 - m^2 + i\epsilon)$ を付与する (スカラー場の伝播関数から来ている)。頂点と線を繋ぐ場合の数である統計因子を付与する。以上の因子を掛け合わせ、不確定な4元運動量については $\int d^4k/(2\pi)^4$ により積分する。
- 可能なグラフについてこれらを足し合わせる。それが散乱振幅 \mathfrak{M} の n 次の摂動となる。

これをファインマン規則といいます。例をもって確認しましょう。

いま、 $\phi\phi \rightarrow \phi\phi$ という2粒子散乱を考えると、まず $n = 1$ のとき、可能なグラフは図16.1の(a)だけです。その式は、頂点因子 $-i\lambda/4!$ と統計因子 $4!$ の積で $-i\lambda$ となり、これが \mathfrak{M} の摂動1次 (最低次) になります。この結果はすでに行った計算と同じです。

統計因子を求める際は、頂点は点というより、線の端を差し込むための区別される4つの穴が設けてあるジョイントのようなものと想像してください。図16.1(a)

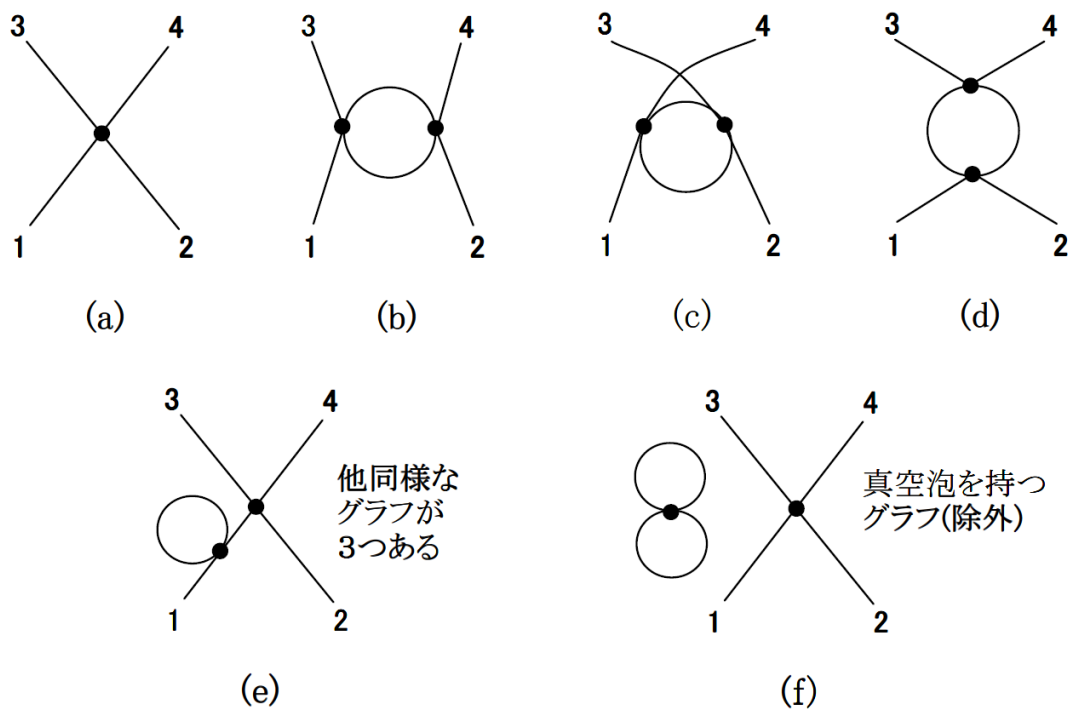


図 16.1: ファインマングラフ

の場合、各外線を頂点のどの穴に差し込むか、その場合の数が $4!$ 通りで、これがこのグラフの統計因子になるわけです。

$n = 2$ になると、グラフは図 16.1(b) ~ (e) の、合計 7 個になります。(b) の統計因子を考えてみましょう。ループを作る 2 本の内線は区別されませんから、 $(4!)^2$ では数えすぎです。実際にはこれを内線を区別する場合の数 $2!$ で割る必要があります。あるいは各外線が頂点のどの穴に差し込まれるかを順に考え、残った穴を内線がどういう組み合わせで結ぶかと考えて、 $({}_4P_2)^2 \times 2$ としても同じです。統計因子の導出は間違えやすいので、複数の異なったやり方で数えて検算した方がいいでしょう。

