

# あもんノート

ユークリッド幾何学、ニュートン力学から、相対論、宇宙論、量子論、場の量子論、素粒子論、そして超ひも理論まで、理論物理学を簡潔にかつ幅広く網羅したノートです。TOP へは下の URL をクリックして行けます。専用の画像掲示板で、ご意見、ご質問等も受け付けております。

<http://amonphys.web.fc2.com/>

# 目次

第 14 章 場の量子論	3
14.1 シュレーディンガー場	3
14.2 シュレーディンガー場の量子化	4
14.3 フェルミオン	6
14.4 粒子数	7
14.5 スピン角運動量	7
14.6 位置スピン固有状態	9
14.7 角運動量の合成	10
14.8 任意の方向のスピン固有状態	12
14.9 自己相互作用	13
14.10 消滅定理	14
14.11 多粒子系の摂動論	14
14.12 フェルミオンの 2 粒子系	17
14.13 ボゾンの多粒子系	19

# 第14章 場の量子論

一般に場を量子化すると多粒子系の量子論が得られます。ここでは簡単な非相対論的な場の量子論として、シュレーディンガー場(ド・ブローイ場)の量子論を解説します。通常、シュレーディンガー場というと、波動関数と同様、ただの複素数の場として紹介されることが多いですが、ここでは空間の回転における既約表現の場とします。これは一般に多成分の複素数場になります。こうすることで生成される粒子はスピンを持つことがわかります。後半では自己相互作用がある場合の摂動論について解説します。

## 14.1 シュレーディンガー場

3次元のユークリッド空間を考え、そのデカルト座標を  $\mathbf{r} = (x, y, z)$  とします。空間の回転変換、

$$\mathbf{r}' = e^{\theta_i T_i} \mathbf{r}, \quad (T_i)_{jk} = -\epsilon_{ijk}$$

に対し、

$$\psi'(\mathbf{r}') = e^{-i\theta_i R_i^{(l)}} \psi(\mathbf{r})$$

のように振舞う  $(2l+1)$  成分の複素数場  $\psi(\mathbf{r})$  を考え、これをスピン  $l$  のシュレーディンガー場と呼びます。ここで  $R_i^{(l)}$  は  $SO(3)$  の  $(2l+1)$  次元表現の生成子で、 $R_i^{(0)} = 0$ ,  $R_i^{(1/2)} = \sigma_i/2$ ,  $R_i^{(1)} = \tau_i, \dots$  でした(連続群論入門参照)。スピン0のシュレーディンガー場は1成分、スピン1/2のシュレーディンガー場は2成分、スピン1のシュレーディンガー場は3成分ということになります。

シュレーディンガー場  $\psi(\mathbf{r})$  に対し、次のラグランジアンを考えます：

$$L = \int d^3\mathbf{r} \left( i\psi^\dagger(\mathbf{r})\dot{\psi}(\mathbf{r}) - \frac{1}{2m}\nabla\psi^\dagger(\mathbf{r})\cdot\nabla\psi(\mathbf{r}) - \psi^\dagger(\mathbf{r})U(\mathbf{r})\psi(\mathbf{r}) \right).$$

ドットは時間  $t$  による微分を意味し、 $m$  は正の実数で、粒子の質量を意味することになります。 $U(\mathbf{r})$  は外部ポテンシャルを意味し、エルミート行列であると仮定します。そうすることで、作用  $S = \int dt L$  が実数になるからです。多くの場合、 $U(\mathbf{r})$  は単位行列に比例します。

シュレーディンガー場の成分を  $(\psi(\mathbf{r}))_s = \psi_s(\mathbf{r})$  と書いたとき、成分の添字  $s$  をスピン座標といいます。スピン座標と空間座標の組  $(s, \mathbf{r})$  が、力学変数の指標、

すなわち力学変数を  $q_i$  と書いたときの添字  $i$  に相当することに注意してください。場の理論は一般に、連続無限個の力学変数を持つ力学とみなすことができるのです。

そうすると、例えば力学変数による微分  $\partial/\partial q_i$  に対応するものは、汎関数微分  $\delta/\delta\psi_s(\mathbf{r})$  であり、

$$\frac{\delta L}{\delta\dot{\psi}_s(\mathbf{r})} = i\psi_s^*(\mathbf{r}), \quad \frac{\delta L}{\delta\psi_s(\mathbf{r})} = \frac{1}{2m}\Delta\psi_s^*(\mathbf{r}) - \sum_{s'}\psi_{s'}^*(\mathbf{r})U_{s's}(\mathbf{r})$$

に注意すると、ラグランジュ方程式： $\frac{\partial}{\partial t}\frac{\delta L}{\delta\dot{\psi}_s(\mathbf{r})} = \frac{\delta L}{\delta\psi_s(\mathbf{r})}$  は、 $U(\mathbf{r})$  がエルミート行列であることに注意して、

$$i\dot{\psi}(\mathbf{r}) = -\frac{1}{2m}\Delta\psi(\mathbf{r}) + U(\mathbf{r})\psi(\mathbf{r})$$

となります。これは時間を含むシュレーディンガー方程式の多成分版になっています。また、 $\psi_s^*(\mathbf{r})$  に関するラグランジュ方程式も、簡単に確かめられるように同じ方程式を与えます。これがシュレーディンガー場の運動方程式であり、場の方程式です。

シュレーディンガー場の運動方程式を解くためには、多成分版シュレーディンガー方程式：

$$-\frac{1}{2m}\Delta\phi_n(\mathbf{r}) + U(\mathbf{r})\phi_n(\mathbf{r}) = \epsilon_n\phi_n(\mathbf{r})$$

が解ければよいわけですが、これは量子力学(波動力学)の問題であり、ここではこれがすでに解けていて、多成分の固有関数  $\phi_n(\mathbf{r})$  は規格直交化された完全系とします：

$$\int d^3\mathbf{r} \phi_n^\dagger(\mathbf{r})\phi_{n'}(\mathbf{r}) = \delta_{nn'}, \quad \sum_n \phi_n(\mathbf{r})\phi_n^\dagger(\mathbf{r}') = \delta^3(\mathbf{r}-\mathbf{r}').$$

ここで  $\delta$  は  $(2l+1)$  次の単位行列です。そうすると場の方程式の一般解は、

$$\psi(\mathbf{r}) = \sum_n c_n \phi_n(\mathbf{r}) e^{-i\epsilon_n t}$$

と書けます。ここで  $c_n$  は複素数の係数です。ここまではあくまで“古典論”です。

## 14.2 シュレーディンガー場の量子化

シュレーディンガー場の理論を量子化してみましょう。

仮にシュレーディンガー場の理論がすでに1粒子の量子論であると考えれば、それをさらに量子化するわけですから、ここでの量子化は“第2量子化”と呼ぶべき

ものになります。しかしシュレーディンガー場がただの古典場であるとする今の立場では、それは単なる場の量子化ということになります。

力学変数  $\psi_s(\mathbf{r})$  の正準共役変数が  $i\psi_s^*(\mathbf{r})$  であることに注意すると、正準交換関係は、

$$\begin{aligned} [\psi_s(\mathbf{r}), \psi_{s'}^*(\mathbf{r}')] &= \delta_{ss'} \delta^3(\mathbf{r} - \mathbf{r}'), \\ [\psi_s(\mathbf{r}), \psi_{s'}(\mathbf{r}')] &= [\psi_s^*(\mathbf{r}), \psi_{s'}^*(\mathbf{r}')] = 0 \end{aligned}$$

