あもんノート

ユークリッド幾何学、ニュートン力学から、相対論、量子論、素粒子論、宇宙論、そして超ひも理論まで、理論物理学を簡潔にかつ幅広く網羅したノートです。TOP へは下の URL をクリックして行けます。専用の画像掲示板で、ご意見、ご質問等も受け付けております。

http://amonphys.web.fc2.com/

目 次

第27章　経路積分

相互作用のある場の量子論を考える場合、特に散乱問題については、相互作用表示を用いて摂動論を行うのが簡単で便利なのですが、一般的な問題ではハイゼンベルグ表示にとどまる必要性が出てきます。それは抽象的で少し難解なのですが、表示を変更しないためエレガントであるとも考えられます。この場合、経路積分と呼ばれる手法が計算の要になります。ここでは経路積分による場の量子論を基本的な範囲に限って紹介します。後半ではグラスマン数の数理を紹介し、ディラック場を含む理論の経路積分を考えます。

27.1　自由度1の量子力学

まず簡単なモデルとして自由度1の力学系を復習しましょう。実数の力学変数を $q = q(t)$ とし、作用汎関数を、

$$S[q] = \int dt\, L(q, \dot{q}), \qquad L(q, \dot{q}) = \frac{m}{2}\,\dot{q}^2 - V(q)$$

とします。ドットは時間 t による微分、m は粒子の質量、$V(q)$ は外部ポテンシャルを意味します。正準共役変数とハミルトニアンは、

$$p = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} = m\dot{q}, \qquad H(q,p) = p\dot{q} - L(q,\dot{q}) = \frac{1}{2m}\,p^2 + V(q)$$

となります (解析力学の章参照)。

量子論を得るには、正準変数 $q(t), p(t)$ をエルミート代数とし、正準交換関係 :

$$[\,q(t), p(t)\,] = i, \quad [\,q(t), q(t)\,] = [\,p(t), p(t)\,] = 0 \quad (\forall t)$$

を課します。$q(t)$ の固有値 x の固有ベクトルを $|x,t>$ とすると、

$$q(t)|x,t> = x|x,t>, \quad <x,t|x',t> = \delta(x-x').$$

同様に $p(t)$ の固有値 k の固有ベクトルを $|k,t>$ とすると、

$$p(t)|k,t> = k|k,t>, \quad <k,t|k',t> = \delta(k-k')$$

です。これらは完全系を成します :

$$\int dx\,|x,t><x,t| = 1, \quad \int dk\,|k,t><k,t| = 1.$$

ここで 1 は恒等演算子を意味します。また、

$$<x,t|k,t>=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\,e^{ikx}$$

を示すことができます (量子論の基礎の章参照)。

27.2 経路積分

さて、異なる時刻 t_F, t_I における力学変数の固有ベクトルの内積 :

$$<x_F,t_F|x_I,t_I> \qquad (t_F>t_I)$$

がどのように書けるか考えてみましょう。2 つの時刻の間を、

$$t_F=t_N>t_{N-1}>\cdots>t_1>t_0=t_I, \quad t_{i+1}-t_i=\Delta t=\frac{t_F-t_I}{N}$$

のように Δt 間隔で N 等分すれば、各時刻における完全系の式を挿入し、

$$\begin{aligned}
&<x_F,t_F|x_I,t_I> \\
&\quad=\int dx_{N-1}\cdots\int dx_1 <x_F,t_F|x_{N-1},t_{N-1}><x_{N-1},t_{N-1}|\cdots \\
&\qquad\qquad\qquad\cdots|x_2,t_2><x_2,t_2|x_1,t_1><x_1,t_1|x_I,t_I> \\
&\quad=\int dx_1\cdots\int dx_{N-1}\prod_{i=0}^{N-1}<x_{i+1},t_{i+1}|x_i,t_i>\Big|_{\substack{x_N=x_F\\ x_0=x_I}}
\end{aligned}$$

のように展開されますが、分割数 N が十分大きく、Δt が十分小さいとすると、

$$\begin{aligned}
<x_{i+1},t_{i+1}|x_i,t_i>&=<x_{i+1},t_i|\,e^{-i\Delta tH(q,p)}\,|x_i,t_i> \\
&=\int dk <x_{i+1},t_i|\,e^{-i\Delta t(p^2/2m)}\,|k,t_i><k,t_i|\,e^{-i\Delta tV(q)}\,|x_i,t_i> \\
&=\int dk\; e^{-i\Delta t(k^2/2m)}\,\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\,e^{ikx_{i+1}}\,e^{-i\Delta tV(x_i)}\,\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\,e^{-ikx_i} \\
&=e^{-i\Delta tV(x_i)}\int\frac{dk}{2\pi}\;e^{-i\Delta t(k^2/2m)+ik(x_{i+1}-x_i)}.
\end{aligned}$$

