あもんノート

ユークリッド幾何学、ニュートン力学から、相対論、宇宙論、量子論、場の量子論、素粒子論、そして超ひも理論まで、理論物理学を簡潔にかつ幅広く網羅したノートです。TOP へは下の URL をクリックして行けます。専用の画像掲示板で、ご意見、ご質問等も受け付けております。

http://amonphys.web.fc2.com/

目 次

第17章　量子電磁気学

量子電磁気学 (量子電磁力学、QED = Quantum ElectroDynamics) は荷電粒子と光子を記述する相対論的場の量子論です。非常に高い精度で実験と一致するため、最良の理論と評され、現代物理学のお手本と考えられています。また、QED の成功により、特殊相対論と量子論が共に良い理論で、これらを2本柱とする現代物理学が正しい方向に進んでいることが確信できるわけです。この章では、ディラック場、電磁場の量子論について詳しく説明した後、QED について説明します。ただし散乱の具体的な計算は他の章にゆずります。また、荷電共役変換とパリティ変換、ゲージ理論の一般論について解説し、素粒子論の準備とします。

17.1　ローレンツ群

時空の座標を $x^\mu = (t, \boldsymbol{r}) = (t, x, y, z)$ とし、ローレンツ計量を、

$$g_{\mu\nu} = \mathrm{diag}(1, -1, -1, -1)_{\mu\nu}$$

とします。線形変換 $x'^\mu = \Lambda^\mu{}_\nu x^\nu$ の係数行列が $g_{\mu\nu}\Lambda^\mu{}_\rho\Lambda^\nu{}_\sigma = g_{\rho\sigma}$ を満たすとき、この変換はローレンツ座標間の変換、すなわちローレンツ変換 $O(3,1)$ になります。行列表記で書けば、

$$\Lambda^T g \Lambda = g.$$

いま、単位元の近傍を考え、$\Lambda = 1 + \epsilon$ とおくと、ϵ の高次項を無視して、

$$\epsilon^T = -g\epsilon g$$

を得ます。その一般解は、

$$\epsilon = \begin{pmatrix} 0 & \omega^1 & \omega^2 & \omega^3 \\ \omega^1 & 0 & -\theta^3 & \theta^2 \\ \omega^2 & \theta^3 & 0 & -\theta^1 \\ \omega^3 & -\theta^2 & \theta^1 & 0 \end{pmatrix} = \theta^a J^a + \omega^a K^a$$

$$(J^a)_{\mu\nu} = -\epsilon^{0a\mu\nu}, \quad (K^a)_{\mu\nu} = \delta^0_\mu \delta^a_\nu + \delta^0_\nu \delta^a_\mu$$

と、6つの無限小パラメータ θ^a, ω^a $(a = 1, 2, 3)$ を使って書けます。$\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma}$ は4次元レビ・チビタで、上付き添字で定義したことに注意。

よって単位元と連結するローレンツ変換は、θ^a, ω^a を有限パラメータとして、

$$\Lambda = e^{\theta^a J^a + \omega^a K^a}$$

と表すことができ、これを**本義ローレンツ変換** $SO(3,1)$ といいます。J^a により生成される部分は空間の回転を、K^a により生成される部分はブーストを意味します。リー代数の構造は、

$$[J^a, J^b] = \epsilon_{abc} J^c, \quad [J^a, K^b] = \epsilon_{abc} K^c, \quad [K^a, K^b] = -\epsilon_{abc} J^c$$

となることが確かめられます。ϵ_{abc} は3次元レビ・チビタです。空間の回転全体は部分群を成しますが、ブーストの全体は部分群を成さないことがわかるでしょう。これは特殊相対論の章でも確かめたことです。

17.2 スピノル場

パウリ行列、

$$\sigma^1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma^2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma^3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

が、性質、

$$[\sigma^a, \sigma^b] = 2i\epsilon_{abc}\sigma^c, \quad \{\sigma^a, \sigma^b\} = 2\delta^a_b$$

を持つことに注意すると、

$$(J^a, K^a) = \left(-\frac{i}{2}\,\sigma^a,\ \pm\frac{1}{2}\,\sigma^a\right)$$

が $SO(3,1)$ のリー代数を満たすことがわかります。すなわち、

$$a = e^{-(i/2)\theta^a\sigma^a + (1/2)\omega^a\sigma^a}, \quad b = e^{-(i/2)\theta^a\sigma^a - (1/2)\omega^a\sigma^a}$$

はどちらも $SO(3,1)$ の2次元表現です。$\mathrm{tr}\sigma^a = 0$ なので、a, b は行列式 1 の複素行列 $SL(2,\mathbf{C})$ の元であることがわかります。一般に行列 M に対し $\det e^M = e^{\mathrm{tr}M}$ であったことに注意してください (連続群論入門の章参照)。よって、$\epsilon_{\alpha\beta}$ を2次元レビ・チビタとして、

$$\epsilon_{\alpha\beta} a_{\alpha\gamma} a_{\beta\delta} = \epsilon_{\gamma\delta} \quad \therefore\ a^T \epsilon a = \epsilon. \quad \text{同様に} \quad b^T \epsilon b = \epsilon$$

が成り立ちます。

いま、本義ローレンツ変換に対して、

$$\xi'(x') = a\xi(x), \quad \eta'(x') = b\eta(x)$$

のように変換される 2 成分の複素数の場を、それぞれ、**2 スピノル場**、2^* スピノル場と呼びます。このとき、$\xi^T(x)\epsilon\xi(x)$ や $\eta^T(x)\epsilon\eta(x)$ がローレンツスカラーになることは、上の性質からただちにわかるでしょう。また、$b^\dagger a = 1$ が確かめられるので、$\eta^\dagger(x)\xi(x)$ もローレンツスカラーです。

さらに、

$$\sigma^\mu = (1, \boldsymbol{\sigma}), \quad \bar{\sigma}^\mu = (1, -\boldsymbol{\sigma}) \qquad (\, 1 \text{ は } 2\times 2 \text{ の単位行列} \,)$$

で 2 つの **4 元パウリ行列**を定義すると、無限小変換を考える事により、$\xi^\dagger(x)\sigma^\mu\xi(x)$ および $\eta^\dagger(x)\bar{\sigma}^\mu\eta(x)$ がそれぞれローレンツベクトルになることが確かめられます。証明は例えば、

$$\begin{aligned}
\xi'^\dagger(x')\sigma^\mu\xi'(x') &= \xi^\dagger(x)\left(1 + \frac{i}{2}\,\theta^a\sigma^a + \frac{1}{2}\,\omega^a\sigma^a\right)\sigma^\mu\left(1 - \frac{i}{2}\,\theta^a\sigma^a + \frac{1}{2}\,\omega^a\sigma^a\right)\xi(x) \\
&= \xi^\dagger(x)\left(\sigma^\mu + \frac{i}{2}\,\theta^a[\sigma^a, \sigma^\mu] + \frac{1}{2}\,\omega^a\{\sigma^a, \sigma^\mu\}\right)\xi(x) \\
&= \xi^\dagger(x)\Big(\sigma^\mu - \theta^a\epsilon^{0a\mu b}\sigma^b + \omega^a(\delta^0_\mu\sigma^a + \delta^a_\mu)\Big)\,\xi(x) \\
&= \Big(\delta^\mu_\nu - \theta^a\epsilon^{0a\mu\nu} + \omega^a(\delta^0_\mu\delta^a_\nu + \delta^0_\nu\delta^a_\mu)\Big)\,\xi^\dagger(x)\sigma^\nu\xi(x) \; = \Lambda^\mu{}_\nu\,\xi^\dagger(x)\sigma^\nu\xi(x).
\end{aligned}$$

17.3 ディラック場とガンマ行列

相対論的な場の量子論においては、作用汎関数はローレンツ不変で、かつ実でなければいけませんでした。スピノル場のラグランジアン密度の運動項としては、

$$\mathcal{L}_\xi = \frac{i}{2}\,\xi^\dagger(x)\sigma^\mu\partial_\mu\xi(x) + c.c., \quad \mathcal{L}_\eta = \frac{i}{2}\,\eta^\dagger(x)\bar{\sigma}^\mu\partial_\mu\eta(x) + c.c.$$

が考えられます。$c.c.$ は前の項の複素共役を意味します。これらはローレンツスカラーで、かつ実です。$\mathcal{L}_\xi$ は、

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_\xi &= \frac{i}{2}\,\xi^\dagger(x)\sigma^\mu\partial_\mu\xi(x) - \frac{i}{2}\,\partial_\mu\xi^\dagger(x)\sigma^\mu\xi(x) \\
&= i\xi^\dagger(x)\sigma^\mu\partial_\mu\xi(x) - \frac{i}{2}\,\partial_\mu(\xi^\dagger(x)\sigma^\mu\xi(x))
\end{aligned}$$

と書けますが、ラグランジアン密度における時空全微分項は作用汎関数に寄与しないので、これを取り除き、

$$\mathcal{L}_\xi = i\xi^\dagger(x)\sigma^\mu\partial_\mu\xi(x)$$

のように簡単に表すこともできます。$\mathcal{L}_\eta$ も同様に、

$$\mathcal{L}_\eta = i\eta^\dagger(x)\bar{\sigma}^\mu\partial_\mu\eta(x).$$

一方、質量項としては、$\xi(x)$ と $\eta(x)$ が分離しているとした場合、

$$\mathcal{L}_{\xi-\mathrm{mass}} = m_\xi \xi^T(x)\epsilon\xi(x) + c.c., \quad \mathcal{L}_{\eta-\mathrm{mass}} = m_\eta \eta^T(x)\epsilon\eta(x) + c.c.$$

が考えられ、**マヨラナ質量項**と呼ばれます。m_ξ, m_η は複素数です。また、$\xi(x)$ と $\eta(x)$ が結合する質量項としては、

$$\mathcal{L}_{\xi\eta-\mathrm{mass}} = -m\left(\xi^\dagger(x)\eta(x) + \eta^\dagger(x)\xi(x)\right)$$

が考えられ、**ディラック質量項**と呼ばれます。m は実数で、特に $\eta(x) \to -\eta(x)$ という場の再定義が許されるので、非負の実数と仮定しても一般性を失いません。

マヨラナ質量項がないと仮定すると、ラグランジアン密度は、全体で、

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_\xi + \mathcal{L}_\eta + \mathcal{L}_{\xi\eta-\mathrm{mass}} = \begin{pmatrix}\eta(x)\\ \xi(x)\end{pmatrix}^\dagger \begin{pmatrix}-m & i\bar{\sigma}\cdot\partial \\ i\sigma\cdot\partial & -m\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\xi(x)\\ \eta(x)\end{pmatrix}.$$

あるいは、

$$\mathcal{L} = \bar{\psi}(x)(i\gamma\cdot\partial - m)\psi(x)$$

と書けます。ここで、

$$\psi(x) = \begin{pmatrix}\xi(x)\\ \eta(x)\end{pmatrix}, \quad \bar{\psi}(x) = \psi^\dagger(x)\gamma^0, \quad \gamma^\mu = \begin{pmatrix}0 & \bar{\sigma}^\mu \\ \sigma^\mu & 0\end{pmatrix}$$

であり、4 成分の場 $\psi(x)$ は**ディラック場**、$\bar{\psi}(x)$ はその**ディラック共役**と呼ばれます。4 次正方行列である γ^μ は、**ガンマ行列**と呼ばれます。