です(\*)。これらは一般解の係数  $c_n$  を、

$$[c_n, c_{n'}^*] = \delta_{nn'}, \quad [c_n, c_{n'}] = [c_n^*, c_{n'}^*] = 0$$

を満たす代数であると仮定すれば満たされます。実際このとき、

$$\begin{aligned} [\psi_s(\mathbf{r}), \psi_{s'}^*(\mathbf{r}')] &= \sum_{nn'} [c_n, c_{n'}^*] \phi_{ns}(\mathbf{r}) \phi_{n's'}^*(\mathbf{r}') e^{-i\epsilon_n t + i\epsilon_{n'} t} \\ &= \sum_n \phi_{ns}(\mathbf{r}) \phi_{n's'}^*(\mathbf{r}') = \delta_{ss'} \delta^3(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \end{aligned}$$

で、他は自明でしょう。 $c_n^*$  は量子論においては  $c_n$  のエルミート共役と解されるので注意してください。

一方、ハミルトニアンは、場の方程式から  $L = 0$  であることに注意して、

$$H = \int d^3\mathbf{r} i\psi^\dagger(\mathbf{r})\dot{\psi}(\mathbf{r})$$

であり、これに一般解を代入すると、

$$H = \int d^3\mathbf{r} \sum_{nn'} \epsilon_{n'} c_n^* c_{n'} \phi_n^\dagger(\mathbf{r}) \phi_{n'}(\mathbf{r}) e^{i\epsilon_n t - i\epsilon_{n'} t} = \sum_n \epsilon_n c_n^* c_n$$

となります。ハミルトニアンは保存量なので、時間に依存しません。ここから、

$$[H, c_n] = -\epsilon_n c_n, \quad [H, c_n^*] = \epsilon_n c_n^*$$

が示せるので、 $c_n^*, c_n$  は、それぞれエネルギーを  $\epsilon_n$  だけ増やしたり減らしたりする演算子になっています。このことはエネルギー  $\epsilon_n$  の軌道  $n$  における粒子の生成と消滅になぞらえられます。このため  $c_n^*$  は生成演算子、 $c_n$  は消滅演算子と呼ばれます。

いま、

$$c_n |0\rangle = 0 \quad (\forall n)$$

で真空  $|0\rangle$  を定義すると、これはエネルギーが 0 の状態です。また、 $c_n^* |0\rangle$  はエネルギーが  $\epsilon_n$  の状態であり、軌道  $n$  に粒子が 1 個だけ入っている状態とみなせます。一般に、

$$|\chi\rangle = \prod_n (c_n^*)^{\chi_n} |0\rangle$$

はエネルギーが  $\sum_n \chi_n \epsilon_n$  の状態であり、各軌道  $n$  に粒子が  $\chi_n$  個ずつ入っている状態とみなせます。これを基底として張られる状態空間は、フォック空間と呼ばれます。

このようにしてシュレーディンガー場の量子論は多粒子系を意味するわけですが、古典的な多粒子系と異なるのは、‘どの粒子がどの軌道に?’ と問いかけることに意味がないことです。上式のように状態が記述される以上、各軌道に入っている粒子の個数だけしか問題にならず、粒子を区別することは無意味です。このような統計は量子統計と呼ばれ、実験的にも正しい統計なのです。特に今のように各軌道に何個でも入ることができる粒子は、ボーズ粒子、あるいはボゾンと呼ばれます。

(\*注)  $\psi_s(\mathbf{r})$  の正準共役として  $\psi_s^*(\mathbf{r})$  が現れたので、 $\psi_s^*(\mathbf{r})$  の正準共役についてはもはや問わないことにします。これを簡便量子化といいます。シュレーディンガー場の量子論は特異系に属し、系統的な正準量子化は少々難しいものになるのですが、これを簡便量子化で済ませることができます。

### 14.3 フェルミオン

上では古典的なシュレーディンガー場は普通の複素数に値をとるとしましたが、少なくとも数学的には、それが反可換な複素数的な代数、すなわち複素グラスマン数である場合を考えることも可能です。この場合、正準交換関係は、反交換関係であるとして、

$$\{\psi_s(\mathbf{r}), \psi_{s'}^*(\mathbf{r}')\} = \delta_{ss'} \delta^3(\mathbf{r} - \mathbf{r}'),$$

$$\{\psi_s(\mathbf{r}), \psi_{s'}(\mathbf{r}')\} = \{\psi_s^*(\mathbf{r}), \psi_{s'}^*(\mathbf{r}')\} = 0$$

のように仮定されます。ここで  $\{A, B\} = AB + BA$  は反交換子です。このとき生成消滅演算子に関して、

$$\{c_n, c_{n'}^*\} = \delta_{nn'}, \quad \{c_n, c_{n'}\} = \{c_n^*, c_{n'}^*\} = 0$$

となります。この後はボゾンの時と同様、

$$H = \sum \epsilon_n c_n^* c_n \quad \text{および} \quad [H, c_n] = -\epsilon_n c_n, \quad [H, c_n^*] = \epsilon_n c_n^*$$

を得ます。 $H$  がグラスマン偶 (グラスマン数偶数個の積) であることに対応して、ここは反交換子ではなく、交換子になります。

$(c_n^*)^2 = 0$  ですから、フォック空間の基底  $|\chi\rangle = \prod_n (c_n^*)^{\chi_n} |0\rangle$  において、 $\chi_n \in \{0, 1\}$  です。すなわち、1つの軌道には1個の粒子しか入ることができず、これをパウリ排他律といいます。また、このような粒子は、フェルミ粒子、あるいはフェルミオンと呼ばれます。物質の構成要素である、電子、陽子、中性子は、いずれもスピン  $l = 1/2$  のフェルミオンであることが知られています。

(余談) フェルミオンの統計は、碁盤に黒石をいくつか置いたようなものだと思うとわかりやすいでしょう。碁盤の座標は軌道に相当し、黒石を置くことは、そこが占有されていることを示すものと考えerわけです。置かれた黒石2つを入れ換えても、状態は本質的に変わりありません。実際の黒石だと物理的な違いがあるので、パソコンゲームの黒石だと思えば、より磐石な比喻になります。ボゾンの場合は、黒石のスタック(積み上げ)を許すと考えればいいわけです。