ここで $x_{i+1}-x_i=\dot{x}_i\Delta t$ とおくと、$\dot{x}_i$ は速度変数とみなせます。上式の指数部を k について平方完成し、ガウス積分を実行すれば、

$$<x_{i+1},t_{i+1}|x_i,t_i>\propto e^{-i\Delta tV(x_i)}\,e^{i\Delta t(m/2)\dot{x}_i^2}=e^{i\Delta tL(x_i,\dot{x}_i)}$$

となるので、結果、

$$<x_F,t_F|x_I,t_I>\propto\int dx_1\cdots\int dx_{N-1}\;\exp\left(i\Delta t\sum_{i=0}^{N-1}L(x_i,\dot{x}_i)\right)\Big|_{\substack{x_N=x_F\\ x_0=x_I}}$$

という離散近似式を得ます。$N \to \infty$ の極限をとれば、

$$<x_F, t_F | x_I, t_I> \propto \int_{\substack{x(t_F)=x_F \\ x(t_I)=x_I}} \mathcal{D}x \ \exp\left(i \int_{t_I}^{t_F} dt\, L(x, \dot{x}) \right)$$

となります。ここで $\mathcal{D}x$ は $\prod_t dx(t)$ の意味で、この連続無限重の積分は、境界条件 $x(t_F) = x_F$, $x(t_I) = x_I$ を満たす時空上の全ての経路に関する連続的な総和を意味し、**経路積分**と呼ばれます (図 27.1)。

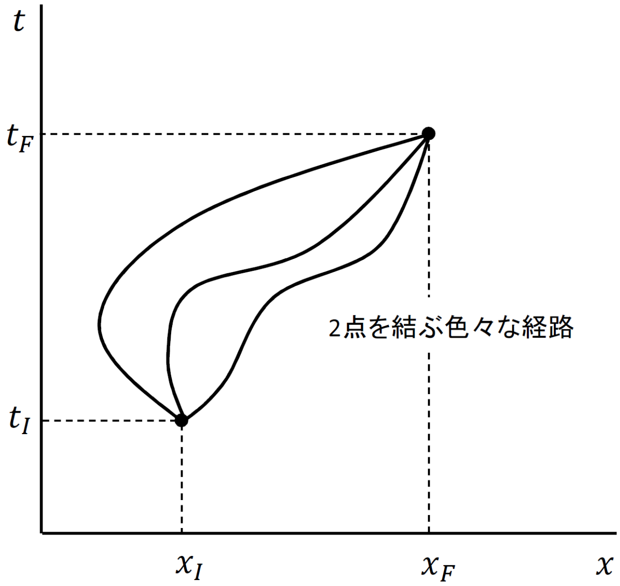

図 27.1: 経路積分

27.3 グリーン関数

系の基底状態を $|0>$ と書きます。作用汎関数に定数を加える自由度を利用して、基底状態のエネルギーが 0 になるようにします：$H|0>= 0$. このとき $|0>$ は時間に依存しません。

$t_1 > t_2$ のとき、

$$\begin{aligned}<0|\, q(t_1) q(t_2) \,|0> = \int dx_+ \int dx_1 \int dx_2 \int dx_- <0|x_+, +\infty> \\ \times <x_+, +\infty|\, q(t_1) \,|x_1, t_1><x_1, t_1|\, q(t_2) \,|x_2, t_2> \\ \times <x_2, t_2|x_-, -\infty><x_-, -\infty|0>\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\propto \int dx_+ \int dx_- \ \phi_0^*(x_+) \phi_0(x_-) \\ \times \int dx_1 \int dx_2 \ x_1 x_2 \int_{\substack{x(+\infty)=x_+,\ x(t_1)=x_1 \\ x(t_2)=x_2,\ x(-\infty)=x_-}} \mathcal{D}x \ e^{iS[x]}.\end{aligned}$$

ここで $\phi_0(x) = <x,t|0>$ は基底状態の固有関数です。因子 $x_1 x_2$ を経路積分の中に入れれば $x(t_1)x(t_2)$ と書けますが、そうして x_1, x_2 積分を実行すれば、

$$<0|\,q(t_1)q(t_2)\,|0> \propto \int dx_+ \int dx_-\, \phi_0^*(x_+)\phi_0(x_-) \int_{\substack{x(+\infty)\,=\,x_+ \\ x(-\infty)\,=\,x_-}} \mathcal{D}x\ x(t_1)x(t_2)\, e^{iS[x]}$$

