

あもんノート

ユークリッド幾何学、ニュートン力学から、相対論、量子論、素粒子論、宇宙論、そして超ひも理論まで、理論物理学を簡潔にかつ幅広く網羅したノートです。TOP へは下の URL をクリックして行けます。専用の画像掲示板で、ご意見、ご質問等も受け付けております。

<http://amonphys.web.fc2.com/>

目次

第 14 章	散乱問題	3
14.1	微分断面積	3
14.2	球体との衝突	3
14.3	ラザフォード散乱	4
14.4	シュレーディンガー場とクーロン相互作用	5
14.5	相互作用表示と S 行列	6
14.6	散乱振幅	7
14.7	異なる粒子の散乱	10
14.8	同種粒子の散乱	12

第14章 散乱問題

散乱の実験は、原子、原子核、素粒子の構造や、それらに関わる相互作用の性質を調べるにあたってポピュラーな方法であり、その理論的計算は特に素粒子論において重要になります。ここでは比較的簡単な、ニュートン理論、およびシュレーディンガー場の量子論に基づく非相対論的な散乱を紹介します。

14.1 微分断面積

遠方から粒子を入射し、原点付近のポテンシャルによって散乱する過程を考えます。いま、3次元直交座標を (x, y, z) とし、 z 軸の負の方向から z 軸にそって入射したとすると、入射の仕方は x, y によって特徴づけられます。一方、散乱する方向を、3次元極座標において θ, ϕ とすると、これらは x, y の関数で与えられるはずで、これは写像 $\mathbb{R}^2 \rightarrow S^2$ (球面) を成します。

入射するビームに関して微小な断面積 $d\sigma = dx dy$ を考えれば、対応する散乱の方向は、微小な立体角 $d\Omega = \sin\theta d\theta d\phi$ を持つはずで、このとき、これらの比 $d\sigma/d\Omega$ を微分断面積といいます。これは散乱過程における重要な指標になります。ビームが一様であれば、これは各方向に粒子がやってくる頻度を意味するからです。

ポテンシャルが z 軸に関して軸対称である場合は、入射の仕方は基本的に、

$$b = \sqrt{x^2 + y^2}$$

だけで特徴づけられます。これを衝突パラメータといいます。一方、散乱する方向は θ だけで特徴づけられます。これを散乱角といいます。このとき微分断面積は、

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{b db d\phi}{\sin\theta d\theta d\phi} = \frac{b}{\sin\theta} \left| \frac{db}{d\theta} \right|$$

となります。

14.2 球体との衝突

簡単な例として、半径 R の動かない球体に、質点とみなせる粒子が弾性衝突する場合を考えましょう。粒子は z 軸の負の方向から入射したとします。もし粒子

が球と衝突しなければ、粒子は z 軸の正の方向に抜けるだけです。衝突する条件は、衝突パラメータを b として $b < R$ です。いま、球と粒子が図 14.1 のように衝突したと考えれば、衝突パラメータ b と散乱角 θ の関係は、 $b = R \cos(\theta/2)$ となることが幾何学的にわかるでしょう。

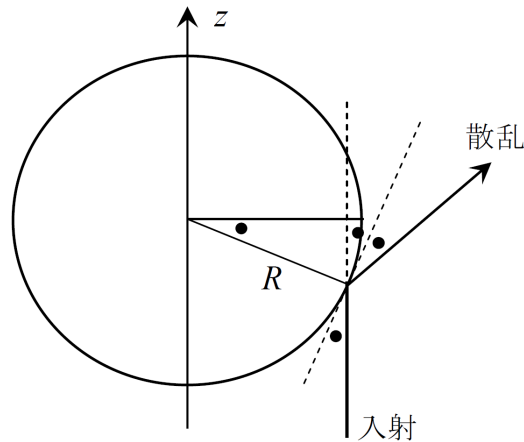


図 14.1: 球体との衝突

よって微分断面積は、

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{b}{\sin \theta} \left| \frac{db}{d\theta} \right| = \frac{R \cos(\theta/2)}{\sin \theta} \left| -\frac{R \sin(\theta/2)}{2} \right| = \frac{R^2}{4}.$$