## 14.4 粒子数

シュレーディンガー場  $\psi(\mathbf{r})$  に対して、

$$\psi'(\mathbf{r}) = e^{-i\theta}\psi(\mathbf{r})$$

という位相変換  $U(1)$  を行っても、シュレーディンガー場のラグランジアン、

$$L = \int d^3\mathbf{r} \left( i\psi^\dagger(\mathbf{r})\dot{\psi}(\mathbf{r}) - \frac{1}{2m}\nabla\psi^\dagger(\mathbf{r})\cdot\nabla\psi(\mathbf{r}) - \psi^\dagger(\mathbf{r})U(\mathbf{r})\psi(\mathbf{r}) \right)$$

は明らかに不変です。その無限小変換は、 $\delta\psi(\mathbf{r}) = -i\theta\psi(\mathbf{r})$  なので、対応するネーター保存量は、

$$N = \int d^3\mathbf{r} i\psi^\dagger(\mathbf{r})(-i\psi(\mathbf{r})) = \int d^3\mathbf{r} \psi^\dagger(\mathbf{r})\psi(\mathbf{r})$$

となります。これを粒子数といいます。一般解を代入すれば、

$$N = \sum_n c_n^* c_n$$

を得るので、これはまさに粒子数と呼ぶべきものなわけです。

ラグランジアン  $L$  に追加項が加わっても、それが位相不変性  $U(1)$  を有する限り粒子数は保存することに注意してください。

## 14.5 スピン角運動量

一方、ポテンシャル  $U(\mathbf{r})$  が球対称で、かつ単位行列に比例している場合を考えると、ラグランジアン  $L$  は空間の無限小回転、

$$x'_i = x_i + \theta_k(T_k)_{ij}x_j = x_i - \theta_k\epsilon_{kij}x_j \quad \therefore \mathbf{r}' = \mathbf{r} + \boldsymbol{\theta} \times \mathbf{r}$$

に対して不変です。場の変換則が  $\psi'(\mathbf{r}') = e^{-i\boldsymbol{\theta}\cdot\mathbf{R}^{(l)}}\psi(\mathbf{r})$  であったことを思い出すと、場の変分は、

$$\delta\psi(\mathbf{r}) = \psi'(\mathbf{r}) - \psi(\mathbf{r}) = -i\boldsymbol{\theta}\cdot\left(\mathbf{R}^{(l)} - i\mathbf{r}\times\nabla\right)\psi(\mathbf{r})$$

と計算されるので、対応するネーターの保存量、すなわち角運動量  $J$  は、

$$J = S + L, \quad S = \int d^3\mathbf{r} \psi^\dagger(\mathbf{r}) \mathbf{R}^{(l)} \psi(\mathbf{r}), \quad L = \int d^3\mathbf{r} \psi^\dagger(\mathbf{r}) (-i\mathbf{r} \times \nabla) \psi(\mathbf{r})$$

のように、スピン角運動量  $S$  と軌道角運動量  $L$  に分解されます。スピン角運動量の式に一般解を代入すると、

$$S = \int d^3\mathbf{r} \sum_{nn'} c_n^* c_{n'} \phi_n^\dagger(\mathbf{r}) \mathbf{R}^{(l)} \phi_{n'}(\mathbf{r}) e^{i(\epsilon_n - \epsilon_{n'})t}$$

ですが、特に  $\phi_n(\mathbf{r})$  が  $R_3^{(l)}$  の固有関数にもなっていて、

$$R_3^{(l)} \phi_n(\mathbf{r}) = s_n \phi_n(\mathbf{r})$$

のときは、

$$S_3 = \sum_n s_n c_n^* c_n$$

となります。すなわち軌道  $n$  の粒子のスピン角運動量は、その第3成分 ( $z$  成分) が  $s_n$  ということになります。スピン角運動量は古典的には粒子の自転による角運動量に相当しますが、場の量子論においては場の空間的な振る舞いに伴って、このように自然に現れます。

一方、ポテンシャルが  $U(\mathbf{r}) = u(\mathbf{r}) \delta$  というように単位行列  $\delta$  に比例し、1成分のシュレーディンガー方程式、

$$-\frac{1}{2m} \Delta \varphi_k(\mathbf{r}) + u(\mathbf{r}) \varphi_k(\mathbf{r}) = \epsilon_k \varphi_k(\mathbf{r})$$

が解けているとすれば、固有関数は、空間部分とスピン部分を分離した形で、

$$\phi_{k\sigma}(\mathbf{r}) = \varphi_k(\mathbf{r}) \gamma_\sigma$$

のように表すことができます。ここで  $\gamma_\sigma$  は  $(2l+1)$  個の成分を持つ縦ベクトルで、

$$(\gamma_\sigma)_s = \delta_{\sigma s}$$

です。例えば、スピンの場合、

$$\gamma_{+1/2} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \gamma_{-1/2} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

量子数の組  $(k, \sigma)$  が量子状態 (軌道) の指標であることに注意。すなわち固有関数を  $\phi_n(\mathbf{r})$  と書いたときの  $n$  に相当します。また、ここでの  $k$  も通常いくつかの量子数の組で、例えば水素原子の系なら、主量子数、方位量子数、磁気量子数の組になります。新たな量子数  $\sigma$  はスピン量子数と呼ばれます。



$\varphi_k(\mathbf{r})$  が規格直交化された完全系であるなら、

$$\int d^3\mathbf{r} \phi_{k\sigma}^\dagger(\mathbf{r})\phi_{k'\sigma'}(\mathbf{r}) = \delta_{kk'}\delta_{\sigma\sigma'}, \quad \sum_{k,\sigma} \phi_{k\sigma}(\mathbf{r})\phi_{k\sigma}^\dagger(\mathbf{r}') = \delta^3(\mathbf{r}-\mathbf{r}')$$

が確かめられ、すなわち  $\phi_{k\sigma}(\mathbf{r})$  も規格直交化された完全系になります。また、一般に  $(R_3^{(l)})_{ss'} = s\delta_{ss'}$  であったことに注意すれば、 $R_3^{(l)}\gamma_\sigma = \sigma\gamma_\sigma$  がわかるので、

$$R_3^{(l)}\phi_{k\sigma}(\mathbf{r}) = \sigma\phi_{k\sigma}(\mathbf{r})$$

を得ます。すなわちスピン量子数  $\sigma$  はその軌道にある粒子のスピン角運動量  $z$  成分を意味するわけです。

## 14.6 位置スピン固有状態

粒子数  $N$ , スピン角運動量  $S$  の式から、

$$\rho(\mathbf{r}) = \psi^\dagger(\mathbf{r})\psi(\mathbf{r}), \quad \boldsymbol{\tau}(\mathbf{r}) = \psi^\dagger(\mathbf{r})\mathbf{R}^{(l)}\psi(\mathbf{r})$$

は、順に、粒子数密度、およびスピン密度と考えられます。いま、

$$|\mathbf{r}, s\rangle = \psi_s^*(\mathbf{r})|0\rangle$$

というベクトルを考えると、

$$\rho(\mathbf{r})|\mathbf{r}_0, s\rangle = \delta^3(\mathbf{r}-\mathbf{r}_0)|\mathbf{r}_0, s\rangle,$$