を得ます。このように時間遠方で基底状態の固有関数の重みを与え和をとる経路積分を、境界条件なしに単に $\int \mathcal{D}x$ と書くことにすれば、

$$<0|\,q(t_1)q(t_2)\,|0> \propto \int \mathcal{D}x\ x(t_1)x(t_2)\, e^{iS[x]}$$

です (*)。$t_2 > t_1$ のときは、$<0|\,q(t_2)q(t_1)\,|0>$ が同じ結果を与えるので、時間順序積を $T\cdots$ として、

$$<0|\,Tq(t_1)q(t_2)\,|0> = N_0 \int \mathcal{D}x\ x(t_1)x(t_2)\, e^{iS[x]}.$$

ここで N_0 は比例定数ですが、$1 = <0|0> = N_0 \int \mathcal{D}x\, e^{iS[x]}$ に注意すると定まって、

$$<0|\,Tq(t_1)q(t_2)\,|0> = \int \mathcal{D}x\ x(t_1)x(t_2)\, e^{iS[x]} \Big/ \int \mathcal{D}x\ e^{iS[x]}$$

となります。

一般化すると、$<0|\,Tq(t_1)\cdots q(t_n)\,|0>$ で定義される n 点**グリーン関数**に対し、その経路積分表式が、

$$<0|\,Tq(t_1)\cdots q(t_n)\,|0> = \int \mathcal{D}x\ x(t_1)\cdots x(t_n)\, e^{iS[x]} / \int \mathcal{D}x\ e^{iS[x]}$$

となるはずです。また、力学変数が複数あり、$q_i(t)$ $(i = 1, 2, \cdots)$ と書かれる場合、n 点グリーン関数は、

$$<0|\,Tq_{i_1}(t_1)\cdots q_{i_n}(t_n)\,|0> = \int \mathcal{D}x\ x_{i_1}(t_1)\cdots x_{i_n}(t_n)\, e^{iS[x]} / \int \mathcal{D}x\ e^{iS[x]}$$

のように書かれることになります。ここで $\mathcal{D}x$ は $\prod_{i,t} dx_i(t)$ の意味です。

量子系における全ての観測量はこれら n 点グリーン関数から得られるため、n 点グリーン関数を計算し知ることは量子系を解くことに相当します。n 点グリーン関数の全てを解析的かつ厳密に計算できる量子系を**可解系**といいます。

(*注) 実は経路積分に何らかの正則化を施し well-defined とした場合、境界条件のない経路積分は自ずと境界に基底状態の固有関数を重みとして与えたそれに一致することが知られています。

27.4　場の量子論への拡張と生成汎関数

次に、4 次元時空 $x^\mu = (t, \boldsymbol{r})_\mu$ 上に一般に複数の実場 $\varphi_i(x)$ $(i = 1, 2, \cdots)$ があるとき、その量子論を考えましょう。このとき n 点グリーン関数は、

$$<0|\,T\varphi_{i_1}(x_1)\cdots\varphi_{i_n}(x_n)\,|0>$$

で与えられます。$|0>$ は場の量子系の基底状態で、**真空**を意味します (*)。また、ここでの $\varphi_i(x)$ は正準量子化されたエルミート代数の場です。

経路積分表式は、作用汎関数を $S[\varphi]$ として、

$$<0|\,T\varphi_{i_1}(x_1)\cdots\varphi_{i_n}(x_n)\,|0> = \int \mathcal{D}\varphi\ \varphi_{i_1}(x_1)\cdots\varphi_{i_n}(x_n)\,e^{iS[\varphi]} \Big/ \int \mathcal{D}\varphi\ e^{iS[\varphi]}$$

となるでしょう。$\mathcal{D}\varphi$ は $\prod_{i,x} d\varphi_i(x)$ の意味です。経路積分表式における $\varphi_i(x)$ はもはや代数ではなく、実数であることに注意してください。

グリーン関数の**生成汎関数** (母関数) $Z[J]$ を、

$$Z[J] = <0|\,Te^{J\cdot\varphi}\,|0>, \quad J\cdot\varphi = \sum_i \int d^4x\, J_i(x)\varphi_i(x)$$

で定義しましょう。仮にこれが求まれば、n 点グリーン関数は、

$$<0|\,T\varphi_{i_1}(x_1)\cdots\varphi_{i_n}(x_n)\,|0> = \frac{\delta}{\delta J_{i_1}(x_1)}\cdots\frac{\delta}{\delta J_{i_n}(x_n)}\,Z[J]\,\Big|_{J=0}$$