結果、(b) の式は、

$$(b) = \frac{(4!)^2}{2!} \left(\frac{-i\lambda}{4!} \right)^2 \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{i}{k^2 - m^2 + i\epsilon} \frac{i}{(k_3 - k_1 - k)^2 - m^2 + i\epsilon}$$

となります。被積分関数が運動量の大きいところで $1/k^4$ の振舞いであるため、この積分は発散します(紫外発散)。ループグラフ(積分のあるグラフ)ではこういうことが起こり得ます。しかし摂動としての補正が無限大では、これら計算が無意味になってしまいます。

16.14 くりこみ処方

ところがいくつかの理論においては、上で現れるような無限大を計算の工夫により消し去り、意味のある有限な補正だけを取り出すことができます。この工夫を、くりこみ処方といい、この工夫ができる理論をくりこみ可能であるといいます。

詳しくは、くりこみ理論の章に譲りますが、重要なことは、くりこみ処方はツリーグラフ(積分のないグラフ)による結果には影響を与えないということです。つまり、理論がくりこみ可能なら、ツリーにおける結果は正しい摂動計算であるということです。また、くりこみ可能でない場合でも、考えている理論があるくりこみ可能な理論の近似理論になっているという場合が考えられます。この場合でもやはりツリーにおける結果は信用できることとなります(弱い相互作用の近似理論など)。

スカラー4乗模型や2スカラー模型はくりこみ可能です。スカラー4乗模型のくりこみについては、くりこみ理論の章を参照してください。一方、2スカラー模型においては、結合定数 g が正の質量次元を持ち、このため発散するグラフが有限個になり、容易にくりこみできることが判明します。このような理論は超くりこみ可能と呼ばれます。

一方、結合定数が負の質量次元を持つ理論は、発散するグラフの種類が無数に存在し、通常、くりこみが不可能であると考えられます。重力場の量子論や、時空が5次元以上の場合のゲージ場の量子論がこれに相当します。

16.15 真空泡グラフ

図 16.1(f) のグラフですが、これは真空泡を持つので除外されます。どうして除外されるのか説明します。

$\langle 0|S|0\rangle$ は真空が真空に遷移する確率振幅を意味するので、エネルギー保存からその大きさは1です。真空は唯一のエネルギー最低の状態だと考えられるからです。

いま、除外規則なしで $\langle 0|S|0\rangle$ を構成する全てのグラフを書き出せば、それは真空泡だけのグラフの集合になります。一方、真空泡を含まない全てのグラフの和に真空泡だけの全てのグラフの和をかければ、真空泡を含んでもよい全てのグラフの和になるので、

$$\langle f|S|i\rangle = \langle 0|S|0\rangle \times \langle f|S|i\rangle'.$$

ここで $\langle f|S|i\rangle'$ は真空泡を含まない全てのグラフの和から計算された S 行列要素です。 $\langle 0|S|0\rangle$ の大きさは1だったので、

$$|\langle f|S|i\rangle| = |\langle f|S|i\rangle'|.$$

よって、真空泡を含むグラフを除外しても、それは本来の S 行列要素と大きさが同じ(位相だけの違い)なので、簡単のため除外して計算しましょうというわけです。

16.16 2スカラーモデルにおける散乱

せっかくファインマン規則を得たので、ちゃんと結果の出せる例を1つだけ見ておきましょう。2スカラーモデル、

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \partial_\mu \Phi \partial^\mu \Phi - \frac{M^2}{2} \Phi^2 + \frac{1}{2} \partial_\mu \phi \partial^\mu \phi - \frac{m^2}{2} \phi^2 + \frac{g}{2} \Phi \phi^2$$