これは θ に依存しません。このことはある程度の断面積を持ったビームを入射すれば、全ての方向にまんべんなく (等方的に) 散乱されるということを意味しています。

また、上式を立体角で積分すれば、

$$\sigma = \int d\Omega \frac{d\sigma}{d\Omega} = \pi R^2$$

となり、これは球体の断面積に他なりません。

14.3 ラザフォード散乱

無限遠方から粒子がやってきて、原点を中心とする逆 2 乗力の作用を受けて曲がり、再び無限遠方に飛び去る過程を考えてみましょう。このような散乱はラザフォード散乱と呼ばれます。

質量 m , 外部ポテンシャルが、 $U = -C/r$ の場合における粒子の軌道の式は、

$$r = \frac{J^2/mC}{1 - \epsilon \sin \phi}, \quad \epsilon = \left(1 + \frac{2EJ^2}{mC^2} \right)^{1/2}$$

でした (ニュートン力学の章参照)。ここで E はエネルギー、 J は角運動量の大きさです。 $r \rightarrow \infty$ とすると、

$$\sin \phi = \epsilon^{-1} = \left(1 + \frac{2EJ^2}{mC^2} \right)^{-1/2}.$$

この式の1つの解 ϕ に対し、もう1つの解は $\pi - \phi$ です。これらは入射方向と散乱方向を意味するので、散乱角は $\theta = 2\phi$ ということになります。一方、衝突パラメータを b 、遠方における粒子の速さを v とすると、 $E = (1/2)mv^2$ 、 $J = mbv$ ですから、 $J^2 = 2mEb^2$ がわかります。以上から、

$$\sin(\theta/2) = \left(1 + \frac{4E^2b^2}{C^2} \right)^{-1/2} \quad \therefore b = \frac{|C|}{2E \tan(\theta/2)}.$$

これが衝突パラメータ b と散乱角 θ の関係式です。よって微分断面積は、

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{b}{\sin \theta} \left| \frac{db}{d\theta} \right| = \left(\frac{C}{4E} \right)^2 \frac{1}{\sin^4(\theta/2)}$$

と計算されます。これは $\theta = 0 \sim \pi$ に対して単調減少する関数であり、粒子が大きく曲がる場合ほどその頻度が小さいことがわかります。

ラザフォードは、金属箔に入射された α 線の散乱の様子がこの式と符合することから、原子の中心に小さな荷電核 (原子核) が存在することを予測したわけです。

14.4 シュレーディンガー場とクーロン相互作用

次に量子論における散乱問題を考えていきます。

一般に複数のシュレーディンガー場 $\psi_{as}(\mathbf{r})$ があるとします。添字 a は複数のシュレーディンガー場を区別するもので、 s はスピン座標です。ラグランジアンは、

$$L = \sum_a \int d^3\mathbf{r} \left(i\psi_a^\dagger(\mathbf{r})\dot{\psi}_a(\mathbf{r}) - \frac{1}{2m_a} \nabla\psi_a^\dagger(\mathbf{r}) \cdot \nabla\psi_a(\mathbf{r}) \right).$$

外部ポテンシャル $U(\mathbf{r})$ や自己相互作用 (場の3次以上の項) のないこのような場の理論は自由場の理論と呼ばれます。生成される粒子が力を受けない自由粒子になるからです。得られる運動方程式:

$$i\dot{\psi}_a(\mathbf{r}) = -\frac{1}{2m_a} \Delta\psi_a(\mathbf{r})$$

の一般解は、次のような平面波展開で与えられます:

$$\psi_{as}(\mathbf{r}) = \int \frac{d^3\mathbf{k}}{(2\pi)^3} c_{as}(\mathbf{k}) e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r} - i\epsilon_a(\mathbf{k})t}, \quad \epsilon_a(\mathbf{k}) = \frac{|\mathbf{k}|^2}{2m_a}.$$

また、正準交換関係は、

$$[\psi_{as}(\mathbf{r}), \psi_{a's'}^*(\mathbf{r}')] = \delta_{aa'} \delta_{ss'} \delta^3(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \quad (\text{他は可換})$$

なので、生成消滅演算子の交換関係は、

$$[c_{as}(\mathbf{k}), c_{a's'}^*(\mathbf{k}')] = (2\pi)^3 \delta_{aa'} \delta_{ss'} \delta^3(\mathbf{k} - \mathbf{k}') \quad (\text{他は可換})$$