といった汎関数微分により簡単に生成されることに注意してください。$J_i(x)$ は場 $\varphi_i(x)$ の**ソース**と呼ばれます。生成汎関数の経路積分表式は、

$$Z[J] = \int \mathcal{D}\varphi\ e^{iS[\varphi]+J\cdot\varphi} \Big/ \int \mathcal{D}\varphi\ e^{iS[\varphi]}$$

となるでしょう。一般に場の量子論の問題は、与えられた作用汎関数 $S[\varphi]$ に対して、このような経路積分をいかに計算するかという問題に焼直されたわけです。離散化してコンピューターで数値計算するのも 1 つの方法ですが、ここでは解析的に何がいえるかを考えていきます。

(*注)　自由場の量子論や相互作用表示における場の量子論では、真空は全ての消滅演算子に対して消える状態として簡単に定義できますが、ハイゼンベルグ表示においては一般に生成消滅演算子など存在しないので、このような定義はもちろんできません。この場合、真空は系の基底状態として定義されます。特に真空のエネルギーが 0 になるように調整し、$H|0>= 0$ とします。相互作用表示の真空とハイゼンベルグ表示の真空は一般に別物です。相互作用表示では、ハミルトニアンの自由部分を H_0 として、$(H_0 - V_0)|0>= 0.$ ここで V_0 は真空のエネルギーです。純粋なハイゼンベルグ表示と簡便な相互作用表示をごっちゃにしないよう注意してください。

27.5　自由項演算子と伝播関数

作用汎関数を、

$$S[\varphi]=\frac{i}{2}\,\varphi{\cdot}K{\cdot}\varphi+S_I[\varphi]$$

と表します。ここで $S_I[\varphi]$ は場の 3 次以上から成る相互作用部分で、また、

$$\varphi{\cdot}K{\cdot}\varphi=\sum_{ij}\int d^4xd^4y\ \varphi_i(x)K_{ij}(x,y)\varphi_j(y)$$

です。この略記のこころは明らかでしょう。$K_{ij}(x,y)$ をここでは**自由項演算子**と呼ぶことにします。自由項演算子の逆、すなわち、

$$\sum_j\int d^4y\ K_{ij}(x,y)\Delta_{jk}(y,z)=\delta_i^k\delta^4(x-z)$$

を満たす $\Delta_{jk}(y,z)$ を、一般に**伝播関数**といいます。

例えば複数の実スカラー場がある理論の場合、作用汎関数は、

$$\begin{aligned}S[\varphi]&=\frac{1}{2}\sum_i\int d^4x\left(\partial_\mu\varphi_i(x)\partial^\mu\varphi_i(x)-m_i^2\varphi_i(x)^2\right)+S_I[\varphi]\\&=-\frac{1}{2}\sum_i\int d^4x\ \varphi_i(x)\left(\Box_x+m_i^2\right)\varphi_i(x)+S_I[\varphi]\\&=\frac{i}{2}\sum_{ij}\int d^4xd^4y\ \varphi_i(x)\,i(\Box_x+m_i^2)\delta_i^j\delta^4(x-y)\,\varphi_j(y)+S_I[\varphi]\end{aligned}$$

です。よって自由項演算子は、

$$K_{ij}(x,y)=i(\Box_x+m_i^2)\delta_i^j\delta^4(x-y)$$

ということになります。そうすると伝播関数に関する方程式は、

$$i(\Box_x+m_i^2)\Delta_{ij}(x,y)=\delta_i^j\delta^4(x-y)$$

となり、解は、

$$\Delta_{ij}(x,y)=\int\frac{d^4k}{(2\pi)^4}\,\frac{i\delta_i^j}{k^2-m_i^2}\,e^{-ik\cdot(x-y)}$$

と形式的に書くことができます。ここで $k^2=k{\cdot}k$. この積分は $k^2=m_i^2$ のところに特異性を持ちます。

しかしよく考えてみると、作用汎関数は実数ですから、$e^{iS[\varphi]}$ の経路積分自体が形式的なもので、収束しません。収束性を良くするためには、$e^{-\epsilon\varphi\cdot\varphi}$ $(\epsilon\to+0)$ のような正則化因子が必要です。これは各スカラー場 $\varphi_i(x)$ の質量 m_i について、

$m_i^2 \to m_i^2 - i\epsilon$ と変更することと等価です。経路積分に関するこの正則化の処方を **-i ε 処方**といいます。$-i\epsilon$ 処方により、伝播関数は、

$$\Delta_{ij}(x,y) = \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{i\delta_i^j}{k^2 - m_i^2 + i\epsilon} e^{-ik\cdot(x-y)} \quad (\epsilon \to +0)$$