ガンマ行列は、

$$\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = 2g^{\mu\nu}$$

という反交換関係を満たすことが確かめられ、これを満たす代数は一般に**クリフォード代数**と呼ばれます。これは、異なるガンマ行列が反可換で、

$$(\gamma^0)^2 = 1, \quad (\gamma^1)^2 = (\gamma^2)^2 = (\gamma^3)^2 = -1$$

ということをいっています。また、γ^0 はエルミート行列、$\gamma^1, \gamma^2, \gamma^3$ は反エルミート行列なので、

$$\gamma^{\mu\dagger} = \gamma_\mu = \gamma^0\gamma^\mu\gamma^0.$$

さらに、

$$\gamma_5 = i\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3 = \begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix} \quad (\,1\,\text{は}\,2\times 2\,\text{の単位行列})$$

を定義すると、これは全てのガンマ行列と反可換になります :

$$\{\gamma_5, \gamma^\mu\} = 0.$$

γ_5 は**カイラリティ**と呼ばれます$^{(*)}$。

スピノル場のローレンツ変換性から、ディラック場のローレンツ変換式は、

$$\psi'(x') = \begin{pmatrix} e^{-(i/2)\theta^a\sigma^a+(1/2)\omega^a\sigma^a} & 0 \\ 0 & e^{-(i/2)\theta^a\sigma^a-(1/2)\omega^a\sigma^a} \end{pmatrix} \psi(x), \quad x' = e^{\theta^a J^a + \omega^a K^a} x$$

と表されることになります。

(*注) カイラル(chiral)は “左右の掌の”、“左右非対称な” という意味で、カイラリティ(chirality)はその名詞形です。行列 γ_5 がこのように呼ばれる理由は後でわかります。

17.4 ディラック方程式

ディラック場のラグランジアン密度：

$$\mathcal{L} = \bar{\psi}(i\gamma\cdot\partial - m)\psi$$

に関して、

$$\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\psi_\alpha} = -m\bar{\psi}_\alpha, \quad \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\partial_\mu\psi_\alpha} = (i\bar{\psi}\gamma^\mu)_\alpha \quad (\alpha = 1 \sim 4)$$

ですから、ψ_α に関するオイラー・ラグランジュ方程式は、

$$-m\bar{\psi} - i\partial_\mu\bar{\psi}\gamma^\mu = 0.$$

右から γ^0 をかけると、$\gamma^0\gamma^0 = 1,\ \gamma^0\gamma^\mu\gamma^0 = \gamma^{\mu\dagger}$ に注意して、

$$-m\psi^\dagger - i\partial_\mu\psi^\dagger\gamma^{\mu\dagger} = 0.$$

エルミート共役をとって、

$$(i\gamma\cdot\partial - m)\psi = 0$$

となります。一方、ψ^*_α に関するオイラー・ラグランジュ方程式も同じ式を与えることが簡単にわかり、すなわち上式が場の方程式であり、**ディラック方程式**と呼ばれます。

(余談) 波動力学におけるディラック方程式の導出は、ハミルトニアンを H, 運動量演算子を $\boldsymbol{p} = -i\boldsymbol{\nabla}$ として、$H^2 = |\boldsymbol{p}|^2 + m^2 = (\boldsymbol{\alpha}\cdot\boldsymbol{p} + \beta m)^2$ とおき、これが満たされるように行列 $\boldsymbol{\alpha}$ と β を定めるというものですが、多くの教科書で見られるこのような導出では波動関数(ディラック場)のローレンツ変換が明瞭ではありません。また、ディラック方程式を波動力学の基礎方程式として考えるのはそもそも無理があります。なぜなら、ディラック方程式からは負のエネルギー状態が無限に生じ、波動力学ではそれら状態が全て占有されていると考えるわけですが(**空孔理論**)、そうすると必然的に多体系を考えていることになるからです。相対論的な量子論は最初から場の理論として考えた方が自然なのです。

17.5 ディラック方程式の一般解

ディラック方程式の解を求めるために、まず、

$$\psi(x) \propto f\, e^{-i\omega t+ikz}, \quad k \geq 0$$

という、z 方向に進む平面波を考えましょう。これをディラック方程式に代入すれば、

$$(\gamma^0\omega - \gamma^3 k - m)f = 0 \quad \therefore \begin{pmatrix} -m & 0 & \omega{+}k & 0 \\ 0 & -m & 0 & \omega{-}k \\ \omega{-}k & 0 & -m & 0 \\ 0 & \omega{+}k & 0 & -m \end{pmatrix} f = 0$$

を得ます。この 4 次正方行列の行列式を計算すれば、$(\omega^2{-}k^2{-}m^2)^2$ となるので、f が零ベクトルでない条件は $\omega = \pm\sqrt{k^2{+}m^2}$ です。まずは正振動数の解を求めることにし、$\omega = k^0 := \sqrt{k^2{+}m^2}$ とします。そうすると固有ベクトルとして、

$$f_+(k) = \begin{pmatrix} \sqrt{k^0{+}k} \\ 0 \\ \sqrt{k^0{-}k} \\ 0 \end{pmatrix}, \quad f_-(k) = i \begin{pmatrix} 0 \\ \sqrt{k^0{-}k} \\ 0 \\ \sqrt{k^0{+}k} \end{pmatrix}$$

を得るでしょう。規格化は自由ですが、簡単と後の便宜のため、このように定めます。このとき、

$$\bar{f}_s(k) f_{s'}(k) = 2m\delta^s_{s'}$$

が確かめられます。

次に任意の方向に進む平面波解を求めるために、$x' = e^{\phi J^3} e^{\theta J^2} x$ という回転変換を行いましょう。逆変換は $x = e^{-\theta J^2} e^{-\phi J^3} x'$ となるので、

$$\begin{pmatrix} t \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & 0 & -\sin\theta \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & \sin\theta & 0 & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\phi & \sin\phi & 0 \\ 0 & -\sin\phi & \cos\phi & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t' \\ x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$$

$$\therefore \ t = t', \quad z = x'\sin\theta\cos\phi + y'\sin\theta\sin\phi + z'\cos\theta.$$

これに注意して、新しい系におけるディラック場は、

$$\begin{aligned} \psi'(x') &= \begin{pmatrix} e^{-(i/2)\phi\sigma^3} & 0 \\ 0 & e^{-(i/2)\phi\sigma^3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{-(i/2)\theta\sigma^2} & 0 \\ 0 & e^{-(i/2)\theta\sigma^2} \end{pmatrix} f_s(k)\, e^{-ik^0 t+ikz} \\ &= \begin{pmatrix} R(\theta,\phi) & 0 \\ 0 & R(\theta,\phi) \end{pmatrix} f_s(k)\, e^{-ik^0 t'+i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}'} \end{aligned}$$

となり、ここで、

$$R(\theta,\phi) = e^{-(i/2)\phi\sigma^3} e^{-(i/2)\theta\sigma^2} = \begin{pmatrix} e^{-i\phi/2} & 0 \\ 0 & e^{i\phi/2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos(\theta/2) & -\sin(\theta/2) \\ \sin(\theta/2) & \cos(\theta/2) \end{pmatrix}.$$

また、$\boldsymbol{k} = k(\sin\theta\cos\phi, \sin\theta\sin\phi, \cos\theta)$ です。よって、平面波の進む方向が球面座標で (θ,ϕ) の方向となる解として、

$$\psi(x) \propto u_s(\boldsymbol{k}) e^{-ik\cdot x}, \quad u_s(\boldsymbol{k}) = \begin{pmatrix} R(\theta,\phi) & 0 \\ 0 & R(\theta,\phi) \end{pmatrix} f_s(|\boldsymbol{k}|)$$

を得ます。ここで $k^0 = \sqrt{|\boldsymbol{k}|^2 + m^2}$, $s = \pm 1$.

一方、負振動数の場合ですが、負振動数の解を改めて $\propto v_s(\boldsymbol{k}) e^{ik\cdot x}$ とおくと、ディラック方程式に代入し $(\gamma\cdot k + m) v_s(\boldsymbol{k}) = 0$ です。これは実は、

$$v_s(\boldsymbol{k}) = i\gamma^2 u_s^*(\boldsymbol{k})$$

において満たされることがわかります。ガンマ行列の中で γ^2 だけが純虚数成分から成ること、およびクリフォード代数に注意すると $\gamma^2\gamma^\mu\gamma^2 = \gamma^{\mu *}$ がわかり、また、$(\gamma\cdot k - m) u_s(\boldsymbol{k}) = 0$ だからです。

結局、ディラック方程式の一般解は、

$$\psi(x) = \int \frac{d^3\boldsymbol{k}}{(2\pi)^3 2k^0} \sum_{s=\pm} \Big(b_s(\boldsymbol{k}) u_s(\boldsymbol{k}) e^{-ik\cdot x} + d_s^*(\boldsymbol{k}) v_s(\boldsymbol{k}) e^{ik\cdot x} \Big)$$

と書けることがわかりました。ここで $b_s(\boldsymbol{k})$, $d_s(\boldsymbol{k})$ は任意の複素数、あるいは複素グラスマン数です。

17.6　平面波振幅の性質

ディラック場の**平面波振幅** $u_s(\boldsymbol{k})$, $v_s(\boldsymbol{k})$ は以下の性質を持ちます。

$$(\gamma\cdot k - m) u_s(\boldsymbol{k}) = 0, \quad (\gamma\cdot k + m) v_s(\boldsymbol{k}) = 0,$$

$$v_s(\boldsymbol{k}) = i\gamma^2 u_s^*(\boldsymbol{k}), \quad u_s(\boldsymbol{k}) = i\gamma^2 v_s^*(\boldsymbol{k}),$$

$$\bar{u}_s(\boldsymbol{k}) u_{s'}(\boldsymbol{k}) = 2m\delta^s_{s'}, \quad \bar{v}_s(\boldsymbol{k}) v_{s'}(\boldsymbol{k}) = -2m\delta^s_{s'}.$$

これらは解の構成から自明、もしくは直接的にわかるでしょう。

$$\bar{u}_s(\boldsymbol{k}) \gamma^\mu u_{s'}(\boldsymbol{k}) = 2k^\mu \delta^s_{s'}, \quad \bar{v}_s(\boldsymbol{k}) \gamma^\mu v_{s'}(\boldsymbol{k}) = 2k^\mu \delta^s_{s'}.$$

左式は恒等式 $\{\gamma^\mu, \gamma\cdot k\} = 2k^\mu$ を $\bar{u}_s(\boldsymbol{k})$, $u_{s'}(\boldsymbol{k})$ で挟めばわかります。右式も同様です。

$$u_s^\dagger(\boldsymbol{k}) v_{s'}(-\boldsymbol{k}) = 0.$$

これは $u_s(\boldsymbol{k}),\, v_s(-\boldsymbol{k})$ がそれぞれエルミート行列 $\gamma^0(\gamma^i k^i + m)$ の固有値 k^0 および $-k^0$ の固有ベクトルになってため成り立ちます。(エルミート行列の異なる固有値に関する固有ベクトルは互いに直交します。)

また、(θ,ϕ) と逆向きの方位天頂角、$\theta' = \pi - \theta,\ \phi' = \phi \pm \pi$ に対し、

$$R(\theta',\phi') = \pm i R(\theta,\phi)\,\sigma^1$$

が確かめられるので (複号同順)、これを用いて、

$$u_s(-\boldsymbol{k}) = \gamma^0 u_{-s}(\boldsymbol{k}), \quad v_s(-\boldsymbol{k}) = -\gamma^0 v_{-s}(\boldsymbol{k})$$

という性質が確かめられるでしょう。$u_s(\boldsymbol{k}),\, v_s(\boldsymbol{k})$ は $\boldsymbol{k}$ の向きを一回転させると符号が変わる性質があり (**2 価性**)、この符号の不定性を上の左式が成り立つよう一部固定しています。