で与えられます。実際このとき、

$$\begin{aligned} [\psi_{as}(\mathbf{r}), \psi_{a's'}^*(\mathbf{r}')] &= \int \frac{d^3\mathbf{k}}{(2\pi)^3} \int \frac{d^3\mathbf{k}'}{(2\pi)^3} [c_{as}(\mathbf{k}), c_{a's'}^*(\mathbf{k}')] e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r} - i\epsilon_a(\mathbf{k})t} e^{-i\mathbf{k}'\cdot\mathbf{r}' + i\epsilon_{a'}(\mathbf{k}')t} \\ &= \int \frac{d^3\mathbf{k}}{(2\pi)^3} \int d^3\mathbf{k}' \delta_{aa'} \delta_{ss'} \delta^3(\mathbf{k} - \mathbf{k}') e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r} - i\mathbf{k}'\cdot\mathbf{r}' - i\epsilon_a(\mathbf{k})t + i\epsilon_{a'}(\mathbf{k}')t} \\ &= \delta_{aa'} \delta_{ss'} \int \frac{d^3\mathbf{k}}{(2\pi)^3} e^{i\mathbf{k}\cdot(\mathbf{r} - \mathbf{r}')} = \delta_{aa'} \delta_{ss'} \delta^3(\mathbf{r} - \mathbf{r}'). \end{aligned}$$

ただしフェルミオンの場合は、交換子ではなく、反交換子で与えられるものとします。

クーロン相互作用がある場合は、もとのラグランジアンに、

$$L_I = -\frac{1}{2} \int d^3\mathbf{r} d^3\mathbf{r}' \frac{J(\mathbf{r})J(\mathbf{r}')}{4\pi|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}, \quad J(\mathbf{r}) = \sum_a q_a \psi_a^\dagger(\mathbf{r})\psi_a(\mathbf{r})$$

が加わります。 q_a は電荷で、よって $J(\mathbf{r})$ は電荷密度を意味します。クーロン相互作用のハミルトニアンへの寄与は、符号が逆になり、

$$H_I = \frac{1}{2} \int d^3\mathbf{r} d^3\mathbf{r}' \frac{J(\mathbf{r})J(\mathbf{r}')}{4\pi|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}$$

となります。

14.5 相互作用表示とS行列

ハイゼンベルグ方程式、 $\dot{A}(t) = i[H, A(t)]$ に注意すると、物理量の無限小時間発展は、

$$\begin{aligned} A(t + dt) &= A(t) + i(HA(t) - A(t)H) dt \\ &= (1 + iHdt)A(t)(1 - iHdt) = e^{iHdt} A(t) e^{-iHdt}. \end{aligned}$$

相互作用があってハミルトニアンが $H + H_I$ のときは、

$$A(t + dt) = e^{iH_I dt} e^{iH dt} A(t) e^{-iH dt} e^{-iH_I dt}$$

です。ところで一般に物理的に観測される量は $\langle \psi_2 | A | \psi_1 \rangle$ で与えられる c 数なので、相互作用による時間発展の効果の状態ベクトルに押し付けることができます：

$$|\psi\rangle_{t+dt} = e^{-iH_I dt} |\psi\rangle_t .$$

このとき物理量の時間発展は相互作用がない場合の、

$$A(t + dt) = e^{iH dt} A(t) e^{-iH dt}$$

にとどまり、すなわちハイゼンベルグ方程式 (運動方程式) が相互作用がない場合のものにとどまります。これを相互作用表示といいます。

時刻 t_I から t_F までの時間を Δt 間隔で N 等分して $t_F = t_N > t_{N-1} > \dots > t_0 = t_I$ と書けば、時刻 t_F における状態ベクトルは、

$$|\psi\rangle_{t_F} \sim e^{-iH_I(t_{N-1})\Delta t} e^{-iH_I(t_{N-2})\Delta t} \dots e^{-iH_I(t_0)\Delta t} |\psi\rangle_{t_I}$$

と近似されますが、これは、

$$|\psi\rangle_{t_F} \sim T e^{-i(H_I(t_{N-1})+H_I(t_{N-2})+\dots+H_I(t_0))\Delta t} |\psi\rangle_{t_I}$$