となり、特異性が回避されるわけです。

27.6　伝播関数展開表式

生成汎関数 $Z[J]$ の経路積分表式を変形し、解析的に計算可能な形にしましょう。

$$\begin{aligned} Z[J] &\propto \int \mathcal{D}\varphi \; e^{-(1/2)\varphi\cdot K\cdot\varphi + iS_I[\varphi] + J\cdot\varphi} \\ &= \exp\left(iS_I\left[\frac{\delta}{\delta J}\right]\right) \int \mathcal{D}\varphi \; e^{-(1/2)\varphi\cdot K\cdot\varphi + J\cdot\varphi} \\ &= \exp\left(iS_I\left[\frac{\delta}{\delta J}\right]\right) \int \mathcal{D}\varphi \; e^{-(1/2)(\varphi-\Delta\cdot J)\cdot K\cdot(\varphi-\Delta\cdot J)+(1/2)J\cdot\Delta\cdot J} \\ &\propto \exp\left(iS_I\left[\frac{\delta}{\delta J}\right]\right) e^{(1/2)J\cdot\Delta\cdot J}. \end{aligned}$$

経路積分はガウス積分として実行しました。さらに次のように変形します。

$$\begin{aligned} Z[J] &\propto \exp\left(iS_I\left[\frac{\delta}{\delta J}\right]\right) \exp\left(\frac{1}{2}\frac{\delta}{\delta\varphi}\cdot\Delta\cdot\frac{\delta}{\delta\varphi}\right) e^{J\cdot\varphi}\Big|_{\varphi=0} \\ &= \exp\left(\frac{1}{2}\frac{\delta}{\delta\varphi}\cdot\Delta\cdot\frac{\delta}{\delta\varphi}\right) \exp\left(iS_I\left[\frac{\delta}{\delta J}\right]\right) e^{J\cdot\varphi}\Big|_{\varphi=0} \\ &= \exp\left(\frac{1}{2}\frac{\delta}{\delta\varphi}\cdot\Delta\cdot\frac{\delta}{\delta\varphi}\right) e^{iS_I[\varphi]+J\cdot\varphi}\Big|_{\varphi=0.} \end{aligned}$$

ここで、

$$\langle \cdots \rangle_0 = \exp\left(\frac{1}{2}\frac{\delta}{\delta\varphi}\cdot\Delta\cdot\frac{\delta}{\delta\varphi}\right) \cdots \Big|_{\varphi=0}$$

という記号を導入すれば、

$$Z[J] \propto \left\langle e^{iS_I[\varphi]+J\cdot\varphi} \right\rangle_0$$

となります。生成汎関数の定義から $Z[0]=1$ なので、これにより比例定数が定まり、結果、

$$Z[J] = \left\langle e^{iS_I[\varphi]+J\cdot\varphi} \right\rangle_0 \Big/ \left\langle e^{iS_I[\varphi]} \right\rangle_0$$

を得ます。これをここでは生成汎関数の**伝播関数展開表式**と呼ぶことにします。

記号、

$$\Big\langle \cdots \Big\rangle_0 = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \left(\frac{1}{2} \frac{\delta}{\delta\varphi} \cdot \Delta \cdot \frac{\delta}{\delta\varphi} \right)^n \cdots \Big|_{\varphi=0}$$

の働きを調べておきましょう。$\Delta_{ij}(x,y) = \Delta_{ji}(y,x)$ に注意して、

$$\begin{aligned}
&\Big\langle 1 \Big\rangle_0 = 1, \quad \Big\langle \varphi_i(x) \Big\rangle_0 = 0, \quad \Big\langle \varphi_i(x)\varphi_j(y) \Big\rangle_0 = \Delta_{ij}(x,y), \\
&\Big\langle \varphi_i(x)\varphi_j(y)\varphi_k(z) \Big\rangle_0 = 0, \\
&\Big\langle \varphi_i(x)\varphi_j(y)\varphi_k(z)\varphi_l(w) \Big\rangle_0 \\
&\ = \Delta_{ij}(x,y)\Delta_{kl}(z,w) + \Delta_{ik}(x,z)\Delta_{jl}(y,w) + \Delta_{il}(x,w)\Delta_{jk}(y,z)
\end{aligned}$$

といった具合になるでしょう。すなわち $< \cdots >_0$ は、$\cdots$ に含まれる場の個数が奇数のときは 0 で、偶数のときは、場の対がそれぞれ対応した伝播関数に置き換わり、対の選び方に関する総和になるわけです。各項の係数が上手い具合に必ず 1 になることを確認してください。