上 2 つの性質から、

$$\bar{u}_s(\boldsymbol{k}) v_{s'}(\boldsymbol{k}) = 0$$

です。$\{u_+(\boldsymbol{k}), u_-(\boldsymbol{k}), v_+(\boldsymbol{k}), v_-(\boldsymbol{k})\}$ は $\bar{a}b$ を $a,\ b$ の内積とみなしたときに直交系になっていることがわかります。そうすると、$u_+(\boldsymbol{k}),\ u_-(\boldsymbol{k})$ が張る部分空間への射影演算子が $(\gamma\cdot k + m)/(2m),\ v_+(\boldsymbol{k}),\ v_-(\boldsymbol{k})$ が張る空間への射影演算子が $(-\gamma\cdot k + m)/(2m)$ と書けることから、

$$\sum_{s=\pm} u_s(\boldsymbol{k})\bar{u}_s(\boldsymbol{k}) = \gamma\cdot k + m, \quad \sum_{s=\pm} v_s(\boldsymbol{k})\bar{v}_s(\boldsymbol{k}) = \gamma\cdot k - m$$

がいえます。

さらに、$R(\theta,\phi) \in SU(2)$ から $\epsilon R(\theta,\phi) = R^*(\theta,\phi)\epsilon$ が成り立ち、

$$\gamma_5\gamma^2 = i\begin{pmatrix} 0 & \epsilon \\ \epsilon & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & \epsilon \\ \epsilon & 0 \end{pmatrix} f_s(k) = i f_{-s}(k), \quad f_s^*(k) = s f_s(k)$$

に注意すれば、

$$\gamma_5\gamma^2 u_s(\boldsymbol{k}) = s\, u_{-s}^*(\boldsymbol{k}), \quad \gamma_5\gamma^2 v_s(\boldsymbol{k}) = s\, v_{-s}^*(\boldsymbol{k})$$

という性質も確かめられるでしょう。

17.7 正粒子と反粒子

ディラック場の正準共役場は $\partial\mathcal{L}/\partial\dot{\psi}_\alpha = i\psi_\alpha^*$ なので、フェルミオンで量子化するとすれば、正準反交換関係は、

$$\{\psi_\alpha(x), \psi_{\alpha'}^*(x')\}_{t=t'} = \delta_{\alpha'}^{\alpha}\delta^3(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}')$$

で、他は同時刻反可換です。これは、

$$\{b_s(\boldsymbol{k}), b_{s'}^*(\boldsymbol{k}')\} = (2\pi)^3 2k^0 \delta_{s'}^s \delta^3(\boldsymbol{k}-\boldsymbol{k}'),$$

$$\{d_s(\boldsymbol{k}), d_{s'}^*(\boldsymbol{k}')\} = (2\pi)^3 2k^0 \delta_{s'}^s \delta^3(\boldsymbol{k}-\boldsymbol{k}')$$

で、他が反可換ならば成り立ちます。実際このとき、

$$\begin{aligned}&\{\psi_\alpha(x), \psi_{\alpha'}^*(x')\}_{t=t'} \\ &= \int \frac{d^3\boldsymbol{k}}{(2\pi)^3 2k^0} \left(\sum_s u_s(\boldsymbol{k}) u_s^\dagger(\boldsymbol{k}) + \sum_s v_s(-\boldsymbol{k}) v_s^\dagger(-\boldsymbol{k}) \right)_{\alpha\alpha'} e^{i\boldsymbol{k}\cdot(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}')}\end{aligned}$$

と計算されますが、

$$\sum_s u_s(\boldsymbol{k}) u_s^\dagger(\boldsymbol{k}) = \sum_s u_s(\boldsymbol{k}) \bar{u}_s(\boldsymbol{k}) \gamma^0 = (\gamma\cdot k + m)\gamma^0,$$

$$\sum_s v_s(-\boldsymbol{k}) v_s^\dagger(-\boldsymbol{k}) = \sum_s \gamma^0 v_{-s}(\boldsymbol{k}) v_{-s}^\dagger(\boldsymbol{k}) \gamma^0 = \gamma^0(\gamma\cdot k - m)$$

であり、これらの和は $\gamma\cdot k\gamma^0 + \gamma^0\gamma\cdot k = k_\mu\{\gamma^\mu, \gamma^0\} = 2k_\mu g^{\mu 0} = 2k^0$ となるので、正準反交換関係が満たされることがわかります。

エネルギー運動量テンソルは、

$$T^{\mu\nu} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial\partial_\mu \psi_\alpha} \partial^\nu \psi_\alpha - g^{\mu\nu}\mathcal{L} = \bar{\psi} i \gamma^\mu \partial^\nu \psi.$$

ディラック方程式から $\mathcal{L} = 0$ であることに注意して下さい。よって 4 元運動量は、

$$P^\mu = \int d^3\boldsymbol{r}\ T^{0\mu}(x) = i \int d^3\boldsymbol{r}\ \psi^\dagger(x) \partial^\mu \psi(x)$$

となります。基準モード展開 (一般解) の式を代入し、$u_s^\dagger(\boldsymbol{k}) v_{s'}(-\boldsymbol{k}) = 0$ および $u_s^\dagger(\boldsymbol{k}) u_{s'}(\boldsymbol{k}) = v_s^\dagger(\boldsymbol{k}) v_{s'}(\boldsymbol{k}) = 2k^0 \delta_{s'}^s$ に注意して整理すると、

$$P^\mu = \int \frac{d^3\boldsymbol{k}}{(2\pi)^3 2k^0} \sum_s k^\mu \left(b_s^*(\boldsymbol{k}) b_s(\boldsymbol{k}) - d_s(\boldsymbol{k}) d_s^*(\boldsymbol{k}) \right)$$

を得ます。さらに $d_s(\boldsymbol{k}), d_s^*(\boldsymbol{k})$ に関する反交換関係を用いると、

$$P^\mu = \int \frac{d^3\boldsymbol{k}}{(2\pi)^3 2k^0} \sum_s k^\mu \left(b_s^*(\boldsymbol{k}) b_s(\boldsymbol{k}) + d_s^*(\boldsymbol{k}) d_s(\boldsymbol{k}) \right) + \delta_0^\mu V_0$$

ここで、

$$V_0 = -2 \int \frac{d^3\boldsymbol{r} d^3\boldsymbol{k}}{(2\pi)^3}\ k^0$$

です。ここから、

$$[P^\mu, b_s^*(\boldsymbol{k})] = k^\mu b_s^*(\boldsymbol{k}), \quad [P^\mu, d_s^*(\boldsymbol{k})] = k^\mu d_s^*(\boldsymbol{k})$$

がわかるので、$b_s^*(\boldsymbol{k})$, $d_s^*(\boldsymbol{k})$ はそれぞれ4元運動量 k^μ の粒子を生成します。これらの粒子を、それぞれ、**正粒子**、**反粒子**といいます。考えているディラック場が電子の場なら、正粒子は電子、反粒子は**陽電子**と呼ばれる素粒子になります。

もし反交換関係でなく交換関係で量子化していたら、P^μ の式の最後の変形で反粒子部分の符号が変わらないため、反粒子が負のエネルギーを持ってしまうことに注意してください。この場合、安定な真空が定義できなくなります。ディラック場はフェルミオンとしてしか量子化できないわけです。V_0 は負の無限大で、真空のエネルギーを意味します。

(余談) ディラック方程式の一般解において $d_s(\boldsymbol{k})$ をあらかじめ複素共役として導入したのは、反粒子が正のエネルギーを持つようにするためです。いにしえのディラックの空孔理論は、場の量子論においては生成消滅演算子の入れ換えだけで表現されてしまうわけです。一方、ボゾンでは生成消滅演算子を入れ換えても符号が変わらないため、どうしても負エネルギー粒子を生じてしまいます。

17.8 粒子数とスピン

ディラック場のラグランジアン密度は、

$$\psi'(x) = e^{-i\theta}\psi(x)$$

という位相変換 $U(1)$ に対して不変です。その保存カレントは、ネーターの定理から、

$$\rho^\mu(x) = \bar{\psi}(x) i\gamma^\mu(-i)\psi(x) = \bar{\psi}(x)\gamma^\mu\psi(x)$$

です。よって、

$$N = \int d^3\boldsymbol{r}\,\rho^0(x) = \int d^3\boldsymbol{r}\ \psi^\dagger(x)\psi(x)$$

が保存量であり、**粒子数**と呼ばれます。基準モード展開の式を代入すると、

$$N = \int \frac{d^3\boldsymbol{k}}{(2\pi)^3 2k^0} \sum_s \big(b_s^*(\boldsymbol{k})b_s(\boldsymbol{k}) - d_s^*(\boldsymbol{k})d_s(\boldsymbol{k})\big) + N_0, \quad N_0 = 2\int \frac{d^3\boldsymbol{r}d^3\boldsymbol{k}}{(2\pi)^3}$$

となり、よって

$$[N,\, b_s^*(\boldsymbol{k})] = b_s^*(\boldsymbol{k}), \quad [N,\, d_s^*(\boldsymbol{k})] = -d_s^*(\boldsymbol{k})$$

であり、正粒子は粒子数 $+1$, 反粒子は粒子数 -1 を持つことがわかります。

真空の粒子数 N_0 は無限大ですが、これは例えば、古典論におけるディラック場がグラスマン数であることに注意し、もともとの保存カレントを、

$$\rho^\mu = \frac{1}{2}\left(\bar{\psi}_\alpha \gamma^\mu_{\alpha\beta}\psi_\beta - \psi_\beta \gamma^\mu_{\alpha\beta}\bar{\psi}_\alpha\right) = \frac{1}{2}\left(\bar{\psi}\gamma^\mu\psi - \psi^T\gamma^{\mu T}\bar{\psi}^T\right)$$

であると考えれば生じません。また、粒子が粒子数プラスで反粒子が粒子数マイナスであることに絶対的な意味はありません。最初の位相変換のパラメータの符号を逆に定義すれば、両者の符号は反対になります。

一方、ディラック場のラグランジアン密度は、

$$\psi'(x') = e^{-(i/2)\theta^a\sigma_4^a}\psi(x), \quad x' = e^{\theta^a J^a}x$$

という空間回転 $SO(3)$ に対して不変です。ここで、

$$\sigma_4^a = \begin{pmatrix} \sigma^a & 0 \\ 0 & \sigma^a \end{pmatrix}$$

は 4×4 のパウリ行列です。保存カレントは $\bar{\psi}\gamma^\mu(\sigma_4^a/2 - i(\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{\nabla})_a)\psi$ と計算されるので、

$$L^a = \int d^3\boldsymbol{r}\ \psi^\dagger(x)\left(\frac{\sigma_4^a}{2} - i(\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{\nabla})_a\right)\psi(x)$$

がディラック場の角運動量で、保存します。$\sigma_4^a/2$ から来る項が**スピン角運動量**で、$-i(\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{\nabla})_a$ から来る項が軌道角運動量を意味します。

スピン角運動量を S^a と書き、基準モード展開の式を代入すると、

$$\begin{aligned} S^a = \int \frac{d^3\boldsymbol{k}}{2(2\pi)^3(2k^0)^2}\sum_{ss'}\Big(& b_s^*(\boldsymbol{k})b_{s'}(\boldsymbol{k})\,u_s^\dagger(\boldsymbol{k})\sigma_4^a u_{s'}(\boldsymbol{k}) \\ & + d_s(\boldsymbol{k})d_{s'}^*(\boldsymbol{k})\,v_s^\dagger(\boldsymbol{k})\sigma_4^a v_{s'}(\boldsymbol{k}) \\ & + b_s^*(\boldsymbol{k})d_{s'}^*(-\boldsymbol{k})\,u_s^\dagger(\boldsymbol{k})\sigma_4^a v_{s'}(-\boldsymbol{k})\,e^{i2k^0t} \\ & + d_s(\boldsymbol{k})b_{s'}(-\boldsymbol{k})\,v_s^\dagger(\boldsymbol{k})\sigma_4^a u_{s'}(-\boldsymbol{k})\,e^{-i2k^0t}\Big) \end{aligned}$$