とも表せます。ここで記号 T は、それに続く場の積を時刻の値の大きい順に並べることがを意味し、時間順序積と呼ばれます。時間順序積の下では各時刻の H_I が全て可換とみなせるため、上のような変形ができるわけです。連続極限をとれば、

$$|\psi\rangle_{t_F} = T \exp\left(-i \int_{t_I}^{t_F} H_I(t) dt\right) |\psi\rangle_{t_I}$$

と書けます。 $t_I \rightarrow -\infty, t_F \rightarrow +\infty$ とすれば、

$$|\psi\rangle_{+\infty} = S |\psi\rangle_{-\infty}, \quad S = T \exp\left(-i \int dt H_I(t)\right)$$

となり、 S は S 行列 (S マトリックス) と呼ばれます。行列とはいっても、もちろん抽象的な演算子なのですが...

14.6 散乱振幅

状態 $|\mathbf{k}, s\rangle = c_{1s}^*(\mathbf{k})|0\rangle$ は、運動量が \mathbf{k} , スピンが s の粒子が 1 個だけある状態で、その直交性は、

$$\langle \mathbf{k}, s | \mathbf{k}', s' \rangle = (2\pi)^3 \delta_{ss'} \delta^3(\mathbf{k} - \mathbf{k}')$$

となります。これに注意すると、1 粒子状態の上で、

$$\sum_s \int \frac{d^3\mathbf{k}}{(2\pi)^3} |\mathbf{k}, s\rangle \langle \mathbf{k}, s| = 1$$

がわかり、すなわち左辺は1粒子状態への射影演算子になっています。運動量空間における測度が $(2\pi)^{-3}$ であることに注意して下さい。

そうすると、一般に異なる2粒子の状態、

$$|i\rangle = c_{1s_1}^*(\mathbf{k}_1)c_{2s_2}^*(\mathbf{k}_2)|0\rangle$$

があって、これが十分に時間経過した後、

$$|f\rangle = c_{1s_3}^*(\mathbf{k}_3)c_{2s_4}^*(\mathbf{k}_4)|0\rangle$$

に遷移する微小確率は、

$$d\Gamma = \frac{|\langle f|S|i\rangle|^2}{\langle i|i\rangle} \frac{d^3\mathbf{k}_3}{(2\pi)^3} \frac{d^3\mathbf{k}_4}{(2\pi)^3}$$

と書けます。ここで S はS行列です。また、この遷移においてエネルギーと運動量が共に保存することに注意して、

$$\begin{aligned} \langle f|S|i\rangle &= (2\pi)^4 \delta(\epsilon_1(\mathbf{k}_3) + \epsilon_2(\mathbf{k}_4) - \epsilon_1(\mathbf{k}_1) - \epsilon_2(\mathbf{k}_2)) \\ &\quad \times \delta^3(\mathbf{k}_3 + \mathbf{k}_4 - \mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_2) \mathfrak{M} \end{aligned}$$

とおき、 \mathfrak{M} を定義します。 \mathfrak{M} は散乱振幅と呼ばれます。

系の体積を $V(\rightarrow \infty)$ 、散乱時間を $T(\rightarrow \infty)$ とすると、

$$\langle i|i\rangle = \langle 0|c_{2s_2}(\mathbf{k}_2)c_{1s_1}(\mathbf{k}_1)c_{1s_1}^*(\mathbf{k}_1)c_{2s_2}^*(\mathbf{k}_2)|0\rangle = ((2\pi)^3\delta^3(\mathbf{0}))^2 = V^2$$

および、

$$\begin{aligned} |\langle f|S|i\rangle|^2 &= (2\pi)^8 \delta(0)\delta^3(\mathbf{0}) \delta(\epsilon_1(\mathbf{k}_3) + \epsilon_2(\mathbf{k}_4) - \epsilon_1(\mathbf{k}_1) - \epsilon_2(\mathbf{k}_2)) \\ &\quad \times \delta^3(\mathbf{k}_3 + \mathbf{k}_4 - \mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_2) |\mathfrak{M}|^2 \\ &= (2\pi)^4 TV \delta(\epsilon_1(\mathbf{k}_3) + \epsilon_2(\mathbf{k}_4) - \epsilon_1(\mathbf{k}_1) - \epsilon_2(\mathbf{k}_2)) \\ &\quad \times \delta^3(\mathbf{k}_3 + \mathbf{k}_4 - \mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_2) |\mathfrak{M}|^2. \end{aligned}$$