27.7 グリーン関数の摂動展開

伝播関数展開表式を用いると、n 点グリーン関数は、

$$\begin{aligned}
<0|\, T\varphi_{i_1}(x_1)\cdots\varphi_{i_n}(x_n)\,|0> &= \frac{\delta}{\delta J_{i_1}(x_1)} \cdots \frac{\delta}{\delta J_{i_n}(x_n)}\, Z[J]\,\Big|_{J=0} \\
&= \frac{\delta}{\delta J_{i_1}(x_1)} \cdots \frac{\delta}{\delta J_{i_n}(x_n)} \Big\langle e^{iS_I[\varphi]+J\cdot\varphi} \Big\rangle_0 \Big|_{J=0} \Big/ \Big\langle e^{iS_I[\varphi]} \Big\rangle_0 \\
&= \Big\langle \varphi_{i_1}(x_1)\cdots\varphi_{i_n}(x_n)\, e^{iS_I[\varphi]} \Big\rangle_0 \Big/ \Big\langle e^{iS_I[\varphi]} \Big\rangle_0 .
\end{aligned}$$

分子の指数部を展開して、

$$<0|\, T\varphi_{i_1}(x_1)\cdots\varphi_{i_n}(x_n)\,|0> = \sum_{k=0}^{\infty} G^{(k)}_{i_1\cdots i_n}(x_1,\cdots,x_n) \Big/ \Big\langle e^{iS_I[\varphi]} \Big\rangle_0$$

$$\text{ここで}\quad G^{(k)}_{i_1\cdots i_n}(x_1,\cdots,x_n) = \frac{1}{k!} \Big\langle \varphi_{i_1}(x_1)\cdots\varphi_{i_n}(x_n)\,(iS_I[\varphi])^k \Big\rangle_0$$

となります。これはグリーン関数の摂動展開を意味しています。

簡単なスカラー 4 乗模型：

$$S[\phi] = \frac{1}{2}\int d^4x \big(\partial_\mu\phi(x)\partial^\mu\phi(x) - m^2\phi(x)^2 \big) - \frac{\lambda}{4!}\int d^4x\, \phi(x)^4$$

で具体的に見てみましょう (相対論的場の量子論の章参照)。このとき伝播関数は、

$$\Delta(x,y) = \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{i}{k^2 - m^2 + i\epsilon} e^{-ik\cdot(x-y)}$$

であり、また、

$$S_I[\phi] = \frac{-\lambda}{4!} \int d^4x\, \phi(x)^4.$$

そうすると、例えば 2 点グリーン関数は、

$$<0|\, T\phi(x_1)\phi(x_2)\, |0> = \sum_{k=0}^{\infty} G^{(k)}(x_1,x_2) \Big/ \left\langle e^{iS_I[\phi]} \right\rangle_0$$

$$\text{ここで}\quad G^{(k)}(x_1,x_2) = \frac{1}{k!} \left\langle \phi(x_1)\phi(x_2)\, (iS_I[\phi])^k \right\rangle_0$$

であり、摂動の 0 次は、

$$G^{(0)}(x_1,x_2) = \left\langle \phi(x_1)\phi(x_2) \right\rangle_0 = \Delta(x_1,x_2).$$

摂動の 1 次は、

$$\begin{aligned} G^{(1)}(x_1,x_2) &= \frac{-i\lambda}{4!} \int d^4y \left\langle \phi(x_1)\phi(x_2)\phi(y)^4 \right\rangle_0 \\ &= 12 \times \frac{-i\lambda}{4!} \int d^4y\, \Delta(x_1,y)\Delta(x_2,y)\Delta(y,y) \\ &\quad + 3 \times \frac{-i\lambda}{4!} \int d^4y\, \Delta(x_1,x_2)\Delta(y,y)^2 \end{aligned}$$

と計算されるでしょう。これら 2 項は図 27.2 (a), (b) のファインマングラフにそれぞれ相当しています。係数 12 および 3 は統計因子です。摂動の 2 次：

$$G^{(2)}(x_1,x_2) = \left(\frac{-i\lambda}{4!}\right)^2 \frac{1}{2!} \int d^4y_1 d^4y_2 \left\langle \phi(x_1)\phi(x_2)\phi(y_1)^4\phi(y_2)^4 \right\rangle_0$$

を展開するのは大変ですが、図 27.2 (c)〜(i) のグラフに相当する項を生じるはずで、例えば (c) は、統計因子が $4^2 \times 3! = 96$ となることに注意して、

$$96 \times \left(\frac{-i\lambda}{4!}\right)^2 \int d^4y_1 d^4y_2\, \Delta(x_1,y_1)\Delta(x_2,y_2)\Delta(y_1,y_2)^3$$

となります。

2 点グリーン関数はこうして得られる無限個のグラフの総和 / $\left\langle e^{iS_I[\phi]} \right\rangle_0$ ですが、$\left\langle e^{iS_I[\phi]} \right\rangle_0$ を展開すれば真空泡グラフの総和になるので、この割り算は真空泡を含