さらに、 $(R_3^{(l)})_{ss'} = s\delta_{ss'}$  に注意して、

$$\tau_3(\mathbf{r})|\mathbf{r}_0, s\rangle = s\delta^3(\mathbf{r}-\mathbf{r}_0)|\mathbf{r}_0, s\rangle$$

が確かめられるでしょう。すなわち、 $|\mathbf{r}_0, s\rangle$  は、位置  $\mathbf{r}_0$  にスピン  $z$  成分が  $s$  の粒子がただ1個存在する状態で、位置スピン固有状態と呼ぶべきものです。

また、軌道  $n$  に1個の粒子が入っている状態  $|n\rangle = c_n^*|0\rangle$  に対し、

$$\langle \mathbf{r}, s | n \rangle = \langle 0 | \psi_s(\mathbf{r})c_n^* | 0 \rangle = \phi_{ns}(\mathbf{r}) e^{-i\epsilon_n t}$$

ですから、状態  $|n\rangle$  において、粒子が位置  $\mathbf{r}$  に発見される確率密度は、

$$\sum_s |\langle \mathbf{r}, s | n \rangle|^2 = \phi_n^\dagger(\mathbf{r})\phi_n(\mathbf{r})$$

ということになります。これは1粒子の波動力学における確率解釈が、場の量子論においても正しいことを意味しています。

(余談) ちなみに相対論的な場の量子論においては、ここでの考え方が、少なくとも素朴にはできなくなります。すなわち非相対論的な場合に限って、いわばたまたま、粒子存在位置確率密度振幅の波という描像が得られるわけです。場の量子論こそ本当の物理学であると考え、シュレーディンガーの波動力学は、こういった事情によりたまたま歴史的に早く発見された、抽象的な場の量子論の、特に1粒子状態における一側面にすぎないわけです。波ときどき粒子、果たしてその正体は.....、量子場です。

## 14.7 角運動量の合成

一般に、考えている系に、複数の角運動量、例えば2粒子のスピンなどがあったとき、これらを合成した角運動量を考えることがあります。

いま、系に2つの角運動量  $J^{(1)}$ ,  $J^{(2)}$  があって、それぞれの方位量子数を固定して考え、磁気量子数がそれぞれ  $m_1, m_2$  の状態を  $|m_1, m_2\rangle$  と書くことにします。一方、これら角運動量の和  $J = J^{(1)} + J^{(2)}$  も角運動量代数  $[J_i, J_j] = i\epsilon_{ijk}J_k$  を成すので、その方位量子数を  $l$ , 磁気量子数を  $m$  として、その固有状態を  $|l, m\rangle$  と書きます。そうするとこれは  $|m_1, m_2\rangle$  のある線形結合で与えられるはずです。すなわち、

$$|l, m\rangle = \sum_{m_1, m_2} C_{m_1, m_2}^{l, m} |m_1, m_2\rangle.$$

このとき係数  $C_{m_1, m_2}^{l, m}$  をクレプシュ・ゴルダン係数といいます。クレプシュ・ゴルダン係数の求め方については具体例を見るのが早いでしょう。

いま、 $J^{(1)}$ ,  $J^{(2)}$  の方位量子数 (角運動量の大きさ) をそれぞれ 1, および  $\frac{1}{2}$  とします。そうすると、 $|m_1, m_2\rangle$  として、

$$\left|1, \frac{1}{2}\right\rangle, \quad \left|1, -\frac{1}{2}\right\rangle, \quad \left|0, \frac{1}{2}\right\rangle, \quad \left|0, -\frac{1}{2}\right\rangle, \quad \left|-1, \frac{1}{2}\right\rangle, \quad \left|-1, -\frac{1}{2}\right\rangle$$

という6つ状態があるわけですが、このうち  $\left|1, \frac{1}{2}\right\rangle$  は  $J_3 = J_3^{(1)} + J_3^{(2)}$  の固有値が最大値  $m = \frac{3}{2}$  となる唯一の固有状態です。よって、

$$\left|\frac{3}{2}, \frac{3}{2}\right\rangle = \left|1, \frac{1}{2}\right\rangle$$

です。このとき  $\left|1, \frac{1}{2}\right\rangle$  が、例えば  $\left|\frac{5}{2}, \frac{3}{2}\right\rangle$  であることはあり得ないということが重要です。もうそうなら  $\left|\frac{5}{2}, \frac{5}{2}\right\rangle$  が存在することになり、 $J_3$  の最大固有値が  $\frac{3}{2}$  であることと矛盾するからです。

上式の両辺に  $J_- = J_-^{(1)} + J_-^{(2)}$  を作用すると、

$$J_- \left|\frac{3}{2}, \frac{3}{2}\right\rangle = J_-^{(1)} \left|1, \frac{1}{2}\right\rangle + J_-^{(2)} \left|1, \frac{1}{2}\right\rangle.$$

$J_- |l, m\rangle = \sqrt{(l+m)(l-m+1)} |l, m-1\rangle$  を用いて計算して、

$$\left|\frac{3}{2}, \frac{1}{2}\right\rangle = \sqrt{\frac{1}{3}} \left|1, -\frac{1}{2}\right\rangle + \sqrt{\frac{2}{3}} \left|0, \frac{1}{2}\right\rangle$$

を得ます。さらに  $J_-$  を作用していけば、

$$\left| \frac{3}{2}, -\frac{1}{2} \right\rangle = \sqrt{\frac{2}{3}} \left| 0, -\frac{1}{2} \right\rangle + \sqrt{\frac{1}{3}} \left| -1, \frac{1}{2} \right\rangle, \quad \left| \frac{3}{2}, -\frac{3}{2} \right\rangle = \left| -1, -\frac{1}{2} \right\rangle$$

を得ます。

$J_3$  の固有値として次にあり得るのは  $\frac{1}{2}$  ですが、その固有状態の1つは  $\left| \frac{3}{2}, \frac{1}{2} \right\rangle$  です。 $J_3$  の固有値が  $\frac{1}{2}$  で  $\left| \frac{3}{2}, \frac{1}{2} \right\rangle$  と直交するものは1つで、それは  $\left| \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right\rangle$  のはず。すなわち、

$$\left| \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right\rangle = \sqrt{\frac{2}{3}} \left| 1, -\frac{1}{2} \right\rangle - \sqrt{\frac{1}{3}} \left| 0, \frac{1}{2} \right\rangle.$$

再び  $J_-$  を作用して、

$$\left| \frac{1}{2}, -\frac{1}{2} \right\rangle = \sqrt{\frac{1}{3}} \left| 0, -\frac{1}{2} \right\rangle - \sqrt{\frac{2}{3}} \left| -1, \frac{1}{2} \right\rangle$$

を得ます。

このように方位量子数が1 (状態数3) と  $\frac{1}{2}$  (状態数2) の角運動量が合成されると、方位量子数が  $\frac{3}{2}$  (状態数4) と  $\frac{1}{2}$  (状態数2) の状態ができるわけです。これは状態数でみると  $3 \times 2 = 4 + 2$  という関係で帳尻が合っています (図 14.1)。