ここで、少しトリッキーですが、

$$\lim_{\mathbf{k}\rightarrow\mathbf{0}} \delta^3(\mathbf{k}) = \lim_{\mathbf{k}\rightarrow\mathbf{0}} \int \frac{d^3\mathbf{r}}{(2\pi)^3} e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} = \int \frac{d^3\mathbf{r}}{(2\pi)^3} = \frac{V}{(2\pi)^3}$$

のように評価しました。同様にエネルギー次元(時間の逆次元)の量 ϵ に対して、 $\lim_{\epsilon\rightarrow 0} \delta(\epsilon) = T/(2\pi)$ です。

そうすると $d\Gamma$ の式は、

$$d\Gamma = \frac{T|\mathfrak{M}|^2}{4\pi^2V} \delta(\epsilon_1(\mathbf{k}_3) + \epsilon_2(\mathbf{k}_4) - \epsilon_1(\mathbf{k}_1) - \epsilon_2(\mathbf{k}_2)) d^3\mathbf{k}_3 \Big|_{\mathbf{k}_4=\mathbf{k}_1+\mathbf{k}_2-\mathbf{k}_3}$$

となるでしょう。 k_4 積分はすでに実行しました。考えている系を重心系とし、

$$\mathbf{k}_1 = -\mathbf{k}_2 = \mathbf{k}, \quad \mathbf{k}_3 = -\mathbf{k}_4 = \mathbf{k}'$$

とおけば、

$$d\Gamma = \frac{T|\mathfrak{M}|^2}{4\pi^2V} \delta\left(\frac{|\mathbf{k}'|^2 - |\mathbf{k}|^2}{2m_*}\right) |\mathbf{k}'|^2 d|\mathbf{k}'| d\Omega, \quad m_* = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}$$

となります。ここで $d\Omega$ は \mathbf{k}' の微小立体角、 m_* は2粒子の換算質量です。さらに、

$$s = \frac{|\mathbf{k}'|^2 - |\mathbf{k}|^2}{2m_*}$$

で積分変数を $|\mathbf{k}'|$ から s に変換すれば、

$$d\Gamma = \frac{T|\mathfrak{M}|^2}{4\pi^2V} m_* \sqrt{2m_* s + |\mathbf{k}|^2} \delta(s) ds d\Omega.$$

s 積分を実行して、

$$d\Gamma = \frac{T m_* |\mathbf{k}| |\mathfrak{M}|^2 d\Omega}{4\pi^2 V}$$

を得ます。

一方、2粒子の相対速度の大きさは、

$$v = v_1 + v_2 = \frac{|\mathbf{k}|}{m_1} + \frac{|\mathbf{k}|}{m_2} = \frac{|\mathbf{k}|}{m_*}$$

と書けるので、微小散乱断面積を $d\sigma$ とおくと、散乱の微小確率は、

$$d\Gamma = \frac{v T d\sigma}{V} = \frac{T |\mathbf{k}| d\sigma}{V m_*}$$

と表されます^(*)。以上2つの $d\Gamma$ の式を比較し、

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{m_*^2}{4\pi^2} |\mathfrak{M}|^2$$

を得ます。この式により、散乱振幅 \mathfrak{M} を知ることで、微分断面積 $d\sigma/d\Omega$ を求めることができるわけです。

(*注) 片方の粒子に注目すると、これは自由粒子(ド・ブロイ波)ですから、空間全体に一様な確率密度で存在していると考えられます。この粒子のある散乱に対する微小断面積を $d\sigma$ 、散乱時間を T とすると、この散乱が起こるために粒子がいるべき場所は、2粒子の相対速度を $v = v_1 + v_2$ として、長さ vT 、断面積 $d\sigma$ の柱状の空間の内部で、その体積は $vT d\sigma$ です(図 14.2)。一方、空間全体の体積は V ですから、考えている散乱が起こる微小確率は $d\Gamma = vT d\sigma/V$ と評価されます。