における $\phi\phi \rightarrow \phi\phi$ 散乱です。相互作用項は $\mathcal{L}_I = (g/2)\Phi\phi^2$ でした。

結合定数 g の1次ではグラフが書けず、 g の2次においては図16.2の3つのグラフを書くことができます。これが摂動の最低次になります。

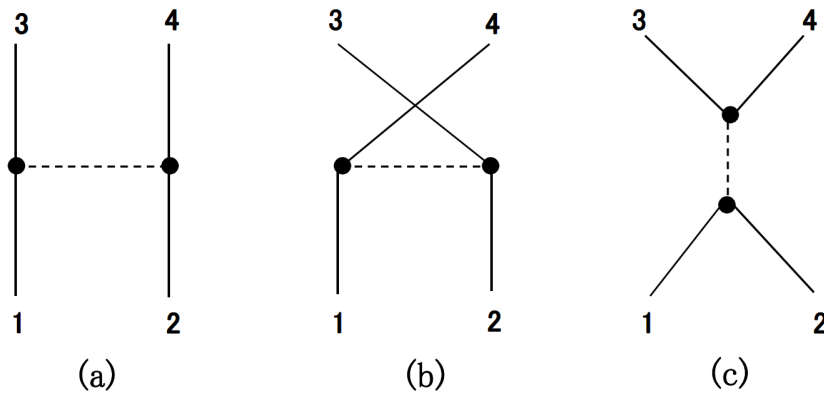


図 16.2: 2スカラーモデルにおける散乱

ϕ の線を実線で、 Φ の線を点線で表しています。頂点には、 ϕ の線が2本、 Φ の線が1本繋がるわけです。統計因子は各頂点で2を生じるので、散乱振幅は、

$$\mathfrak{M} = 2^2 \left(\frac{ig}{2} \right)^2 \left(\frac{i}{(k_3 - k_1)^2 - M^2} + \frac{i}{(k_4 - k_1)^2 - M^2} + \frac{i}{(k_1 + k_2)^2 - M^2} \right)$$

となるでしょう。 $i\epsilon$ はツリーグラフでは $\epsilon \rightarrow +0$ の極限をとって消してしまって問題ありません。 ϕ 粒子の質量は十分小さいとし ($m \sim 0$)、重心系をとって ϕ 粒子の入射運動量 k と散乱角 θ を使って書けば、

$$\begin{aligned} \mathfrak{M} &= ig^2 \left(\frac{1}{M^2 + 2k_1 \cdot k_3} + \frac{1}{M^2 + 2k_1 \cdot k_4} + \frac{1}{M^2 - 2k_1 \cdot k_2} \right) \\ &= ig^2 \left(\frac{1}{M^2 + 2|\mathbf{k}|^2(1 - \cos \theta)} + \frac{1}{M^2 + 2|\mathbf{k}|^2(1 + \cos \theta)} + \frac{1}{M^2 - 4|\mathbf{k}|^2} \right). \end{aligned}$$

よって散乱断面積は、散乱角の定義域が $0 < \theta < \pi/2$ であることに注意して、

$$\sigma = 2\pi \int_0^{\pi/2} d\theta \sin\theta \frac{|\mathfrak{M}|^2}{64\pi^2(2|\mathbf{k}|)^2} = \frac{g^4}{128\pi M^6} \frac{J(x)}{x^2} \Big|_{x=|\mathbf{k}|/M}$$

$$\text{ここで } J(x) = \int_0^1 dy \left(\frac{1}{1+2x^2(1-y)} + \frac{1}{1+2x^2(1+y)} + \frac{1}{1-4x^2} \right)^2$$