のように展開されますが、$\boldsymbol{p}$ を z 方向のベクトルとしたとき、

$$u_s^\dagger(\boldsymbol{p})\sigma_4^3 u_{s'}(\boldsymbol{p}) = -v_s^\dagger(\boldsymbol{p})\sigma_4^3 v_{s'}(\boldsymbol{p}) = 2p^0 s\,\delta^s_{s'}, \quad v_s^\dagger(\boldsymbol{p})\sigma_4^3 u_{s'}(-\boldsymbol{p}) = 0$$

が確かめられるので、このとき特に S^3 について、

$$[S^3, b_s^*(\boldsymbol{p})] = \frac{s}{2}\,b_s^*(\boldsymbol{p}), \quad [S^3, d_s^*(\boldsymbol{p})] = \frac{s}{2}\,d_s^*(\boldsymbol{p})$$

です。すなわち一般に $b_s^*(\boldsymbol{k})$, $d_s^*(\boldsymbol{k})$ で生成される粒子反粒子は、その運動方向のスピン角運動量成分が $s/2$ です。運動方向のスピン成分を**ヘリシティ**といいます。$s = \pm 1$ なので、ディラック場の粒子反粒子はヘリシティ $\pm 1/2$ を持つことがわかったわけです。

17.9 ローレンツ変換式の4次元表記

ここで、ディラック場のローレンツ変換式について、やや補足的な事柄を述べておきます。

座標の無限小ローレンツ変換式は、

$$x'^{\mu} = x^{\mu} + \epsilon^{\mu}{}_{\nu} x^{\nu}, \quad \epsilon^{0}{}_{0} = 0, \quad \epsilon^{0}{}_{a} = \epsilon^{a}{}_{0} = \omega^{a}, \quad \epsilon^{a}{}_{b} = -\epsilon_{abc}\theta^{c}$$

ですが、$\epsilon^{\mu}{}_{\nu}$ の前の添字を下げると、

$$\epsilon_{00} = 0, \quad \epsilon_{0a} = -\epsilon_{a0} = \omega^{a}, \quad \epsilon_{ab} = \epsilon_{abc}\theta^{c}$$

となり、$\epsilon_{\mu\nu}$ は2つの添字について反対称になることがわかります。このことに注意すると、座標の無限小ローレンツ変換式は、特にリー代数を抽出する形で、

$$x'^{\mu} = x^{\mu} + \frac{1}{2}\,\epsilon_{\rho\sigma}(M^{\rho\sigma})_{\mu\nu} x^{\nu}, \quad (M^{\rho\sigma})_{\mu\nu} = g^{\rho\mu}\delta^{\sigma}_{\nu} - g^{\sigma\mu}\delta^{\rho}_{\nu}$$

と表すことができます。

一方、ディラック場の無限小ローレンツ変換式は、

$$\psi'(x') = U\psi(x), \quad U = 1 - \frac{i}{2}\,\theta^{a}\begin{pmatrix}\sigma^{a} & 0 \\ 0 & \sigma^{a}\end{pmatrix} + \frac{1}{2}\,\omega^{a}\begin{pmatrix}\sigma^{a} & 0 \\ 0 & -\sigma^{a}\end{pmatrix}$$

ですが、

$$[\,\gamma^{0}, \gamma^{a}\,] = 2\begin{pmatrix}\sigma^{a} & 0 \\ 0 & -\sigma^{a}\end{pmatrix}, \quad [\,\gamma^{a}, \gamma^{b}\,] = -2i\epsilon_{abc}\begin{pmatrix}\sigma^{c} & 0 \\ 0 & \sigma^{c}\end{pmatrix}$$

に注意すると、U は、

$$U = 1 + \frac{1}{2}\,\epsilon_{\mu\nu}\gamma^{\mu\nu}, \quad \gamma^{\mu\nu} = \frac{1}{4}\,[\,\gamma^{\mu}, \gamma^{\nu}\,]$$

と表すことができます。よって有限変換の場合は、$\epsilon_{\mu\nu}$ を有限の変換パラメータとして、

$$\psi'(x') = e^{(1/2)\,\epsilon_{\mu\nu}\gamma^{\mu\nu}}\,\psi(x), \quad x' = e^{(1/2)\,\epsilon_{\mu\nu}M^{\mu\nu}}\,x$$

です。このようにブーストと空間回転をひとまとめにし、4次元の形式でローレンツ変換式を表した方が便利な場合があります。

リー代数 $M^{\mu\nu}$ の構造は、

$$[\,M^{\mu\nu}, M^{\rho\sigma}\,] = -g^{\mu\rho}M^{\nu\sigma} + g^{\mu\sigma}M^{\nu\rho} - g^{\nu\sigma}M^{\mu\rho} + g^{\nu\rho}M^{\mu\sigma}$$

となることが確かめられるでしょう。また、$\gamma^{\mu\nu}$ も同じ本義ローレンツ群のリー代数であるため、その構造は上と同じになるはずです：

$$[\,\gamma^{\mu\nu}, \gamma^{\rho\sigma}\,] = -g^{\mu\rho}\gamma^{\nu\sigma} + g^{\mu\sigma}\gamma^{\nu\rho} - g^{\nu\sigma}\gamma^{\mu\rho} + g^{\nu\rho}\gamma^{\mu\sigma}.$$

17.10　電磁場の量子化

次に電磁場の量子論を考えましょう。

古典論における電磁場のラグランジアン密度は、

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}, \quad F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$$

でした。$\partial\mathcal{L}/\partial\partial_\mu A_\nu = -F^{\mu\nu}$, $\partial\mathcal{L}/\partial A_\nu = 0$ なので、場の方程式は、

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} = 0, \quad \text{よって} \quad \Box A^\nu - \partial^\nu(\partial\cdot A) = 0$$

で、これは物質がない場合のマックスウェル方程式です。これを素朴に量子化しようとすると、すぐに困難にぶつかります。$\partial\mathcal{L}/\partial\partial_0 A_0 = -F^{00} = 0$ ですから、スカラーポテンシャル $A_0(x)$ に対する正準共役変数が存在しないのです。この問題は電磁場の理論がゲージ不変性を持つことに起因しています。それは 1 次元のローカル対称性ですから、要するに力学変数が 1 個余計なのです。このような系は一般に、**特異系**あるいは**拘束系**と呼ばれます。

古典論においてローレンツ対称性を壊さないゲージ固定の方法は、$\partial\cdot A = 0$ とおくことでした。これを**ローレンツゲージ**あるいは**共変ゲージ**といいます。そこで量子論においては、これをラグランジアン密度に反映させ、

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} - \frac{1}{2}(\partial\cdot A)^2$$

を出発点とします。これは時空の全微分項を除き、

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{2}\partial_\mu A_\nu \partial^\mu A^\nu$$

と等しくなります。作用汎関数においては全微分項は消えるので、理論としてこれらラグランジアン密度は等価です。簡単な後者でやっていきましょう。

$\partial\mathcal{L}/\partial\partial_\mu A_\nu = -\partial^\mu A^\nu$ に注意して、場の方程式は、

$$\Box A^\nu = 0.$$

これはちょうど共変ゲージを取ったときのマックスウェル方程式になっています。A_μ の正準共役変数は、$\partial\mathcal{L}/\partial\partial_0 A_\mu = -\dot{A}^\mu$ であり、今度は全ての場の正準共役変数がちゃんと存在します。正準交換関係は、

$$[A_\mu(x), -\dot{A}^\nu(x')]_{t=t'} = i\delta_\mu^\nu \delta^3(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}')$$

$$\therefore\ [A^\mu(x), \dot{A}^\nu(x')]_{t=t'} = -ig^{\mu\nu}\delta^3(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}')$$

で、他は同時刻可換ということになります。

場の方程式 $\Box A^\mu = 0$ の一般解は、全ての偏光モードの重ね合わせで、

$$A^\mu(x) = \int \frac{d^3\boldsymbol{k}}{(2\pi)^3 2k^0} \sum_{\lambda=0}^{3} \varepsilon_\lambda^\mu(\boldsymbol{k}) \left(a_\lambda(\boldsymbol{k}) e^{-ik\cdot x} + a_\lambda^*(\boldsymbol{k}) e^{ik\cdot x} \right), \quad k^0 = |\boldsymbol{k}|$$

と表されます。ここで、

$$\varepsilon_0^\mu(\boldsymbol{k}) = (1, \boldsymbol{0}), \quad \varepsilon_3^\mu(\boldsymbol{k}) = (0, \boldsymbol{k}/|\boldsymbol{k}|), \quad \varepsilon_{1,2}^\mu(\boldsymbol{k}) = (0, \boldsymbol{\varepsilon}_{1,2}(\boldsymbol{k})).$$

$\boldsymbol{\varepsilon}_1(\boldsymbol{k}), \boldsymbol{\varepsilon}_2(\boldsymbol{k})$ は $\boldsymbol{k}$ と直交する 2 つの基本ベクトルで、$\boldsymbol{\varepsilon}_3(\boldsymbol{k}) = \boldsymbol{k}/|\boldsymbol{k}|$ とあわせて右手系を成すものとします。すなわち $\lambda = 1, 2$ はベクトルポテンシャル $\boldsymbol{A}(x)$ に関する**横波モード**、$\lambda = 3$ は**縦波モード**を意味します。$\lambda = 0$ はスカラーポテンシャル $A^0(x)$ のみの波動で、**スカラーモード**と呼ばれます。わざわざこのようにモード分解した理由はすぐにわかります。

$\varepsilon_\lambda^\mu(\boldsymbol{k})$ は空間の回転変換に対する変換係数なので、

$$g_{\mu\nu}\varepsilon_\lambda^\mu(\boldsymbol{k})\varepsilon_{\lambda'}^\nu(\boldsymbol{k}) = g_{\lambda\lambda'}, \quad \sum_{\lambda,\lambda'} g^{\lambda\lambda'}\varepsilon_\lambda^\mu(\boldsymbol{k})\varepsilon_{\lambda'}^\nu(\boldsymbol{k}) = g^{\mu\nu}$$

という性質を満たします。一般解が正準交換関係を満たすためには、

$$[a_\lambda(\boldsymbol{k}), a_{\lambda'}^*(\boldsymbol{k}')] = -(2\pi)^3 2k^0 g_{\lambda\lambda'}\delta^3(\boldsymbol{k}-\boldsymbol{k}')$$

で、他が可換であればよいことが確かめられるでしょう。

17.11 物理的粒子空間

再び困難が生じました。スカラーモードの交換子 $[a_0(\boldsymbol{k}), a_0^*(\boldsymbol{k}')]$ の符号が通常と逆であるため、例えばスカラーモードの 1 粒子状態 $a_0^*(\boldsymbol{k})|0>$ の大きさ自乗が負になってしまいます。このため、状態空間が通常のベクトル空間 (正定値計量空間) を成しません。これでは確率解釈が使えるかどうかも怪しくなってしまうでしょう。このようなベクトル空間は**不定計量空間**と呼ばれます。