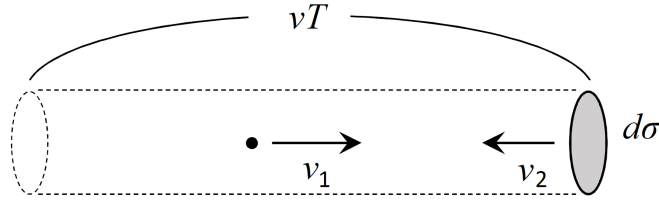


図 14.2: 散乱確率

14.7 異なる粒子の散乱

相互作用ハミルトニアン H_I の効果が十分小さいとき、S 行列は、

$$S = 1 - i \int dt H_I(t)$$

と近似できます。これは一種の摂動論です。始状態と終状態で運動量分配が異なる場合だけ考えるとすれば、 $\langle f|i\rangle = 0$ なので、

$$\langle f|S|i\rangle = -i \int dt \langle f|H_I|i\rangle = -\frac{i}{2} \int dt d^3\mathbf{r} d^3\mathbf{r}' \frac{\langle f|J(\mathbf{r})J(\mathbf{r}')|i\rangle}{4\pi|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}$$

です。異なる 2 粒子の散乱の場合、 $|i\rangle, |f\rangle$ にはそれぞれ異なる粒子の生成演算子があるため、ブラケット部分 $\langle f|J(\mathbf{r})J(\mathbf{r}')|i\rangle$ に 0 でない寄与を与えるのは、電荷密度 $J(\mathbf{r}) = q_1\psi_1^\dagger(\mathbf{r})\psi_1(\mathbf{r}) + q_2\psi_2^\dagger(\mathbf{r})\psi_2(\mathbf{r})$ の交差項だけのはずです。これを拾って、

$$\langle f|S|i\rangle = -iq_1q_2 \int dt d^3\mathbf{r} d^3\mathbf{r}' \frac{\langle f|\psi_1^\dagger(\mathbf{r})\psi_1(\mathbf{r})\psi_2^\dagger(\mathbf{r}')\psi_2(\mathbf{r}')|i\rangle}{4\pi|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}.$$

2つの交差項が \mathbf{r}, \mathbf{r}' の交換対称性から同一とみなせ、因子 $1/2$ を消したことに注意してください。ブラケット部分は、

$$\sum_{s,s'} \langle 0|c_{2s_4}(\mathbf{k}_4)c_{1s_3}(\mathbf{k}_3)\psi_{1s}^*(\mathbf{r})\psi_{1s}(\mathbf{r})\psi_{2s'}^*(\mathbf{r}')\psi_{2s'}(\mathbf{r}')c_{1s_1}^*(\mathbf{k}_1)c_{2s_2}^*(\mathbf{k}_2)|0\rangle$$

であり、生成消滅の対の取り方は図 14.3 の組み合わせだけで、場と生成消滅演算子の交換関係が、

$$[\psi_{as}(\mathbf{r}), c_{a's'}^*(\mathbf{k})] = \delta_{aa'}\delta_{ss'} e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}-i\epsilon_a(\mathbf{k})t}, \quad [c_{a's'}(\mathbf{k}), \psi_{as}^*(\mathbf{r})] = \delta_{aa'}\delta_{ss'} e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}+i\epsilon_a(\mathbf{k})t}$$

であること、また、クーロンポテンシャルが、

$$\frac{1}{4\pi|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} = \int \frac{d^3\mathbf{k}}{(2\pi)^3} \frac{1}{|\mathbf{k}|^2} e^{i\mathbf{k}\cdot(\mathbf{r}-\mathbf{r}')}.$$