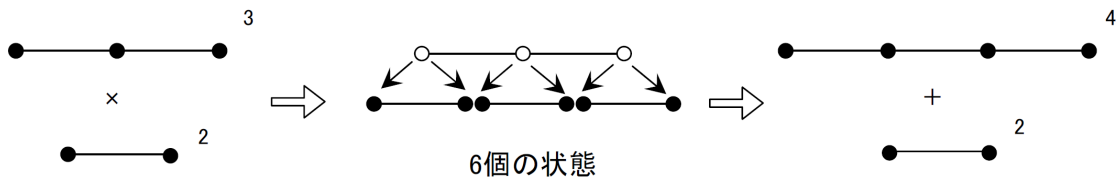


図 14.1: 角運動量の合成

逆にこの帳尻合わせにより、角運動量を合成してどのような方位量子数が生じるかがわかります。例えば、方位量子数が1 (状態数3) の角運動量を2つ合成すれば、最大の方位量子数が2 (状態数5) であることに注意して、 $3 \times 3 = 5 + 3 + 1$  という計算になり、方位量子数2, 1, 0の状態を生じることがわかります。

(余談) 複合粒子の基底状態においては、その軌道角運動量の大きさは多くの場合0 (S波) で、よって複合粒子のスピンは構成粒子のスピンの合成により得られます。例えば核子 (陽子と中性子) は3つのクォークの複合状態ですが、クォークのスピンは  $1/2$  で、スピン  $1/2$  を3つ合成すると、スピン  $3/2$  とスピン  $1/2$  を生じることがわかります ( $2 \times 2 \times 2 = 4 + 2 + 2$ )。このうちスピン  $1/2$  の状態が核子に相当します。スピン  $3/2$  の状態は  $\Delta$  粒子と呼ばれ、これは核子より質量が大きいため不安定で、すぐに核子に崩壊してしまいます。詳しくは素粒子論の章を参照。

## 14.8 任意の方向のスピン固有状態

スピン  $1/2$  の系があって、スピン角運動量の第3成分  $S_3$  が  $\pm 1/2$  となる固有状態を  $|\pm\rangle$  と書きます。簡単のため他の量子数については無視することにします。一方、球面座標により  $\theta, \phi$  で指定される方向のスピン成分が  $+1/2$  となる固有状態を  $|\theta, \phi\rangle$  と書くことにします (図 14.2)。

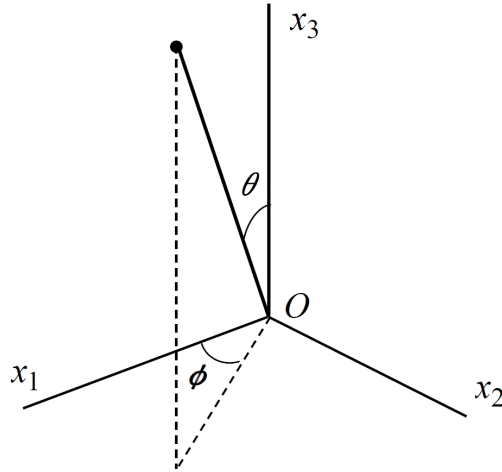


図 14.2: 球面座標

このとき  $|\theta, \phi\rangle$  は、もとのデカルト座標を  $x_2$  方向に  $\theta$ , 続けて  $x_3$  方向に  $\phi$  だけ回転して得られる新しいデカルト座標におけるスピン第3成分が  $+1/2$  となる固有状態と考えることができますが、一般に固有ベクトルの変換は、その変換に対応したネーターの保存量により生成されるので (量子論の基礎の章参照)、

$$|\theta, \phi\rangle = |+\rangle' = e^{-i\phi S_3} e^{-i\theta S_2} |+\rangle.$$

無限小回転変換が  $\mathbf{r}' = \mathbf{r} + \boldsymbol{\theta} \times \mathbf{r}$  で定義されていることに注意。これは座標軸を通常とは逆に左ねじの規則で回転させるので、この関係により上式の指数部にはマイナス符号が付きます。

$e^{-i\theta S_2} |+\rangle$  の部分は、 $S_2 = (i/2)(S_- - S_+)$  に注意し、

$$e^{-i\theta S_2} |+\rangle = e^{(\theta/2)(S_- - S_+)} |+\rangle = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \left(\frac{\theta}{2}\right)^n (S_- - S_+)^n |+\rangle.$$

さらに、

$$(S_- - S_+)^n |+\rangle = \begin{cases} |+\rangle & (n = 0 \bmod 4) \\ |-\rangle & (n = 1 \bmod 4) \\ -|+\rangle & (n = 2 \bmod 4) \\ -|-\rangle & (n = 3 \bmod 4) \end{cases}$$

が再帰的にわかるため、

$$e^{-i\theta S_2} |+\rangle = \cos \frac{\theta}{2} |+\rangle + \sin \frac{\theta}{2} |-\rangle$$

と整理されます。よって結局、

$$|\theta, \phi\rangle = e^{-i\phi/2} \cos \frac{\theta}{2} |+\rangle + e^{i\phi/2} \sin \frac{\theta}{2} |-\rangle$$

を得ます。

例えば、状態  $|\theta, \phi\rangle$  のスピン第3成分を観測し、それが  $+1/2$  となる確率は、

$$|\langle + | \theta, \phi \rangle|^2 = \cos^2 \frac{\theta}{2}$$

となることがわかります。

## 14.9 自己相互作用

粒子が電荷などを持ち、自己相互作用する場合は、

$$L_I = -\frac{1}{2} \int d^3\mathbf{r} d^3\mathbf{r}' U(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \rho(\mathbf{r}) \rho(\mathbf{r}'), \quad \rho(\mathbf{r}) = \psi^\dagger(\mathbf{r}) \psi(\mathbf{r})$$

という相互作用項がラグランジアンに加わります。 $U(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$  は2粒子の間に生じる力のポテンシャルで、 $\mathbf{r}, \mathbf{r}'$  について対称な実関数であると仮定します。例えば電気力の場合、真空の誘電率を1とする単位系で、

$$U(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \frac{q^2}{4\pi|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}$$

で、ここで  $q$  は粒子の電荷です。また、粒子がコアを持ち、同一点において反発するなら、

$$U(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \alpha \delta^3(\mathbf{r}-\mathbf{r}') \quad (\alpha \text{ は定数})$$

です。

ハミルトニアンへの寄与は、符号が逆になり、

$$H_I = \frac{1}{2} \int d^3\mathbf{r} d^3\mathbf{r}' U(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \rho(\mathbf{r}) \rho(\mathbf{r}').$$