この問題は次のように回避されます。まず、状態空間 (フォック空間) において、電磁場のスカラーモードと縦波モードをまったく含まない基底だけで張られる部分空間を**物理的粒子空間**と呼び、$\mathcal{H}_{\rm phys}$ と書きます。$\mathcal{H}_{\rm phys}$ は正定値計量空間になります。$\mathcal{H}_{\rm phys}$ の元が相互作用のあるゲージ理論において時間発展すると、一般に縦波やスカラーモードを含む成分が混入し $\mathcal{H}_{\rm phys}$ に属さなくなりますが、

混入する部分は必ず零ノルムになる

のです。この証明はかなり難しいので、ここでは割愛し、ゲージ場の量子論の章で行うことにします。

いま、S を S 行列、$|\psi>\in\mathcal{H}_{\rm phys}$ としたとき、

$$S|\psi>=|\psi'>+|\chi>\,.$$

ここで $|\chi>$ はスカラーモードもしくは縦波モードを含む基底から成る部分で、$|\psi'>$ はその残り、すなわち $|\psi'>\in\mathcal{H}_{\rm phys}$ です。上の定理から $<\chi|\chi>=0$, また当然 $<\chi|\psi'>=0$ なので、S のユニタリー性を用いて、

$$<\psi|\psi>=<\psi'|\psi'>$$

を得ます。すなわち $\mathcal{H}_{\rm phys}$ への射影(あるいは $|\chi>$ を無視する同値類) においてノルムが保存し、正定値計量を持つ $\mathcal{H}_{\rm phys}$ の中で確率解釈を行うことができるわけです。

このことはすなわち、スカラーモードや縦波モードは物理的な状態には現れないと "考えてよい" ということです。計算上、スカラーモードや縦波モードへの遷移確率は、いわば正負まちまちに存在するのですが、全部足すと 0 になるので、まとめて無視してしまいましょうというわけです。

これは量子論の基礎の改変なので、よく考えて慣れるまで奇妙に感じます。縦波モードが "あの世" に道連れになったのは、ひとえに上の定理に依ります。このために一見余計と思えるモード分解を行ったのです。

17.12 光子とそのスピン

電磁場のエネルギー運動量テンソルは、

$$T^{\mu\nu}=\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\partial_\mu A^\rho}\,\partial^\nu A^\rho-g^{\mu\nu}\mathcal{L}=-\partial^\mu A_\rho\partial^\nu A^\rho+\frac{1}{2}\,g^{\mu\nu}\,\partial_\rho A_\sigma\partial^\rho A^\sigma$$

です。よってエネルギーは、

$$\begin{aligned}P^0&=\int d^3\boldsymbol{r}\;T^{00}=\int d^3\boldsymbol{r}\left(-\dot{A}_\rho\dot{A}^\rho+\frac{1}{2}\,\partial_\rho A_\sigma\partial^\rho A^\sigma\right)\\&=-\frac{1}{2}\,g_{\mu\nu}\int d^3\boldsymbol{r}\left(\dot{A}^\mu\dot{A}^\nu+\partial_i A^\mu\partial_i A^\nu\right)\end{aligned}$$

ですが、後ろの項については部分積分し、場の方程式 $\Box A^\mu=0$ を用いると、

$$P^0=-\frac{1}{2}\,g_{\mu\nu}\int d^3\boldsymbol{r}\left(\dot{A}^\mu\dot{A}^\nu-A^\mu\ddot{A}^\nu\right)$$

となります。基準モード展開の式を代入すれば、

$$\begin{aligned}P^0&=\int\frac{d^3\boldsymbol{k}}{(2\pi)^3 4}\sum_{\lambda,\lambda'}(-g^{\lambda\lambda'})\left(a_\lambda(\boldsymbol{k})a^*_{\lambda'}(\boldsymbol{k})+a^*_\lambda(\boldsymbol{k})a_{\lambda'}(\boldsymbol{k})\right)\\&=\int\frac{d^3\boldsymbol{k}}{(2\pi)^3 2}\sum_{\lambda,\lambda'}(-g^{\lambda\lambda'})\,a^*_\lambda(\boldsymbol{k})a_{\lambda'}(\boldsymbol{k})+V_0,\quad V_0=2\int\frac{d^3\boldsymbol{r}d^3\boldsymbol{k}}{(2\pi)^3}\;k^0.\end{aligned}$$

一方、運動量は、

$$P^i = \int d^3\boldsymbol{r}\ T^{0i} = \int d^3\boldsymbol{r}\left(-\dot{A}_\rho \partial^i A^\rho\right) = -g_{\mu\nu}\int d^3\boldsymbol{r}\ \dot{A}^\mu \partial^i A^\nu$$
$$= \int \frac{d^3\boldsymbol{k}}{(2\pi)^3 2k^0}\, k^i \sum_{\lambda,\lambda'} (-g^{\lambda\lambda'})\, a^*_\lambda(\boldsymbol{k}) a_{\lambda'}(\boldsymbol{k})$$

となるので、まとめると、

$$P^\mu = \int \frac{d^3\boldsymbol{k}}{(2\pi)^3 2k^0}\ k^\mu \sum_{\lambda,\lambda'} (-g^{\lambda\lambda'}) a^*_\lambda(\boldsymbol{k}) a_{\lambda'}(\boldsymbol{k}) + g^{0\mu} V_0$$

です。特に物理的粒子空間の上では $a_0(\boldsymbol{k}) = a_3(\boldsymbol{k}) = 0$ なので、

$$P^\mu = \int \frac{d^3\boldsymbol{k}}{(2\pi)^3 2k^0}\ k^\mu \sum_{\lambda=1,2} a^*_\lambda(\boldsymbol{k}) a_\lambda(\boldsymbol{k}) + g^{0\mu} V_0$$

であり、$a^*_{1,2}(\boldsymbol{k})$ で生成される粒子は 4 元運動量 k^μ を持つことがわかり、**光子**と呼ばれます。光子の内部自由度は 2 ということになります。

一方、電磁場のスピン角運動量は、

$$S^a = \int d^3\boldsymbol{r}\, \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial_0 A^\rho} (J^a)_{\rho\nu} A^\nu = \int d^3\boldsymbol{r}\, (-\dot{A}_\rho)(-\epsilon^{0a\rho\nu}) A^\nu = \int d^3\boldsymbol{r}\ \epsilon_{abc} A^b \dot{A}^c$$

となり、基準モード展開の式を代入すると、

$$S^a = -i \int \frac{d^3\boldsymbol{k}}{(2\pi)^3 2k^0} \sum_{\lambda\lambda'} \epsilon_{abc}\, \varepsilon^b_\lambda(\boldsymbol{k}) \varepsilon^c_{\lambda'}(\boldsymbol{k})\, a^*_\lambda(\boldsymbol{k}) a_{\lambda'}(\boldsymbol{k})$$

となります。いま、$\boldsymbol{k}$ を z 方向としたとき、$\varepsilon^a_\lambda(\boldsymbol{k}) = \delta^a_\lambda$ であることに注意し、

$$[S^3, a^*_\lambda(\boldsymbol{k})] = i \sum_{\lambda'} \epsilon_{3\lambda\lambda'} a^*_{\lambda'}(\boldsymbol{k})$$

を得るので、$[S^3, a^*_1(\boldsymbol{k})] = i a^*_2(\boldsymbol{k}),\ \ [S^3, a^*_2(\boldsymbol{k})] = -i a^*_1(\boldsymbol{k}).$ よって、

$$a^*_\pm(\boldsymbol{k}) = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(a^*_1(\boldsymbol{k}) \pm i a^*_2(\boldsymbol{k})\right)$$

を定義すれば、

$$[S^3, a^*_\pm(\boldsymbol{k})] = \pm a^*_\pm(\boldsymbol{k})$$

となり、$a^*_\pm(\boldsymbol{k})$ は一般に運動量方向のスピン成分、すなわちヘリシティが ± 1 の光子を生成するわけです。光子のスピンの大きさは 1 とみなされますが、ヘリシティ 0 の光子は現れないことに注意してください。

17.13 電磁相互作用とゲージパラメータ

ディラック場と電磁場の相互作用系で、ラグランジアン密度が、

$$\mathcal{L} = \bar{\psi}(i\gamma\cdot D - m)\psi - \frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}$$

で与えられる理論を**量子電磁気学** (**QED**) といいます。ここで、

$$D_\mu = \partial_\mu + iqA_\mu$$

は**共変微分**で、q はディラック粒子の電荷を意味します。電子なら $q = -e$ で、e は素電荷です。相互作用項は $\mathcal{L}_I = -q\bar{\psi}\gamma\cdot A\psi$ ということになります。

QED のラグランジアン密度は、

$$\psi'(x) = e^{-iq\chi(x)}\psi(x), \quad A'_\mu(x) = A_\mu(x) + \partial_\mu\chi(x)$$

という**ゲージ変換**に対して不変になっていることがわかるでしょう。QED は $U(1)$ の**ゲージ理論**になっています。電磁場の量子化で見たように、このゲージ自由度があると量子化ができません。そこでこのゲージ自由度を固定するわけですが、ローレンツ共変な**ゲージ固定項**として、ラグランジアン密度に、

$$\mathcal{L}_{GF} = -\frac{1}{2\alpha}(\partial\cdot A)^2$$

を加えます。α は**ゲージパラメータ**と呼ばれ、通常 $\alpha = 1$ に取ります。これを**ファインマンゲージ**といいます。ゲージパラメータは QED のくりこみを行う際に必要になるもので、ツリーグラフだけを考えるならファインマンゲージに固定して考えて構いません。$\mathcal{L} + \mathcal{L}_{GF}$ がゲージ固定された QED のラグランジアン密度になります。

ゲージ固定した後でも、

$$\psi'(x) = e^{-iq\chi}\psi(x), \quad A'_\mu(x) = A_\mu(x)$$

というグローバル対称性が残り、そのネーターカレントは、$q\bar{\psi}\gamma^\mu\psi$ なので、

$$Q = q\int d^3\boldsymbol{r}\ \psi^\dagger(x)\psi(x)$$

が保存します。これは $q\times$ 粒子数 であり、反粒子の粒子数への寄与は -1 なので、Q が総電荷であると考えると、反粒子の電荷は $-q$ ということになります。

17.14 QED のファインマン規則

自由ディラック場 $\psi(x)$ に対し、

$$\{\psi(x), b_s^*(\boldsymbol{k})\} = u_s(\boldsymbol{k})e^{-ik\cdot x}, \quad \{b_s(\boldsymbol{k}), \bar{\psi}(x)\} = \bar{u}_s(\boldsymbol{k})e^{ik\cdot x},$$
$$\{\bar{\psi}(x), d_s^*(\boldsymbol{k})\} = \bar{v}_s(\boldsymbol{k})e^{-ik\cdot x}, \quad \{d_s(\boldsymbol{k}), \psi(x)\} = v_s(\boldsymbol{k})e^{ik\cdot x}$$