となります。グラフを図 16.3 に示します。

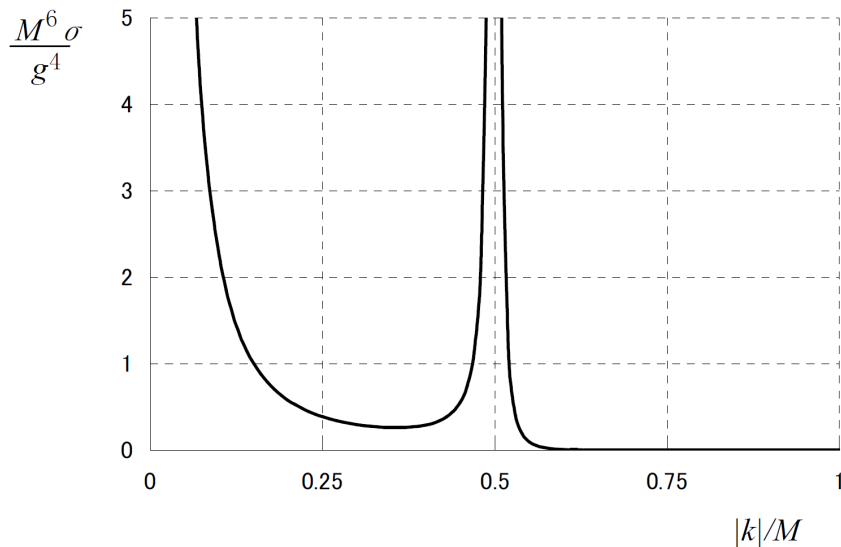


図 16.3: 2 スカラー模型の断面積

断面積は大局的には $|k|$ の増加にともなって減少しますが、 $|k| = M/2$ の付近で急激に大きい値を取ります。この極が 3 番目のグラフ (図 16.2(c)) から来ていることからわかるように、この付近のエネルギーだと ϕ 粒子が仮想的に対消滅・対生成を行い散乱をするため、断面積が飛びぬけて大きくなるわけです。このような現象は一般に共鳴と呼ばれ、素粒子存在のシグナルと考えられます。例えば Φ 粒子が極めて不安定で、その飛跡が確認されない場合でも、 ϕ 粒子の 2 体散乱の断面積を観測することで、 Φ 粒子の存在とその質量を推測することができるわけです。

16.17 複素スカラー場

ここで、複素スカラー場 $\phi(x)$ の理論、

$$\mathcal{L} = \partial_\mu \phi^*(x) \partial^\mu \phi(x) - m^2 \phi^*(x) \phi(x)$$

について簡単に触れておきます。場の方程式は、 $\phi(x)$ についても $\phi^*(x)$ についても同じになり、クライン・ゴールドン方程式、

$$(\square + m^2)\phi(x) = 0$$

を与えます。ただし $\phi(x)$ は複素数ですから、一般解は、

$$\phi(x) = \int \frac{d^3\mathbf{k}}{(2\pi)^3 2k^0} \left(a(\mathbf{k}) e^{-ik \cdot x} + b^*(\mathbf{k}) e^{ik \cdot x} \right), \quad k^0 = \sqrt{|\mathbf{k}|^2 + m^2}$$

のように、2つの複素数(量子論では代数) $a(\mathbf{k})$, $b(\mathbf{k})$ を用いて表されることとなります。 $\phi(x)$ の正準共役が $\dot{\phi}^*(x)$, また、 $\phi^*(x)$ の正準共役が $\dot{\phi}(x)$ であることに注意すると、正準交換関係は、

$$\begin{aligned} [\phi(x), \dot{\phi}^*(x')]_{t=t'} &= i\delta^3(\mathbf{r} - \mathbf{r}'), \\ [\phi(x), \phi(x')]_{t=t'} &= [\dot{\phi}(x), \dot{\phi}(x')]_{t=t'} = 0 \end{aligned}$$