古典論においては場の積の順番は自由でいいわけですが、量子論においては気にする必要があります。今の場合、真空と1粒子状態の自己相互作用エネルギーが0になるように、

$$H_I = \frac{1}{2} \int d^3\mathbf{r} d^3\mathbf{r}' \sum_{ss'} U(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \psi_s^*(\mathbf{r}) \psi_{s'}^*(\mathbf{r}') \psi_{s'}(\mathbf{r}') \psi_s(\mathbf{r})$$

というように、生成演算子を左に、消滅演算子を右に寄せます。これを正規順序積といいます。

一般にこのような相互作用があると、場の運動方程式は非線形になり、解くのが非常に困難になります。通常、何らかの近似が必要になるのですが、ここでは  $H_I$  の効果が十分小さいと仮定して、摂動論を行うことにします。

## 14.10 消滅定理

摂動論の前に、簡単な定理を述べておく必要があります。一般に、

$$[\varphi, \varphi_i] = k_i \quad (i = 1, 2, \dots, N, \quad k_i \text{ は複素数})$$

という代数があるとき、

$$\begin{aligned} \varphi \varphi_1 \varphi_2 \varphi_3 \cdots \varphi_N &= k_1 \varphi_2 \varphi_3 \cdots \varphi_N \\ &+ \varphi_1 k_2 \varphi_3 \cdots \varphi_N \\ &+ \varphi_1 \varphi_2 k_3 \cdots \varphi_N \\ &+ \cdots \cdots \\ &+ \varphi_1 \varphi_2 \varphi_3 \cdots k_N + \varphi_1 \varphi_2 \varphi_3 \cdots \varphi_N \varphi \end{aligned}$$

が簡単に示せるでしょう。すなわち代数  $\varphi$  を  $\varphi_1 \varphi_2 \varphi_3 \cdots \varphi_N$  と交換すると、 $\varphi_i$  のどれかを消滅し交換子  $k_i$  に変わり、どれと消滅するか、その組合わせの和になるというわけです。これをここでは消滅定理と呼びましょう。

ちなみにフェルミオンの場合で、代数が  $\{\varphi, \varphi_i\} = k_i$  という反交換関係で与えられる場合は、

$$\begin{aligned} \varphi \varphi_1 \varphi_2 \varphi_3 \cdots \varphi_N &= k_1 \varphi_2 \varphi_3 \cdots \varphi_N \\ &- \varphi_1 k_2 \varphi_3 \cdots \varphi_N \\ &+ \varphi_1 \varphi_2 k_3 \cdots \varphi_N \\ &- \cdots \cdots \\ &\mp \varphi_1 \varphi_2 \varphi_3 \cdots k_N \pm \varphi_1 \varphi_2 \varphi_3 \cdots \varphi_N \varphi \end{aligned}$$

というようにマイナス符号が付きます。複号上は  $N$  が偶数の場合、下は奇数の場合です。

## 14.11 多粒子系の摂動論

2つの  $N$  粒子状態、

$$|n\rangle = c_{n_1}^* c_{n_2}^* \cdots c_{n_N}^* |0\rangle, \quad |n'\rangle = c_{n'_1}^* c_{n'_2}^* \cdots c_{n'_N}^* |0\rangle$$

を考えましょう。ただしこれら2つの状態のエネルギーは同じとします：

$$H|n\rangle = E|n\rangle, \quad H|n'\rangle = E|n'\rangle.$$

すなわち  $|n\rangle$  と  $|n'\rangle$  は縮退しているか、さもなければ同じ状態です。

自己相互作用としての摂動  $H_I$  が加わった場合、これら2つの  $N$  粒子状態における  $H_I$  の表現行列は、

$$\begin{aligned} M_{nn'} &= \frac{\langle n|H_I|n'\rangle}{\sqrt{\langle n|n\rangle\langle n'|n'\rangle}} \\ &= \frac{\int d^3\mathbf{r}d^3\mathbf{r}' \sum_{ss'} U(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \langle n|\psi_s^*(\mathbf{r})\psi_{s'}^*(\mathbf{r}')\psi_{s'}(\mathbf{r}')\psi_s(\mathbf{r})|n'\rangle}{2\sqrt{\langle n|n\rangle\langle n'|n'\rangle}} \end{aligned}$$

と展開されます。分母の  $\sqrt{\langle n|n\rangle\langle n'|n'\rangle}$  は規格化因子で、これはボゾンの場合で、かつ同じ軌道に複数の粒子が存在する場合だけ1ではなく、留意する必要があります。

ブラケット  $\langle n|\psi_s^*(\mathbf{r})\psi_{s'}^*(\mathbf{r}')\psi_{s'}(\mathbf{r}')\psi_s(\mathbf{r})|n'\rangle$  の部分は、消滅定理を用いて考えると、各々の消滅演算子  $c, \psi$  が、どの生成演算子  $c^*, \psi^*$  と消滅し交換子に化けるか、その対の取り方の数だけ項を生じることがわかります。ただし  $\psi$  と  $\psi^*$  はすでに正規順序に並んでいるため対になれません。対を線によって記述すると、生じる各項は図14.3のような図形によって表されます。

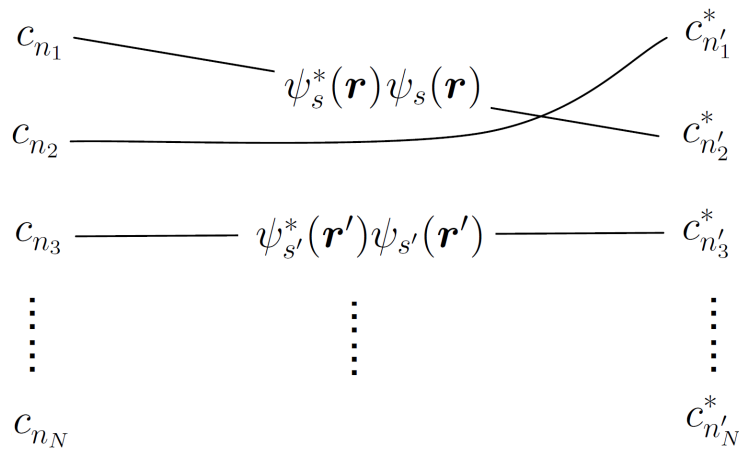


図 14.3: 多粒子系の摂動論

生成消滅演算子と場の交換子(または反交換子)が、

$$[\psi_s(\mathbf{r}), c_n^*] = \phi_{ns}(\mathbf{r})e^{-i\epsilon nt}, \quad [c_n, \psi_s^*(\mathbf{r})] = \phi_{ns}^*(\mathbf{r})e^{i\epsilon nt}$$

であること、また、 $[c_n, c_{n'}^*] = \delta_{nn'}$  に注意すると、 $M_{nn'}$  の計算規則は次のようにまとめられるでしょう。