がわかるので、ファインマングラフにおけるディラック粒子、および反粒子の外線は図 17.1(a) のようになります。

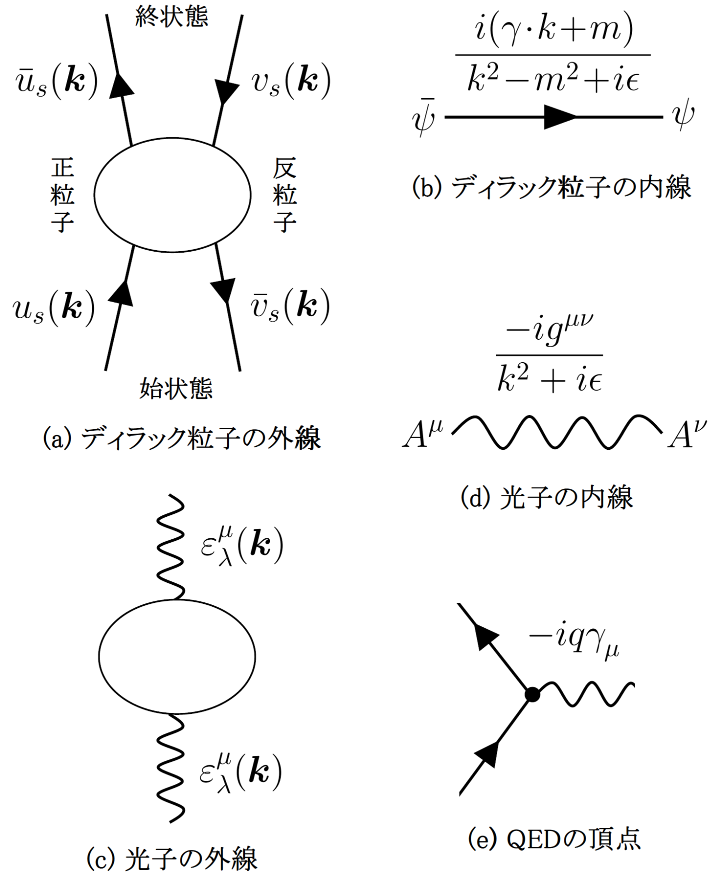

図 17.1: QED のファインマン規則

一方、ディラック場の伝播関数は、

$$
\begin{aligned}
<\psi_\alpha(x)\bar{\psi}_\beta(x')> &= <0|T\psi_\alpha(x)\bar{\psi}_\beta(x')|0> \\
&= \theta(t-t')<0|\psi_\alpha(x)\bar{\psi}_\beta(x')|0> - \theta(t'-t)<0|\bar{\psi}_\beta(x')\psi_\alpha(x)|0>\ .
\end{aligned}
$$

フェルミオンの時間順序積は場の奇置換に対しマイナス符号を出すと定義されます。$\sum_s u_s(\boldsymbol{k})\bar{u}_s(\boldsymbol{k}) = \gamma\cdot k+m,\ \sum_s v_s(\boldsymbol{k})\bar{v}_s(\boldsymbol{k}) = \gamma\cdot k-m$ に注意して 2 つの項を計算すると、それぞれ、

$$
\begin{aligned}
\theta(t-t')<0|\psi_\alpha(x)\bar{\psi}_\beta(x')|0> &= \int \frac{d\omega d^3\boldsymbol{k}}{(2\pi)^4 2k^0}\,\frac{-i(\gamma\cdot k+m)_{\alpha\beta}}{-\omega+k^0-i\epsilon}\ e^{-i\omega(t-t')+i\boldsymbol{k}\cdot(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}')}, \\
\theta(t'-t)<0|\bar{\psi}_\beta(x')\psi_\alpha(x)|0> &= \int \frac{d\omega d^3\boldsymbol{k}}{(2\pi)^4 2k^0}\,\frac{-i(\gamma^\dagger\cdot k-m)_{\alpha\beta}}{\omega+k^0-i\epsilon}\ e^{-i\omega(t-t')+i\boldsymbol{k}\cdot(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}')}
\end{aligned}
$$

となりますが、これらの式の差を作り、$(\gamma+\gamma^\dagger)\cdot k = 2\gamma_0 k^0,\ (\gamma-\gamma^\dagger)\cdot k = 2\gamma_i k^i$ に注意すれば、

$$
<\psi_\alpha(x)\bar{\psi}_\beta(x')> = \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4}\,\frac{i(\gamma\cdot k+m)_{\alpha\beta}}{k^2-m^2+i\epsilon}\ e^{-ik\cdot(x-x')}
$$

を得るでしょう。ここで $k^\mu = (\omega, \boldsymbol{k})_\mu$ は off-shell の積分変数です。よってディラック粒子の内線は図 17.1(b) のようになります。

さらに光子に関しては、

$$[A^\mu(x), a^*_\lambda(\boldsymbol{k})] = \varepsilon^\mu_\lambda(\boldsymbol{k}) e^{-ik\cdot x}, \quad [a_\lambda(\boldsymbol{k}), A^\mu(x)] = \varepsilon^\mu_\lambda(\boldsymbol{k}) e^{ik\cdot x} \quad (\lambda = 1, 2)$$

および、

$$< A^\mu(x) A^\nu(x') > = \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{-ig^{\mu\nu}}{k^2 + i\epsilon}\, e^{-ik\cdot(x-x')}$$

が確かめられるので、光子の外線と内線は図 17.1(c)(d) のようになります。また、QED の頂点は $\mathcal{L}_I = -q\bar{\psi}\gamma\cdot A\psi$ に注意して、図 17.1(e) のようになります。

(余談) ディラック粒子の内線は $\epsilon \to 0$ で $\Delta(k) = \dfrac{i(\gamma\cdot k + m)}{k^2 - m^2}$ ですが、これは、

$$\Delta(k) = \frac{i}{\gamma\cdot k - m}$$

と書くこともできます。すなわち $(\gamma\cdot k - m)$ の逆行列の i 倍ということです。$(\gamma\cdot k)^2 = \gamma_\mu\gamma_\nu k^\mu k^\nu = (1/2)\{\gamma_\mu, \gamma_\nu\} k^\mu k^\nu = g_{\mu\nu} k^\mu k^\nu = k^2$ に注意。

17.15 フェルミオンの符号因子

例えば、ディラック粒子とその反粒子の 2 体弾性散乱：$\psi\bar{\psi} \to \psi\bar{\psi}$ (**バーバー散乱**) を考えると、最低次のグラフは電荷 q の 2 次で、図 17.2 に示す 2 つです。

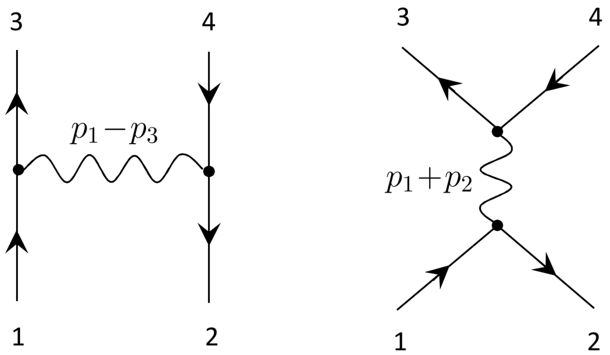

図 17.2: バーバー散乱

左のグラフは、

$$\bar{u}_{s_3}(\boldsymbol{p}_3)(-iq\gamma_\mu) u_{s_1}(\boldsymbol{p}_1)\, \bar{v}_{s_2}(\boldsymbol{p}_2)(-iq\gamma_\nu) v_{s_4}(\boldsymbol{p}_4)\, \frac{-ig^{\mu\nu}}{(p_1 - p_3)^2 + i\epsilon}$$

右のグラフは、

$$-\bar{v}_{s_2}(\boldsymbol{p}_2)(-iq\gamma_\mu) u_{s_1}(\boldsymbol{p}_1)\, \bar{u}_{s_3}(\boldsymbol{p}_3)(-iq\gamma_\nu) v_{s_4}(\boldsymbol{p}_4)\, \frac{-ig^{\mu\nu}}{(p_1 + p_2)^2 + i\epsilon}$$

ということになります。ここで現れるマイナス符号ですが、今の場合、S 行列要素として $<0|b_{s_3}(\boldsymbol{p}_3)d_{s_4}(\boldsymbol{p}_4)\,Te^{iS_I}\,b^*_{s_1}(\boldsymbol{p}_1)d^*_{s_2}(\boldsymbol{p}_2)|0>$ を考えていて、その 2 次の寄与は、ウィックの定理による処理後、

$$\frac{1}{2}\int d^4x_1 d^4x_2 \;<A^\mu(x_1)A^\nu(x_2)>$$
$$\times <0|b_{s_3}(\boldsymbol{p}_3)d_{s_4}(\boldsymbol{p}_4)\,N\bar{\psi}(x_1)(-iq\gamma_\mu)\psi(x_1)\bar{\psi}(x_2)(-iq\gamma_\nu)\psi(x_2)\,b^*_{s_1}(\boldsymbol{p}_1)d^*_{s_2}(\boldsymbol{p}_2)|0>$$

となります。さらに消滅定理 (場の量子論の章参照) によって右のグラフに相当する項を得るためには、

$$b_{s_3}(\boldsymbol{p}_3)\text{-}\bar{\psi}(x_1) \quad d_{s_4}(\boldsymbol{p}_4)\text{-}\psi(x_1) \quad \bar{\psi}(x_2)\text{-}d^*_{s_2}(\boldsymbol{p}_2) \quad \psi(x_2)\text{-}b^*_{s_1}(\boldsymbol{p}_1)$$

あるいはここにおいて x_1 と x_2 を入れ替えた組み合わせで対を取ることになるため、いずれにせよマイナス符号が付くわけです。このような理由で現れる符号因子をフェルミオンの**統計符号因子**といいます。統計符号因子はあくまで相対的なもので、例えば元の S 行列要素を $<0|d_{s_4}(\boldsymbol{p}_4)b_{s_3}(\boldsymbol{p}_3)\,Te^{iS_I}\,b^*_{s_1}(\boldsymbol{p}_1)d^*_{s_2}(\boldsymbol{p}_2)|0>$ で定義していれば、マイナス符号が付くのは図 17.2 の左のグラフということになります。

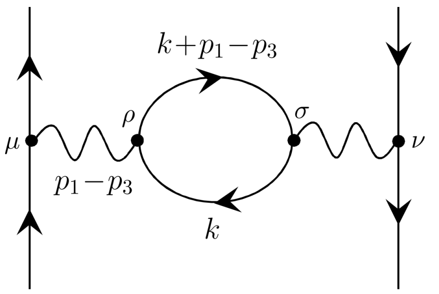

図 17.3: バーバー散乱の高次グラフ

一方、同じバーバー散乱の 4 次の寄与に図 17.3 に示すグラフがありますが、それは、

$$\bar{u}_{s_3}(\boldsymbol{p}_3)(-iq\gamma_\mu)u_{s_1}(\boldsymbol{p}_1)\;\bar{v}_{s_2}(\boldsymbol{p}_2)(-iq\gamma_\nu)v_{s_4}(\boldsymbol{p}_4)\;\frac{-ig^{\mu\rho}}{(p_1-p_3)^2+i\epsilon}\;\frac{-ig^{\nu\sigma}}{(p_1-p_3)^2+i\epsilon}$$
$$\times\int\frac{d^4k}{(2\pi)^4}\,(-1)\,\mathrm{tr}\left((-iq\gamma_\rho)\,\frac{i(\gamma\cdot k+m)}{k^2-m^2+i\epsilon}\,(-iq\gamma_\sigma)\,\frac{i(\gamma\cdot(k+p_1-p_3)+m)}{(k+p_1-p_3)^2-m^2+i\epsilon}\right)$$

となります。$(-1)\,\mathrm{tr}$ が現れるのは、時間順序積のもとで、

$$\bar{\psi}(x)(-iq\gamma_\rho)\psi(x)\bar{\psi}(y)(-iq\gamma_\sigma)\psi(y) \to -\mathrm{tr}\left((-iq\gamma_\rho)\psi(x)\bar{\psi}(y)(-iq\gamma_\sigma)\psi(y)\bar{\psi}(x)\right)$$