で与えられ、これは、

$$\begin{aligned} [a(\mathbf{k}), a^*(\mathbf{k}')] &= (2\pi)^3 2k^0 \delta^3(\mathbf{k} - \mathbf{k}'), \\ [b(\mathbf{k}), b^*(\mathbf{k}')] &= (2\pi)^3 2k^0 \delta^3(\mathbf{k} - \mathbf{k}') \quad (\text{他は可換}) \end{aligned}$$

において満たされるでしょう。

複素スカラー場のラグランジアン密度は、 $\delta\phi(x) = -i\theta\phi(x)$ という位相変換に関して不変なので、これに対応して、

$$J^\mu = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial_\mu \phi^*} i\dot{\phi}^* + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial_\mu \phi} (-i\dot{\phi}) = i\dot{\phi}^* \partial^\mu \phi - i\dot{\phi} \partial^\mu \phi^*$$

が保存カレントになります。よって、

$$N = \int d^3\mathbf{r} J^0 = \int d^3\mathbf{r} \left(i\dot{\phi}^* \dot{\phi} - i\dot{\phi} \dot{\phi}^* \right)$$

が保存量になり、粒子数と呼ばれます。一般解を代入して整理すると、

$$N = \int \frac{d^3\mathbf{k}}{(2\pi)^3 2k^0} \left(a^*(\mathbf{k})a(\mathbf{k}) - b^*(\mathbf{k})b(\mathbf{k}) \right)$$

を得るでしょう。 $a^*(\mathbf{k})$ で生成される粒子は粒子数 +1 ですが、 $b^*(\mathbf{k})$ で生成される粒子は粒子数 -1 を持つことがわかります。前者を正粒子、後者を反粒子と呼びます。

ところで複素スカラー場を、

$$\phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2}} (\phi_1(x) + i\phi_2(x))$$

と、実部と虚部分けてやると、ラグランジアン密度は、

$$\mathcal{L} = \sum_{i=1,2} \left(\frac{1}{2} \partial_\mu \phi_i(x) \partial^\mu \phi_i(x) - \frac{m^2}{2} \phi_i^2(x) \right)$$

となるので、複素スカラー場の理論は、質量が等しい実スカラー場2つを持つ理論と等価です。実スカラー場 $\phi_i(x)$ の消滅演算子を $a_i(\mathbf{k})$ と書くと、

$$a(\mathbf{k}) = \frac{1}{\sqrt{2}} (a_1(\mathbf{k}) + ia_2(\mathbf{k})), \quad b(\mathbf{k}) = \frac{1}{\sqrt{2}} (a_1(\mathbf{k}) - ia_2(\mathbf{k}))$$

という関係になっているので、

$$a^*(\mathbf{k})a(\mathbf{k}) + b^*(\mathbf{k})b(\mathbf{k}) = a_1^*(\mathbf{k})a_1(\mathbf{k}) + a_2^*(\mathbf{k})a_2(\mathbf{k}).$$

このことから、4元運動量 P^μ に関して、

$$P^\mu = \int \frac{d^3\mathbf{k}}{(2\pi)^3 2k^0} k^\mu (a^*(\mathbf{k})a(\mathbf{k}) + b^*(\mathbf{k})b(\mathbf{k})) + 2V_0\delta_0^\mu$$

であり、正粒子も反粒子も4元運動量 k^μ を持つことがわかります。

(余談) 核力を媒介する荷電 π 粒子は近似的に複素スカラー場で記述され、正粒子に相当する粒子が π^+ で、反粒子に相当する粒子が π^- になります。これらは電荷が逆だけで、まったく同じ質量を持つわけです。また、中性の π 粒子 π^0 もあり、こちらは実スカラー場で記述されます。一方で、物質の構成要素である電子や陽子や中性子などは、スピンを持つため、スカラー場の粒子とは同定できません。詳しくは量子電磁気学と素粒子論の章で説明します。