- 組  $(n_1, n_2, \dots, n_N)$  から組  $(n'_1, n'_2, \dots, n'_N)$  への一対一対応 (双写) を作る。
- うち 2 つの対を選択する。これらを  $(i \rightarrow j), (k \rightarrow l)$  としたとき、因子  $\int d^3r d^3r' U(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \phi_i^\dagger(\mathbf{r}) \phi_j(\mathbf{r}) \phi_k^\dagger(\mathbf{r}') \phi_l(\mathbf{r}')$  を付与する。
- 他の対  $(i \rightarrow j)$  には因子  $\delta_{ij}$  を付与する。
- フェルミオンで一対一対応が奇置換の場合は符号因子  $(-1)$  を付与する。
- 以上の因子を全て掛け合わせ、可能な一対一対応と 2 つの対の選択について足し合わせる。
- ボゾンの場合で、状態  $|n\rangle$  において、ある軌道に複数の粒子がある場合は、その軌道にある粒子の個数を  $a$  として  $\sqrt{a!}$  で割る。 $|n'\rangle$  においても同様。

この規則においては、場  $\psi^* \psi$  を経由する 2 つの対を区別しません。これにより  $M_{nn'}$  の式にある因子  $(1/2)$  が消えます。また、時間を含む位相因子はトータルとして必ず消えます。さらに、フェルミオンの場合は生成消滅演算子や場の演算子を交換するたびにマイナス因子を生じるため、このような規則になるわけです。

特に縮退していない多粒子状態  $|n\rangle$  においては、摂動  $H_I$  によるエネルギー補正は、

$$\Delta E_n = M_{nn}$$

で与えられることとなります。縮退がある場合は、縮退したセクターにおける行列  $M_{nn'}$  を考えることとなります。

例えば、2 粒子状態  $|n\rangle = c_i^* c_j^* |0\rangle$  において  $M_{nn}$  を考えると、可能な組み合わせは、 $\{(i \rightarrow i), (j \rightarrow j)\}$  という恒等写像と  $\{(i \rightarrow j), (j \rightarrow i)\}$  という交差写像の 2 つです (図 14.4)。



図 14.4: 恒等写像と交差写像

これらの寄与はそれぞれ、

$$\int d^3r d^3r' U(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \phi_i^\dagger(\mathbf{r}) \phi_i(\mathbf{r}) \phi_j^\dagger(\mathbf{r}') \phi_j(\mathbf{r}'),$$

$$\pm \int d^3r d^3r' U(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \phi_i^\dagger(\mathbf{r}) \phi_j(\mathbf{r}) \phi_j^\dagger(\mathbf{r}') \phi_i(\mathbf{r}')$$



となり、直接エネルギー、および交換エネルギーと呼ばれます。複号上はボゾン、下はフェルミオンの場合です。 $|n\rangle$  が縮退していない場合は、これらの和がエネルギー補正になるわけです。ただしボゾンで  $i = j$  のときはこの結果を  $2!$  で割ることになり、それは直接エネルギーのみということと同じです。

どうしてこのような式で与えられるかを古典的に類推することはほとんど無意味でしょう。いわば、これが量子統計による結果なのです。

(余談) 直接・交換エネルギーの話は、多くの教科書においてスレーター行列式などを用いた非常に複雑な形式で与えられています。ここで紹介した  $M_{nn'}$  の計算規則は、場の量子論を用いて私なりに整理したのですが、通常このような規則が何と呼ばれているか私は存じません。多少文献を調べたり人に尋ねたりしたのですが、わかりませんでした。いずれにせよ、物理学専攻の学生の労力を軽減する1つの方法は、スレーター行列式を用いた多粒子系の量子論を割愛することだと私は考えています。場の量子論を用いれば、このように一般的かつシンプルに表現できるわけですから。

## 14.12 フェルミオンの2粒子系

多粒子系の摂動論の例題として、スピン  $1/2$  のフェルミオンの系を考えてみましょう。固有関数を、

$$\phi_{k\sigma}(\mathbf{r}) = \varphi_k(\mathbf{r})\gamma_\sigma \quad (k = 1, 2, \dots, \sigma = \pm 1/2)$$

とし、エネルギー固有値を  $\epsilon_k$  とします。また簡単のため、 $\epsilon_1 < \epsilon_2 < \dots$  を仮定します。このようなスピン自由度を無視したときに縮退のないエネルギースペクトルは、1次元か、もしくは異方性のある系において実現されます。 $\sigma$  はスピン量子数で、以下その値を  $\pm$  と略記します。

自己相互作用がない場合、2粒子状態の基底状態は、

$$|1+1-\rangle = c_{1+}^* c_{1-}^* |0\rangle$$

であり、そのエネルギーは、

$$E_1 = 2\epsilon_1$$

で、縮退はありません。一方、第1励起状態は、スピン自由度があるために、

$$|1+2+\rangle, |1-2-\rangle, |1+2-\rangle, |1-2+\rangle$$

の4重縮退となり、そのエネルギーは、

$$E_2 = \epsilon_1 + \epsilon_2$$

です。

ここでポテンシャルが  $U(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$  で与えられる自己相互作用が存在する場合を考えてみましょう。ただしその効果は小さく、摂動論が有効であるとします。

このとき基底状態のエネルギー補正は、直接エネルギーと交換エネルギーの和で、

$$\begin{aligned}\Delta E_1 &= \int d^3\mathbf{r}d^3\mathbf{r}' U(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \phi_{1+}^\dagger(\mathbf{r})\phi_{1+}(\mathbf{r}) \phi_{1-}^\dagger(\mathbf{r}')\phi_{1-}(\mathbf{r}') \\ &\quad - \int d^3\mathbf{r}d^3\mathbf{r}' U(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \phi_{1+}^\dagger(\mathbf{r})\phi_{1-}(\mathbf{r}) \phi_{1-}^\dagger(\mathbf{r}')\phi_{1+}(\mathbf{r}')\end{aligned}$$

ですが、上の固有関数を代入すると、交換エネルギーはスピンの効果により消えて、

$$\Delta E_1 = \int d^3\mathbf{r}d^3\mathbf{r}' U(\mathbf{r}, \mathbf{r}') |\varphi_1(\mathbf{r})|^2 |\varphi_1(\mathbf{r}')|^2$$

となります。

一方、第1励起状態については、縮退した4つの状態について  $M_{nn'}$  の各成分を評価して、

$M_{nn'}$	1+2+	1-2-	1+2-	1-2+
1+2+	$A+B$	0	0	0
1-2-	0	$A+B$	0	0
1+2-	0	0	$A$	$B$
1-2+	0	0	$B$	$A$

となるでしょう。ここで、

$$\begin{aligned}A &= \int d^3\mathbf{r}d^3\mathbf{r}' U(\mathbf{r}, \mathbf{r}') |\varphi_1(\mathbf{r})|^2 |\varphi_2(\mathbf{r}')|^2, \\ B &= - \int d^3\mathbf{r}d^3\mathbf{r}' U(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \varphi_1^*(\mathbf{r})\varphi_2(\mathbf{r}) \varphi_2^*(\mathbf{r}')\varphi_1(\mathbf{r}')\end{aligned}$$