のように変形されるからです。このようにフェルミオンのループに起因して現れるマイナス符号を、一般にフェルミオンの**ループ符号因子**といいます。

QED における散乱断面積の具体的な計算は素粒子論の計算の章で行います。

17.16　荷電共役変換

粒子と反粒子を入れ換える変換を**荷電共役変換**といい、C と書きます。$v_s(\boldsymbol{k}) = i\gamma^2 u_s^*(\boldsymbol{k}),\ u_s(\boldsymbol{k}) = i\gamma^2 v_s^*(\boldsymbol{k})$ という性質を思い出すと、ディラック場の荷電共役変換 $\psi^C(x)$ は、

$$\psi^C(x) = i\gamma^2\psi^*(x)$$

のはずで、実際このとき、

$$\psi^C(x) = \int \frac{d^3\boldsymbol{k}}{(2\pi)^3 2k^0} \sum_s \left(d_s(\boldsymbol{k}) u_s(\boldsymbol{k}) e^{-ik\cdot x} + b_s^*(\boldsymbol{k}) v_s(\boldsymbol{k}) e^{ik\cdot x} \right)$$

のように、粒子と反粒子の生成消滅演算子が入れ代わります。固有ベクトル空間における変換演算子を C と書くと、$\psi^C(x) = C\psi(x)C^{-1}$ ですから、

$$Cb_s(\boldsymbol{k})C^{-1} = d_s(\boldsymbol{k}), \quad Cd_s(\boldsymbol{k})C^{-1} = b_s(\boldsymbol{k})$$

ということです。荷電共役変換を 2 度続けて行えば、それは恒等変換になるはずなので、$C^2 = 1 \ \therefore C^{-1} = C$ です。

ディラック共役の C 変換が、

$$\bar{\psi}^C(x) = (\psi^C(x))^\dagger\gamma^0 = (i\gamma^2\psi^*(x))^\dagger\gamma^0 = -i\psi^T(x)\gamma^0\gamma^2$$

となることに注意すると、

$$\bar{\psi}^C(x)\psi^C(x) = -\psi^T(x)\gamma^0\psi^*(x) = \psi^\dagger(x)\gamma^0\psi(x) = \bar{\psi}(x)\psi(x).$$

ディラック場の成分 $\psi_\alpha(x)$ は古典論でグラスマン数なので、交換するとマイナス符号が出ることに注意してください。同様にやって、

$$\bar{\psi}^C(x)\gamma^\mu\psi^C(x) = -\bar{\psi}(x)\gamma^\mu\psi(x)$$

を示せます。特に $\bar{\psi}(x)\gamma^\mu\psi(x)$ は荷電共役変換で符号を変えますから、QED の相互作用項に注意して、4 元ポテンシャルの荷電共役変換は、

$$A^{C\mu}(x) = -A^\mu(x)$$

と定義されます。これで QED は C 不変ということになります。「粒子反粒子を入れ換えると電荷の符号が逆になるので、4 元ポテンシャルの符号を逆にしなさい、それで QED の理論は変わりません」ということです。

QED の真空 $|0>$ が C 不変であること：

$$C|0> = |0>$$

が次のように証明されます。

[証明] QED のハミルトニアン H は C 不変なので、$CHC^{-1}=H \therefore [C,H]=0.$ 一方、真空のエネルギーを V_0 とすると、$(H-V_0)|0>=0.$ この式の両辺に C を作用させると、$[C,H]=0$ に注意して、

$$(H-V_0)C|0>=0$$

を得ますが、真空は唯一のエネルギー V_0 の状態なので、$C|0>=|0>$ もしくは $C|0>=0$ ですが、後者は $C^2=1$ と矛盾します。[証明終]

この証明から、一般に C 不変な理論の縮退のないエネルギー固有状態が全て C 不変であることがわかるでしょう。

17.17 パリティ変換

空間反転 (**パリティ変換** P) に対しては、4 元ポテンシャルは、その 4 元ベクトル性から、

$$A^{P\mu}(x^P)=A_\mu(x) \quad \therefore\ PA^\mu(x)P^{-1}=A_\mu(x^P)$$

と振舞うはずです。ここで $x^{P\mu}=x_\mu=(t,-\boldsymbol{r})$, また、$P$ は固有ベクトル空間におけるパリティの変換演算子です。基準モード展開の式を代入し、$\varepsilon_{\mu\lambda'}(\boldsymbol{k})\varepsilon^\mu_\lambda(\boldsymbol{k})=g_{\lambda'\lambda}$ に注意すれば、

$$\sum_\lambda g_{\lambda'\lambda}Pa_\lambda(\boldsymbol{k})P^{-1}=\sum_\lambda \varepsilon^\mu_{\lambda'}(\boldsymbol{k})\varepsilon^\mu_\lambda(-\boldsymbol{k})a_\lambda(-\boldsymbol{k})$$

を得ます。逆方向の偏光モードについては、$\boldsymbol{k}$ の方向を軸とする回転 $(SO(2))$ の不定性がありますが、簡単のため、

$$\boldsymbol{\varepsilon}_1(-\boldsymbol{k})=-\boldsymbol{\varepsilon}_1(\boldsymbol{k}), \quad \boldsymbol{\varepsilon}_2(-\boldsymbol{k})=\boldsymbol{\varepsilon}_2(\boldsymbol{k})$$

のように選べば、

$$Pa_\lambda(\boldsymbol{k})P^{-1}=a_\lambda(-\boldsymbol{k}) \ \ (\lambda=0,1,3), \quad Pa_2(\boldsymbol{k})P^{-1}=-a_2(-\boldsymbol{k})$$

を得るでしょう。よって、ヘリシティ対角化モード：$a_\pm(\boldsymbol{k})=\dfrac{a_1(\boldsymbol{k})\mp ia_2(\boldsymbol{k})}{\sqrt{2}}$ に対して、

$$Pa_\pm(\boldsymbol{k})P^{-1}=a_\mp(-\boldsymbol{k})$$

です。P 変換により光子の運動量とヘリシティは共に逆になるわけです。(上の不定性に関連して、この式の右辺には位相因子 $e^{\pm i\theta}$ の不定性があります。)

一方、QED が P 不変であるためには、ディラック場の P 変換に対して、

$$\bar\psi^P(x^P)\psi^P(x^P)=\bar\psi(x)\psi(x), \quad \bar\psi^P(x^P)\gamma^\mu\psi^P(x^P)=\bar\psi(x)\gamma_\mu\psi(x)$$

を満たすものがあれば良いですが、これは、

$$\psi^P(x^P) = \gamma^0\psi(x) \quad \therefore\ P\psi(x)P^{-1} = \gamma^0\psi(x^P)$$

において実現されます。ディラック場の基準モード展開の式を代入し、$\gamma^0 u_s(\boldsymbol{k}) = u_{-s}(-\boldsymbol{k}),\ \gamma^0 v_s(\boldsymbol{k}) = -v_{-s}(-\boldsymbol{k})$ に注意すれば、

$$Pb_s(\boldsymbol{k})P^{-1} = b_{-s}(-\boldsymbol{k}), \quad Pd_s(\boldsymbol{k})P^{-1} = -d_{-s}(-\boldsymbol{k})$$

を得るでしょう。ディラック場のP変換を $\psi^P(x^P) = e^{i\theta}\gamma^0\psi(x)$ (θ は実数) のように定義することもできたので、それぞれの右辺の係数に絶対的な意味はないですが、その積が必ず -1 になることは重要です。

このため、ディラック粒子とディラック反粒子の結合状態と考えられる粒子、例えばπ粒子などのメソンは必ずパリティマイナスになります。すなわち、このような粒子を生成する場は擬スカラー場に近似されると考えられるわけです。式で書くと、π 粒子の場を $\pi(x)$, π 粒子の1粒子状態を $|\pi, \boldsymbol{k}>$ として、

$$\pi^P(x^P) = -\pi(x), \quad P|\pi, \boldsymbol{k}>= -|\pi, -\boldsymbol{k}>$$

ということです。また、実擬スカラー場とディラック場に関しては、g を実の結合定数として、

$$\mathcal{L}_I(x) = ig\pi(x)\bar{\psi}(x)\gamma_5\psi(x)$$

という相互作用項を考えると、これは実で[(*)]、なおかつP不変であることがわかるでしょう：$\mathcal{L}_I^*(x) = \mathcal{L}_I(x)$, $\mathcal{L}_I^P(x^P) = \mathcal{L}_I(x)$. ここで γ_5 はカイラリティで、全てのガンマ行列と反可換でした。このような結合を**湯川型**といい、核子を結びつける力である核力の素朴なモデルになっています。

(*注) グラスマン数 a, b の積の複素共役は $(ab)^* = b^*a^*$ で定義されます。よって A を複素行列として、$(\psi^\dagger(x)A\psi(x))^* = (\psi_\alpha^*(x)A_{\alpha\beta}\psi_\beta(x))^* = \psi_\beta^*(x)A_{\alpha\beta}^*\psi_\alpha(x) = \psi^\dagger(x)A^\dagger\psi(x)$ となることに注意してください。

17.18 右手型と左手型

カイラリティ γ_5 が ± 1 となるディラック場を次のように構成できます：

$$\psi_R(x) = \frac{1+\gamma_5}{2}\psi(x) = \begin{pmatrix}\xi(x)\\ 0\end{pmatrix}, \quad \psi_L(x) = \frac{1-\gamma_5}{2}\psi(x) = \begin{pmatrix}0\\ \eta(x)\end{pmatrix}.$$

それぞれ、**右手型**、**左手型**と呼ばれますが、これはもともとの2スピノル $\xi(x)$ と 2^* スピノル $\eta(x)$ の抽出に他なりません。右と左で呼ばれるのは、それぞれの正粒子のヘリシティが、順に $+1/2$ (右巻きスピン) と $-1/2$ (左巻きスピン) に確定しているからです。ただし反粒子においてはヘリシティは逆になります[(*)]。

もともとの本義ローレンツ変換の既約表現が 2 スピノルおよび 2^* スピノルだったことを考えると、これらのスピノルが基本的な場で、ディラック場は、

$$\psi(x) = \psi_R(x) + \psi_L(x)$$

により定義されたものと考えることができます。実際、素粒子標準模型などでは右手型と左手型が基本的な場になります。しかしそうすると、C 変換や P 変換はそれぞれ $i\gamma^2$ や γ^0 を乗じることからわかるように、右手型と左手型を入れ換える変換になっているので不自然に思われます。一方、パリティ変換を行いさらに荷電共役変換を行う CP は右手型と左手型を混ぜないので、素粒子論においては CP こそが本当の意味での空間反転だと考えられます。

では自然界は CP 対称性を持っているでしょうか？ 残念ながら答えは No です。詳しくは素粒子論の章をご覧ください。このことは、自然界がローレンツ対称性を完全には持っていないということです。重力を無視した場合、自然界は本義ローレンツ変換 $SO(3,1)$ に対しては不変と考えられますが、$O(3,1)$ に対しては不変ではないわけです。これはややショッキングな事実ですが、素粒子標準模型はこのことにある程度納得のいく理由を提供してくれます (小林益川理論)。

ディラック質量項が、

$$\bar{\psi}\psi = \bar{\psi}_R\psi_L + \bar{\psi}_L\psi_R = \xi^\dagger\eta + \eta^\dagger\xi$$

により構成されるのに対し、マヨラナ質量項は、

$$\bar{\psi}^C_R\psi_R = -\xi^T\epsilon\xi, \quad \bar{\psi}^C_L\psi_L = \eta^T\epsilon\eta$$

により構成されることに注意。ここで C は荷電共役変換、$\epsilon = i\sigma^2$ は 2 次元レビ・チビタです。マヨラナ質量項には位相変換に対する不変性がないため、この質量項があると粒子数が保存しなくなります。現在、マヨラナ質量項を持つ可能性があると考えられているのはニュートリノだけです。