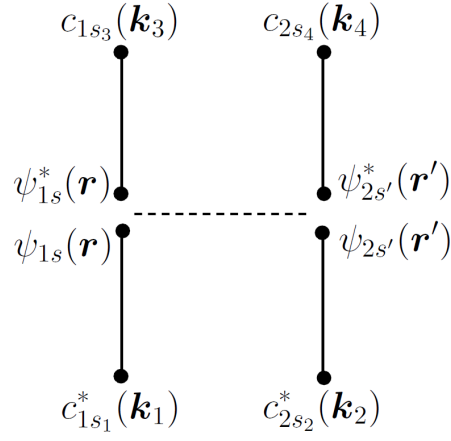


図 14.3: 異なる粒子の散乱

と書けることを思い出せば、

$$\begin{aligned} \langle f|S|i\rangle &= -iq_1q_2 \int dt d^3\mathbf{r} d^3\mathbf{r}' \int \frac{d^3\mathbf{k}}{(2\pi)^3} \frac{1}{|\mathbf{k}|^2} e^{i\mathbf{k}\cdot(\mathbf{r}-\mathbf{r}')} \\ &\times \sum_{s,s'} \delta_{s s_1} e^{i\mathbf{k}_1\cdot\mathbf{r}-i\epsilon_1(\mathbf{k}_1)t} \delta_{s s_3} e^{-i\mathbf{k}_3\cdot\mathbf{r}+i\epsilon_1(\mathbf{k}_3)t} \delta_{s' s_2} e^{i\mathbf{k}_2\cdot\mathbf{r}'-i\epsilon_2(\mathbf{k}_2)t} \delta_{s' s_4} e^{-i\mathbf{k}_4\cdot\mathbf{r}'+i\epsilon_2(\mathbf{k}_4)t} \end{aligned}$$

となります。 $t, \mathbf{r}, \mathbf{r}'$ 積分を実行して、

$$\begin{aligned} \langle f|S|i\rangle &= -iq_1q_2 \delta_{s_1 s_3} \delta_{s_2 s_4} (2\pi)^4 \int d^3\mathbf{k} \frac{1}{|\mathbf{k}|^2} \\ &\times \delta^3(\mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_3 + \mathbf{k}) \delta^3(\mathbf{k}_2 - \mathbf{k}_4 - \mathbf{k}) \delta(\epsilon_1(\mathbf{k}_1) + \epsilon_2(\mathbf{k}_2) - \epsilon_1(\mathbf{k}_3) - \epsilon_2(\mathbf{k}_4)) \\ &= \frac{-iq_1q_2 \delta_{s_1 s_3} \delta_{s_2 s_4}}{|\mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_3|^2} (2\pi)^4 \delta^3(\mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_3 + \mathbf{k}_2 - \mathbf{k}_4) \delta(\epsilon_1(\mathbf{k}_1) + \epsilon_2(\mathbf{k}_2) - \epsilon_1(\mathbf{k}_3) - \epsilon_2(\mathbf{k}_4)). \end{aligned}$$

よって散乱振幅は、

$$\mathfrak{M} = \frac{-iq_1q_2 \delta_{s_1 s_3} \delta_{s_2 s_4}}{|\mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_3|^2}$$

と読み取れます。 $\mathbf{k}_1 = \mathbf{k}$, $\mathbf{k}_3 = \mathbf{k}'$ とおき、散乱角を θ とすると、

$$\mathfrak{M} = \frac{-iq_1q_2 \delta_{s_1 s_3} \delta_{s_2 s_4}}{2|\mathbf{k}|^2(1 - \cos\theta)} = \frac{-iq_1q_2 \delta_{s_1 s_3} \delta_{s_2 s_4}}{4|\mathbf{k}|^2 \sin^2(\theta/2)}.$$

よって異なる粒子の散乱の微分断面積として、

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{m_*^2}{4\pi^2} |\mathfrak{M}|^2 = \frac{m_*^2 q_1^2 q_2^2 \delta_{s_1 s_3} \delta_{s_2 s_4}}{64\pi^2 |\mathbf{k}|^4 \sin^4(\theta/2)}$$

を得ます。

一方の粒子の質量がもう一方の粒子の質量より十分大きい場合は、換算質量 m_* は小さい方の粒子の質量になり、この場合この式はラザフォード散乱の微分断面積を意味します。それは古典論の結果と一致しています。

14.8 同種粒子の散乱

次に同種粒子の散乱を考えてみましょう。

散乱する粒子の場を $\psi_1(\mathbf{r})$ として、S 行列要素は、

$$\langle f|S|i\rangle = -\frac{iq_1^2}{2} \int dt d^3\mathbf{r} d^3\mathbf{r}' \frac{\langle f|\psi_1^\dagger(\mathbf{r})\psi_1(\mathbf{r})\psi_1^\dagger(\mathbf{r}')\psi_1(\mathbf{r}')|i\rangle}{4\pi|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}.$$