16.18 自発的対称性の破れ

実スカラー場 $\phi(x)$ に関する一般的なラグランジアン密度は、

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \partial_\mu \phi \partial^\mu \phi - U(\phi), \quad U(\phi) = c_0 + c_1 \phi + c_2 \phi^2 + c_3 \phi^3 + \dots$$

のように書けます。 $U(\phi)$ はポテンシャル項で、一般に場 $\phi(x)$ の多項式ですが、最小値を持つものとし、すなわち底なしのポテンシャルは許されないものとします。そうすると、場の再定義： $\phi(x) \rightarrow \phi(x) + c$ (c は実数) によって場の基準点をポテンシャルの極小点に選ぶことにより、一般性を失うことなく、

$$c_1 = 0, \quad c_2 = \frac{m^2}{2} \geq 0$$

を仮定できます。このとき $m (\geq 0)$ は場の粒子の質量を意味し、 c_0 は真空のエネルギー密度、 c_3, c_4, \dots は相互作用項の結合定数を意味します。

スカラー場の量子論は、一般にこのような処理をしてから行うと考えるわけで、それゆえ $c_2 < 0$ というタキオン(超光速粒子)の存在を意味する状況は原理的にあり得ないわけです。

次に、複素スカラー場 $\phi(x)$ に対して、

$$\mathcal{L} = \partial_\mu \phi^* \partial^\mu \phi - U(|\phi|), \quad U(|\phi|) = a|\phi|^2 + b|\phi|^4$$

というラグランジアン密度を考えてみましょう。ここで a, b は実数です。 \mathcal{L} は位相変換：

$$\phi'(x) = e^{-i\theta} \phi(x)$$

に関して不変で、すなわちグローバル $U(1)$ 対称性を持っています。 $a \geq 0$ のときは、 $a = m^2$ とおくことで、 m は場の粒子の質量を意味することになります。では $a < 0$ のときはどうなるでしょうか？

$a < 0, b > 0$ のとき、ポテンシャルは図 16.4 のようにワインボトルの底のような形状になっていて、 $\phi = 0$ は最小値を与えません。最小値は $|\phi| = \sqrt{-a/2b}$ において与えられ、場の位相を考えるとこのような点は無限にあります(図の点線部)。

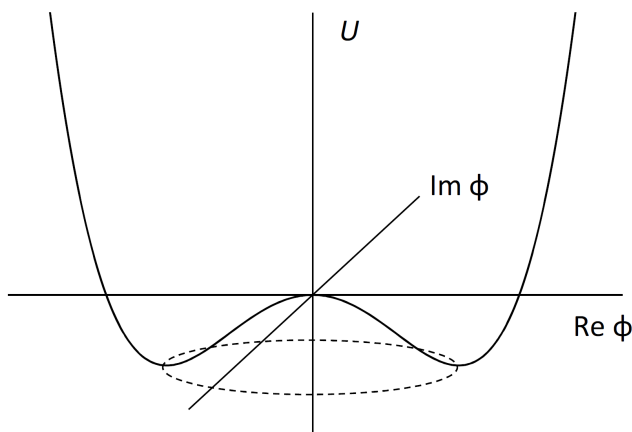


図 16.4: ポテンシャル関数

このことに注意し、複素スカラー場を、

$$\phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2}} (v + \varphi(x) + i\chi(x)), \quad v = \sqrt{-a/b}$$

と展開してみます。ここで $\varphi(x), \chi(x)$ は実スカラー場です。このとき、

$$U(|\phi|) = -\frac{1}{4}bv^4 + bv^2\varphi^2 + \dots$$

を得るでしょう。ここで \dots は場の3次以上の項を意味します。さらに、

$$\partial_\mu \phi^* \partial^\mu \phi = \frac{1}{2} \partial_\mu \varphi \partial^\mu \varphi + \frac{1}{2} \partial_\mu \chi \partial^\mu \chi$$