です。  $|1+2-\rangle$  と  $|1-2+\rangle$  のセクターについては、固有方程式、

$$\begin{pmatrix} A & B \\ B & A \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{1+2-} \\ a_{1-2+} \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} a_{1+2-} \\ a_{1-2+} \end{pmatrix}$$

を解いて、

$$\lambda = A \pm B, \quad \begin{pmatrix} a_{1+2-} \\ a_{1-2+} \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ \pm 1 \end{pmatrix} \quad (\text{複号同順})$$

を得ます。よってまとめると、

$$|1+2+\rangle, \quad |1-2-\rangle, \quad \frac{1}{\sqrt{2}} (|1+2-\rangle + |1-2+\rangle)$$

という3つの状態のエネルギーは  $E_2 + A + B$  であり、いまだ3重縮退です。また、

$$\frac{1}{\sqrt{2}} (|1+2-\rangle - |1-2+\rangle)$$

のエネルギーは  $E_2 + A - B$  であり、他の状態から分岐することになります。

ちなみに、スピン  $1/2$  を2つ合成すると、スピン  $1$  とスピン  $0$  を生じますが、上の3重縮退はちょうど合成スピン  $1$  の3重項で、分岐したもう1つは合成スピン  $0$  の1重項になっています。このようにしか分岐できないのは、摂動  $H_I$  が加わっても系の内部  $SU(2)$  対称性： $\psi'(\mathbf{r}) = e^{-i\theta_a R_a^{(1/2)}} \psi(\mathbf{r})$  が保持されていて、このためスピン角運動量  $S$  (特に  $S_{\pm} = S_1 \pm iS_2$ ) が  $H + H_I$  と可換だからです。

### 14.13 ボゾンの多粒子系

もう1つの例題として、スピン  $0$  のボゾンの系を考えてみましょう。固有関数を  $\phi_k(\mathbf{r})$  ( $k = 1, 2, \dots$ ) とし、エネルギー固有値を  $\epsilon_k$  とします。再び簡単のため、 $\epsilon_1 < \epsilon_2 < \dots$  を仮定します。

自己相互作用がない場合、 $N$  粒子系の基底状態は  $(c_1^*)^N |0\rangle$  で、そのエネルギーは、

$$E_1 = N\epsilon_1$$

です。また、第1励起状態は  $c_2^*(c_1^*)^{N-1} |0\rangle$  で、そのエネルギーは、

$$E_2 = (N-1)\epsilon_1 + \epsilon_2$$

です。

ポテンシャルが  $U(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$  で与えられる自己相互作用が加わると、基底状態のエネルギー補正  $\Delta E_1$  は、 $N$  個の元から成る組  $(1, 1, \dots, 1)$  からそれ自身への1対1対応の場合の数が  $N!$ 、また、2つの対の選択の場合の数が  ${}_N C_2$  であることに注意して、

$$\begin{aligned} \Delta E_1 &= \frac{N! {}_N C_2}{(\sqrt{N!})^2} \int d^3\mathbf{r} d^3\mathbf{r}' U(\mathbf{r}, \mathbf{r}') |\phi_1(\mathbf{r})|^2 |\phi_1(\mathbf{r}')|^2 \\ &= {}_N C_2 \int d^3\mathbf{r} d^3\mathbf{r}' U(\mathbf{r}, \mathbf{r}') |\phi_1(\mathbf{r})|^2 |\phi_1(\mathbf{r}')|^2 \end{aligned}$$

となります。 $(\sqrt{N!})^2$  で割ったのは、1つの軌道に  $N$  個の粒子が入っているからです。

一方、第1励起状態については、場合分けにより場合の数を慎重に数えてやる必要があります：

- (a) 軌道2同士が対となり、これが選択されない場合： $(N-1)! {}_{N-1} C_2$  通り
- (b) 軌道2同士が対となり、これが選択される場合： $(N-1)!(N-1)$  通り
- (c) 軌道2同士が対にならない場合： $(N-1)^2 (N-2)!$  通り

(c) の場合、軌道 2 を含む対 2 つが選択される場合だけを数えています。それ以外は  $\delta_{12} = 0$  の因子により寄与しないからです。図 14.5 に  $N = 5$  における各場合の例を示します。白丸は選択された対応を意味します。

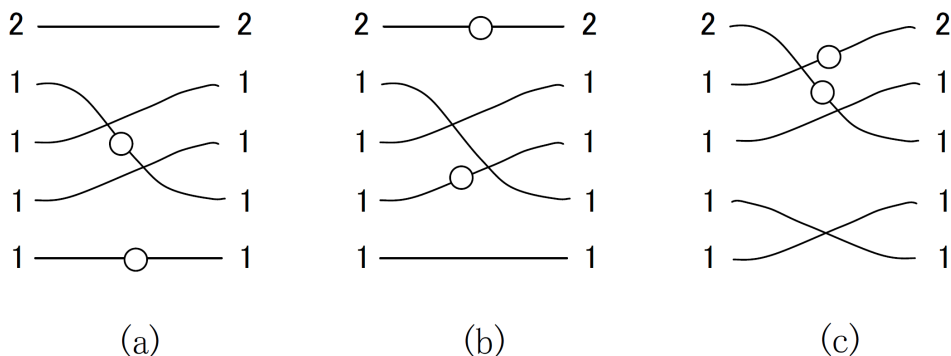


図 14.5: ボゾン系第 1 励起状態の摂動論

1 つの軌道に  $(N-1)$  個の粒子が入っているので、全体を  $(\sqrt{(N-1)!})^2 = (N-1)!$  で割らなければいけないことに注意して、第 1 励起状態のエネルギー補正は、

$$\Delta E_2 = \int d^3\mathbf{r} d^3\mathbf{r}' U(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \left( {}_{N-1}C_2 |\phi_1(\mathbf{r})|^2 |\phi_1(\mathbf{r}')|^2 + (N-1) |\phi_1(\mathbf{r})|^2 |\phi_2(\mathbf{r}')|^2 + (N-1) \phi_1^*(\mathbf{r}) \phi_2(\mathbf{r}) \phi_2^*(\mathbf{r}') \phi_1(\mathbf{r}') \right)$$

となります。この結果は各粒子対における直接・交換エネルギーの総和としても理解できます。

# 索引

あ	
位置スピン固有状態	9
か	
角運動量の合成	10
簡便量子化	6
軌道角運動量	8
グラスマン数	6
クレプシュ・ゴルダン係数	10
交換エネルギー	17
さ	
自己相互作用	13
シュレーディンガー場	3
消滅演算子	5
消滅定理	14
真空	5
スピン	3
スピン角運動量	8
スピン座標	3
スピン量子数	8
スレーター行列式	17
正規順序積	14
生成演算子	5
た	
第2量子化	4
多粒子系の摂動論	14
直接エネルギー	17
は	
パウリ排他律	6
場の量子化	5
反交換子	6
フェルミオン	6
フェルミ粒子	6
フォック空間	6
分岐	19
ボーズ粒子	6
ボゾン	6
ら	
粒子数	7
量子統計	6