(*注) $\mathcal{L}_\xi = i\xi^\dagger(x)\sigma^\mu\partial_\mu\xi(x)$, $\mathcal{L}_\eta = i\eta^\dagger(x)\bar{\sigma}^\mu\partial_\mu\eta(x)$ で与えられる零質量 2 成分の場の理論を**ワイル場**の理論といいますが、これら理論によりそれぞれの正粒子のヘリシティが、順に、$+1/2, -1/2$ であること、また、反粒子が逆のヘリシティを持つことが確かめられます。あるいはディラック場の結果を利用するなら、零質量の場合、$u_s(\boldsymbol{k})$ のカイラリティが s, また、$v_s(\boldsymbol{k})$ のカイラリティが $-s$ に確定することに注意して、$\psi_R(x)$ および $\psi_L(x)$ の基準モード展開は、

$$\psi_R(x) = \int \frac{d^3\boldsymbol{k}}{(2\pi)^3 2k^0}\Big(b_+(\boldsymbol{k})u_+(\boldsymbol{k})e^{-ik\cdot x} + d^*_-(\boldsymbol{k})v_-(\boldsymbol{k})e^{ik\cdot x}\Big),$$
$$\psi_L(x) = \int \frac{d^3\boldsymbol{k}}{(2\pi)^3 2k^0}\Big(b_-(\boldsymbol{k})u_-(\boldsymbol{k})e^{-ik\cdot x} + d^*_+(\boldsymbol{k})v_+(\boldsymbol{k})e^{ik\cdot x}\Big), \quad k^0 = |\boldsymbol{k}|$$

と表されます。このことからも同じ命題がわかるでしょう。

17.19 ゲージ理論の一般論

一般に N 個の成分を持つ場 $\varphi = \varphi(x)$ に対して、

$$\varphi' = U\varphi$$

という N 次正則行列 U による変換を考えます。このような場を考えている変換群の**基本表現**あるいは**ベクトル表現**といいます。これは主に物理で用いられる用語法です。

もしこの変換がグローバルで、U が時空の座標に依存しないなら、$\partial_\mu \varphi' = U\partial_\mu \varphi$. すなわち場の座標微分 $\partial_\mu \varphi$ も φ と同じ変換規則に従い、共に基本表現とみなせます。しかし変換がローカルで、U が座標に依存する場合は、

$$\partial_\mu \varphi' = \partial_\mu (U\varphi) = U\partial_\mu \varphi + \partial_\mu U\varphi$$

のように余分な項 $\partial_\mu U\varphi$ がつきます。

そこで、N 次正方行列の**接続場** (**ゲージ場**) $\bar{A}_\mu(x)$ を用意し、

$$D_\mu \varphi = \partial_\mu \varphi + \bar{A}_\mu \varphi$$

で**共変微分**を定義します。共変微分 $D_\mu \varphi$ は変換の基本表現になることを仮定します：

$$(D_\mu \varphi)' = UD_\mu \varphi.$$

左辺は $\partial_\mu \varphi' + \bar{A}'_\mu \varphi' = U\partial_\mu \varphi + \partial_\mu U\varphi + \bar{A}'_\mu U\varphi$, 右辺は $U\partial_\mu \varphi + U\bar{A}_\mu \varphi$ となるので、これらを比較して、接続場の変換式は、

$$\bar{A}'_\mu = U\bar{A}_\mu U^{-1} - \partial_\mu U U^{-1}$$

であればよいことがわかります。

一方、場 φ の 2 階共変微分を作ると、

$$\begin{aligned} D_\mu D_\nu \varphi &= (\partial_\mu + \bar{A}_\mu)((\partial_\nu + \bar{A}_\nu)\varphi \\ &= \partial_\mu \partial_\nu \varphi + \bar{A}_\mu \partial_\nu \varphi + \bar{A}_\nu \partial_\mu \varphi + \partial_\mu \bar{A}_\nu \varphi + \bar{A}_\mu \bar{A}_\nu \varphi \end{aligned}$$

ですから、μ, ν を入れ替えた式を引いて、

$$[D_\mu, D_\nu]\,\varphi = \bar{F}_{\mu\nu}\varphi, \qquad \bar{F}_{\mu\nu} = \partial_\mu \bar{A}_\nu - \partial_\nu \bar{A}_\mu + [\bar{A}_\mu, \bar{A}_\nu]$$

を得ます。$\bar{F}_{\mu\nu}$ はやはり N 次正方行列で、**曲率**、あるいは**場の強さ**と呼ばれます。$[D_\mu, D_\nu]\,\varphi$ も φ も考えている変換の基本表現なので、$\bar{F}_{\mu\nu}$ は、

$$\bar{F}'_{\mu\nu} = U\bar{F}_{\mu\nu}U^{-1}$$

のように変換され、このように変換される場は、一般に考えている変換群の**行列表現**と呼ばれます。そうすると、例えば $\mathrm{tr}(\bar{F}_{\mu\nu}\bar{F}^{\mu\nu})$ は、考えている変換とローレンツ変換、両方の不変量になることがわかるでしょう。

このように接続構造を導入し、グローバル対称性をローカル対称性に変える処方を**ゲージ化**といい、ゲージ化して得られた理論を**ゲージ理論**といいます。

17.20 可換ゲージ理論

簡単な例として、

$$U = e^{-ig\theta} \in U(1)$$

という位相変換を考えてみましょう。g は実数の定数で、θ は一般に時空の座標に依存した変換パラメータです。このとき場と接続場の変換式は、それぞれ、

$$\varphi' = e^{-ig\theta}\varphi, \qquad \bar{A}'_\mu = \bar{A}_\mu + ig\partial_\mu\theta$$

となりますが、

$$\bar{A}_\mu = igA_\mu$$

で A_μ を定義すると、接続場の変換式は、

$$A'_\mu = A_\mu + \partial_\mu\theta$$

となり、A_μ は実数に留まると考えられます。一方、場の強さは、今の場合 $N=1$ なので、$\bar{F}_{\mu\nu} = \partial_\mu\bar{A}_\nu - \partial_\nu\bar{A}_\mu$ ですが、

$$\bar{F}_{\mu\nu} = igF_{\mu\nu}$$

で $F_{\mu\nu}$ を定義すると、

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$$

となります。

そうすると、もしラグランジアン密度 $\mathcal{L}(\varphi, \partial\varphi)$ がグローバル $U(1)$ 変換に対して不変なら、

$$\mathcal{L}_g = \mathcal{L}(\varphi, D\varphi) + \frac{1}{4g^2}\,\bar{F}_{\mu\nu}\bar{F}^{\mu\nu}, \qquad D_\mu\varphi = (\partial_\mu + \bar{A}_\mu)\,\varphi$$

あるいは、

$$\mathcal{L}_g = \mathcal{L}(\varphi, D\varphi) - \frac{1}{4}\,F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}, \qquad D_\mu\varphi = (\partial_\mu + igA_\mu)\,\varphi$$

は、ローカル $U(1)$ 変換に対して不変な理論となり、$U(1)$ のゲージ理論になります。$U(1)$ は可換群なので、このような理論は特に**可換ゲージ理論**と呼ばれます。

QED はこうして得られる可換ゲージ理論の一種と考えられます。このとき g は場 φ の電荷を意味します。

17.21　非可換ゲージ理論

次に、$N \geq 2$ の場合の例として、

$U = e^{-ig\theta^a T^a} \in SU(N)$
($a = 1, \cdots, N^2 - 1.$ T^a はトレース 0 の N 次エルミート行列)

の場合を考えると (連続群論入門参照)、場の無限小変換式は、

$$\delta\varphi = \varphi' - \varphi = -ig\theta^a T^a \varphi$$

となり、接続場の無限小変換式は、

$$\delta\bar{A}_\mu = -ig\theta^a [T^a, \bar{A}_\mu] + ig\partial_\mu \theta^a T^a$$

となるでしょう。接続場を、

$$\bar{A}_\mu = igT^a A^a_\mu$$

と展開すると、成分 A^a_μ の無限小変換は、$[T^a, T^b] = if_{abc}T^c$ (f_{abc} は $SU(N)$ の構造定数で完全反対称) に注意して、

$$\delta A^a_\mu = \partial_\mu \theta^a + gf_{abc}\theta^b A^c_\mu$$

で与えられることが確かめられます。このとき A^a_μ は実数に留まると考えられます。また、場の強さは、$\bar{F}_{\mu\nu} = \partial_\mu \bar{A}_\nu - \partial_\nu \bar{A}_\mu + [\bar{A}_\mu, \bar{A}_\nu]$ でしたが、

$$\bar{F}_{\mu\nu} = igT^a F^a_{\mu\nu}$$

と展開すると、成分 $F^a_{\mu\nu}$ は、

$$F^a_{\mu\nu} = \partial_\mu A^a_\nu - \partial_\nu A^a_\mu - gf_{abc}A^b_\mu A^c_\nu$$

で与えられることがわかります。

そうすると、もし $\mathcal{L}(\varphi, \partial\varphi)$ がグローバル $SU(N)$ 変換 : $\varphi'(x) = e^{-ig\theta^a T^a}\varphi(x)$ に対して不変なら、

$$\mathcal{L}_g = \mathcal{L}(\varphi, D\varphi) + \frac{1}{2g^2}\,\mathrm{tr}(\bar{F}_{\mu\nu}\bar{F}^{\mu\nu}), \quad D_\mu\varphi = (\partial_\mu + \bar{A}_\mu)\,\varphi$$

あるいは、

$$\mathcal{L}_g = \mathcal{L}(\varphi, D\varphi) - \frac{1}{4}\,F^a_{\mu\nu}F^{a\mu\nu}, \quad D_\mu\varphi = (\partial_\mu + igT^a A^a_\mu)\,\varphi$$

は $SU(N)$ のゲージ理論になり、ローカル $SU(N)$ 対称性を持ちます。ここで $SU(N)$ においてはその生成子を $\mathrm{tr}(T^a T^b) = (1/2)\delta^a_b$ と規格直交化するのが慣習であるこ

とを用いました。$SU(N)$ は非可換リー群であるため、このような理論は、**非可換ゲージ理論**、あるいは提唱者の名前から**ヤン・ミルズ理論**と呼ばれます。

非可換ゲージ理論においては、$F^a_{\mu\nu}$ がその表式の中に結合定数 g を含むことに注意。このため g は $SU(N)$ ゲージ対称性に共通な (普遍的な) 定数で、QED の電荷のように、物質それぞれによって異なるなどとは仮定できません。

また、QED ではゲージ場のグローバル $U(1)$ 無限小変換式は $\delta A_\mu = 0$ となるため、ネーターの定理からゲージ場自身は電荷を持ちません。一方、非可換ゲージ理論においては $\delta A^a_\mu = g f_{abc} \theta^b A^c_\mu$ であるため (*)、ゲージ場自身が $SU(N)$ に付随した "電荷" を有し、ゲージ相互作用をすることになります。実際、ラグランジアン密度 $-(1/4)F^a_{\mu\nu}F^{a\mu\nu}$ には A^a_μ の 3 次と 4 次の項が含まれています。

非可換ゲージ理論は素粒子論において重要になってきます。

(*注) よってグローバル変換の場合、ゲージ場の成分のゲージ変換は $A'^a_\mu = \exp(g\theta^b S^b)_{ac} A^c_\mu$. ここで $(S^b)_{ac} = f_{abc}$. すなわちゲージ場の成分 A^a_μ は $SU(N)$ の随伴表現により変換されることがわかります。

索引