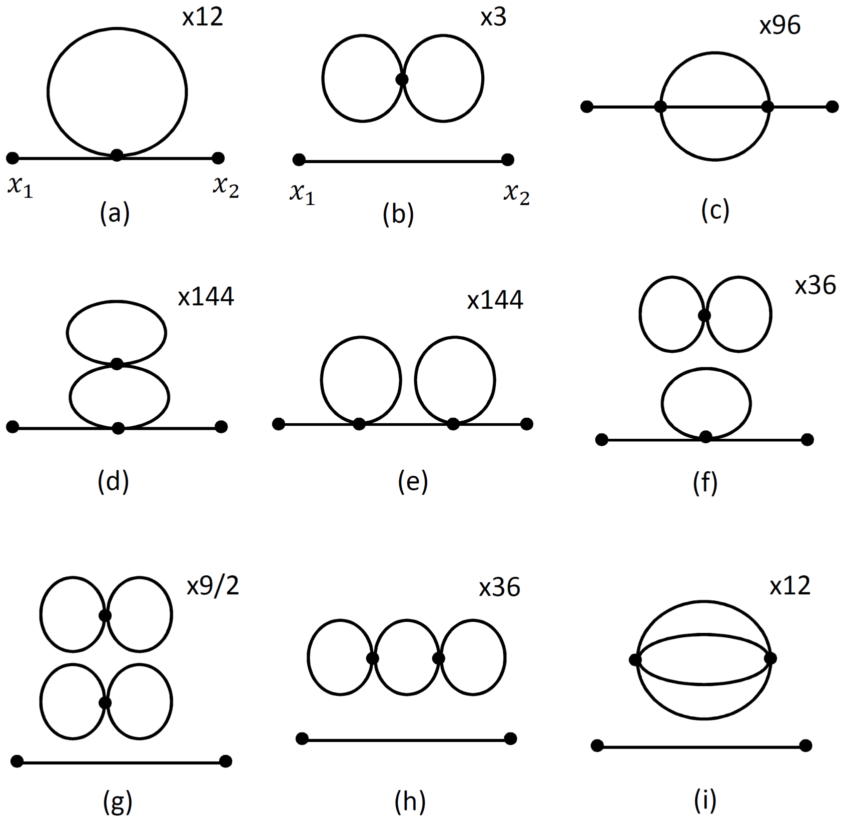

図 27.2: 摂動論

むグラフを取り除く効果を生みます。すなわちスカラー 4 乗模型における 2 点グリーン関数は、摂動の 2 次までの補正で、

$$<0|\, T\phi(x_1)\phi(x_2)\,|0> \sim \Delta(x_1, x_2) + (\mathrm{a}) + (\mathrm{c}) + (\mathrm{d}) + (\mathrm{e})$$

となるわけです。結合定数 λ が十分小さい場合、くりこみ処方を経て、これは良い近似とみなせることになります。

27.8 漸近場と LSZ 簡約公式

次に散乱問題を考えてみましょう。記号の簡単化のため 1 つの実スカラー場についてのみ考えます。

粒子の散乱が起こるような特定の系では、無限過去と無限未来に系が何らかの自由場の理論に漸近すると考えられます。すなわちハイゼンベルグ表示におけるくりこまれたスカラー場 $\phi(x)$ に対して、形式的に、

$$\phi(x) \to \begin{cases} \phi_{\mathrm{out}}(x) & (x^0 \to +\infty) \\ \phi_{\mathrm{in}}(x) & (x^0 \to -\infty) \end{cases}$$

です。out と in をまとめて as と書くことにしましょう (asymptotic の略) 。つまり as = out, in です。$\phi_{\rm as}(x)$ は**漸近場**と呼ばれ、これは自由場であると考えます :

$$\phi_{\rm as}(x)=\int\frac{d^3\boldsymbol{k}}{(2\pi)^3 2k^0}\left(a_{\rm as}(\boldsymbol{k})\,e^{-ik\cdot x}+a^*_{\rm as}(\boldsymbol{k})\,e^{ik\cdot x}\right),\quad k^0=\sqrt{|\boldsymbol{k}|^2+m^2}.$$

m は漸近的に現れる粒子のくりこまれた質量を意味することになります。この式を逆フーリエ変換し、消滅演算子 $a_{\rm as}(\boldsymbol{k})$ について解けば、

$$a_{\rm as}(\boldsymbol{k})=i\int d^3\boldsymbol{r}\,e^{ik\cdot x}\overleftrightarrow{\partial_0}\phi_{\rm as}(x)$$