今度の場合、ブラケット部分を展開する際に、図 14.4 のような 4 つの組み合わせを生じますが、 \mathbf{r}, \mathbf{r}' の交換対称性があるので (a)(b) の 2 つから来る寄与を 2 倍すればよいはずですが、このことは、 \mathbf{r}, \mathbf{r}' の 2 点を区別しない場合は、(a) と (d), (b) と (c) がそれぞれトポロジカル同値であることに対応しています。また、フェルミオンの場合、(b) においてはマイナス符号を生じることに注意。

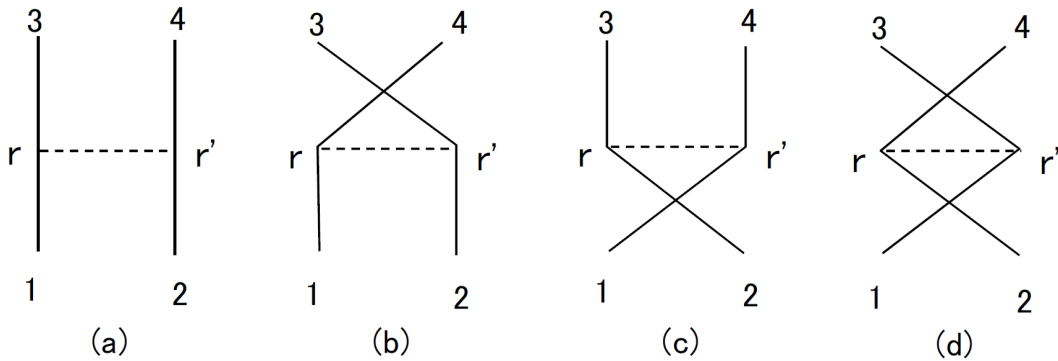


図 14.4: 同種粒子の散乱

結果、散乱振幅は、

$$\begin{aligned} \mathfrak{M} &= \frac{-iq_1^2 \delta_{s_1 s_3} \delta_{s_2 s_4}}{|\mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_3|^2} \pm \frac{-iq_1^2 \delta_{s_1 s_4} \delta_{s_2 s_3}}{|\mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_4|^2} \\ &= \frac{-iq_1^2}{2|\mathbf{k}|^2 \sin^2 \theta} \left(\delta_{s_1 s_3} \delta_{s_2 s_4} (1 + \cos \theta) \pm \delta_{s_1 s_4} \delta_{s_2 s_3} (1 - \cos \theta) \right) \end{aligned}$$

となるでしょう。複号上はボゾン、下はフェルミオンの場合です。終状態においてスピンを観測しないものとするれば、微分断面積は、

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \sum_{s_3 s_4} \frac{m_*^2}{4\pi^2} |\mathfrak{M}|^2 = \frac{m_*^2 q_1^4}{32\pi^2 |\mathbf{k}|^4 \sin^4 \theta} (2 - \sin^2 \theta \pm \delta_{s_1 s_2} \sin^2 \theta).$$

$m_* = m_1/2$ に注意。また、終状態の2粒子が同種であることから、散乱角の定義域は $0 < \theta < \pi/2$ です。例えば電子同士の散乱はメラ-散乱と呼ばれますが、ここで得た微分断面積(複号下)はその非相対論的近似に相当します。

ちなみに始状態においてもスピンを観測しない場合、 s_1, s_2 について平均を取ればよく、上の結果に $g^{-2} \sum_{s_1 s_2}$ を施せばよいこととなります。ここで、

$$g = \sum_{s=-l}^l 1 = 2l + 1$$

はスピンの自由度です。結果、

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{m_1^2 q_1^4}{32\pi^2 |\mathbf{k}|^4 \sin^4 \theta} \left(2 - \sin^2 \theta \pm \frac{1}{g} \sin^2 \theta \right)$$

となります。粒子のスピン統計により微分断面積が微妙に異なることは重要です。散乱実験は粒子のスピン統計を特定する1つの手段になるわけです。

索引

あ	
S 行列	7
S マトリックス	7
か	
クーロン相互作用	6
さ	
散乱	3
散乱角	3
散乱振幅	8
時間順序積	7
自由場の理論	5
衝突パラメータ	3
相互作用表示	7
た	
断面積	3
は	
微分断面積	3
ま	
メラー散乱	13
ら	
ラザフォード散乱	4