となることに注意すると、結局、ラグランジアン密度は、

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \partial_\mu \chi \partial^\mu \chi + \frac{1}{2} \partial_\mu \varphi \partial^\mu \varphi - bv^2 \varphi^2 + (\text{定数と場の3次以上})$$

となります。 $\chi(x)$ の場の粒子は零質量で、 $\varphi(x)$ の場の粒子は質量 $\sqrt{2b}v$ を持つことがわかります。

もともとあった $U(1)$ 対称性が、場の 2 次だけを考える限りは消えてしまっていることに注意してください。これは曲線 $|\phi| = \sqrt{-a/2b}$ 上の一点を選んだからですが、しかしそうしなければ場の展開ができません。このような現象を自発的対称性の破れといいます。正確には、対称性は破れたのではなく、複雑な形になり潜在化したわけです。

また、ポテンシャルの最小値を与える点が連続無限個あったことから、零質量粒子が生じるのは必然と考えられます。上の例では、図 16.4 の点線部に沿った方向の 2 次導関数が 0 であるため、場 $\chi(x)$ は質量項を持たないわけです。一般に自発的対称性の破れにより生じる零質量粒子を南部・ゴールドストーンボゾンといいます。

さらにいまの場合、 $\langle 0|\varphi(x)|0\rangle = \langle 0|\chi(x)|0\rangle = 0$ ということになるので、もとの複素スカラー場 $\phi(x)$ に対し、

$$\langle 0|\phi(x)|0\rangle = \frac{v}{\sqrt{2}} \neq 0$$

です。すなわち自発的対称性の破れは、対称性を有していた場の (摂動論的な) 真空期待値が 0 にならないことで特徴付けられます。このような真空は南部・ゴールドストーン相にあると呼ばれます。一方、 $a \geq 0$ の場合は、

$$\langle 0|\phi(x)|0\rangle = 0$$

となりますが、このような真空はウィグナー相にあると呼ばれます。

(余談) くりこみ理論を考えると、一般に場の相互作用系に含まれるパラメータの有効値はエネルギースケールによって変化します。このため系の温度によってパラメータの有効値が変化し、真空がウィグナー相から南部・ゴールドストーン相に変化する可能性が考えられます。このような現象を真空の相転移といいます。

索引

あ	
ウィグナー相	25
ウィックの定理	15
エネルギー運動量テンソル	4
オイラー・ラグランジュ方程式	3
off-shell	13
おもちゃの模型	12
on-shell	13
か	
外線	17
階段関数	12
共鳴	21
クライン・ゴールドン方程式	5
くりこみ処方	19
結合定数	9
さ	
散乱振幅	8
紫外発散	18
実スカラー場	4
質量殻外	13
質量殻上	13
自発的対称性の破れ	25
自由部分	9
寿命	11
真空泡	17
真空のエネルギー	7
真空の相転移	25
スカラー場	4
スカラー 4 乗模型	9
ステップ関数	12
正規順序積	14
正振動数部分	14
正粒子	22
全幅	11
相互作用項	9
相対論的	5
ソース	15
た	
タキオン	23
端点	17
超くりこみ可能	19
超対称性	8
頂点	17
直結線	17
2 スカラー模型	11
ツリーグラフ	19
伝播関数	12
統計因子	17
同時刻交換関係	4
等方散乱	10
な	
内線	17
南部・ゴールドストーン相	25
南部・ゴールドストーンボゾン	25
2 スカラー模型	11
ネーターの定理	4
は	
ハウズドルフ公式	14
半減期	11
反粒子	22
ファインマン規則	17
複素スカラー場	21
負振動数部分	14
不変規格化	6
崩壊定数	11
崩壊幅	11
ら	
ラグランジアン密度	3
粒子数	22
ループグラフ	18