となり、ここで、

$$f(x)\overleftrightarrow{\partial_0}g(x)=f(x)\partial_0 g(x)-\partial_0 f(x)\cdot g(x)$$

です。∂_0 はもちろん時間微分。

そうすると、$T(x_1\cdots x_n)=T\phi(x_1)\cdots\phi(x_n)$ という略記を用いて、

$$\begin{aligned}
&a_{\rm out}(\boldsymbol{k})T(x_1\cdots x_n)-T(x_1\cdots x_n)a_{\rm in}(\boldsymbol{k})\\
&\quad=i\int d^3\boldsymbol{r}\,e^{ik\cdot x}\overleftrightarrow{\partial_0}\phi_{\rm out}(x)\,T(x_1\cdots x_n)\\
&\qquad\qquad-T(x_1\cdots x_n)\,i\int d^3\boldsymbol{r}\,e^{ik\cdot x}\overleftrightarrow{\partial_0}\phi_{\rm in}(x)\\
&\quad=\left[i\int d^3\boldsymbol{r}\,e^{ik\cdot x}\overleftrightarrow{\partial_0}T(xx_1\cdots x_n)\right]_{x^0=-\infty}^{x^0=+\infty}\\
&\quad=i\int d^4x\,\partial_0\left(e^{ik\cdot x}\overleftrightarrow{\partial_0}T(xx_1\cdots x_n)\right)\\
&\quad=i\int d^4x\Big(e^{ik\cdot x}\,\partial_0^2\,T(xx_1\cdots x_n)-\partial_0^2\,e^{ik\cdot x}\cdot T(xx_1\cdots x_n)\Big)
\end{aligned}$$

ですが、

$$\partial_0^2\,e^{ik\cdot x}=-(k^0)^2e^{ik\cdot x}=-(|\boldsymbol{k}|^2+m^2)e^{ik\cdot x}=-(-\triangle+m^2)e^{ik\cdot x}$$

なのでこれを代入し、ラプラシアン $\triangle$ について部分積分を行うと、

$$\begin{aligned}
&a_{\rm out}(\boldsymbol{k})T(x_1\cdots x_n)-T(x_1\cdots x_n)a_{\rm in}(\boldsymbol{k})\\
&\quad=i\int d^4x\,e^{ik\cdot x}(\Box+m^2)\,T(xx_1\cdots x_n)
\end{aligned}$$

という公式を得ます。同様にして、

$$\begin{aligned}
&T(x_1\cdots x_n)a^*_{\rm in}(\boldsymbol{k})-a^*_{\rm out}(\boldsymbol{k})\,T(x_1\cdots x_n)\\
&\quad=i\int d^4x\,e^{-ik\cdot x}(\Box+m^2)\,T(xx_1\cdots x_n)
\end{aligned}$$

が得られるでしょう。

漸近場における n 粒子状態を、

$$|\boldsymbol{k}_1,\cdots,\boldsymbol{k}_n;\mathrm{as}\!>\,=a^*_{\mathrm{as}}(\boldsymbol{k}_1)\cdots a^*_{\mathrm{as}}(\boldsymbol{k}_n)|0\!>$$

のように表すと、一般的な散乱のS行列要素は、上の公式を複数回用いて、

$$\begin{aligned}
&<\!\boldsymbol{k}_1,\cdots,\boldsymbol{k}_n;\mathrm{out}|\boldsymbol{p}_1,\cdots,\boldsymbol{p}_m;\mathrm{in}\!> \\
&=\,<\!\boldsymbol{k}_2,\cdots,\boldsymbol{k}_n;\mathrm{out}|\,a_{\mathrm{out}}(\boldsymbol{k}_1)\,|\boldsymbol{p}_1,\cdots,\boldsymbol{p}_m;\mathrm{in}\!> \\
&=\int d^4x_1\,e^{ik_1\cdot x_1}\,i(\Box_{x_1}+m^2)<\!\boldsymbol{k}_2,\cdots,\boldsymbol{k}_n;\mathrm{out}|\,\phi(x_1)\,|\boldsymbol{p}_1,\cdots,\boldsymbol{p}_m;\mathrm{in}\!> \\
&=\int d^4x_1\,e^{ik_1\cdot x_1}\,i(\Box_{x_1}+m^2)<\!\boldsymbol{k}_3,\cdots,\boldsymbol{k}_n;\mathrm{out}|\,a_{\mathrm{out}}(\boldsymbol{k}_2)\phi(x_1)\,|\boldsymbol{p}_1,\cdots,\boldsymbol{p}_m;\mathrm{in}\!> \\
&=\int d^4x_1\,e^{ik_1\cdot x_1}\,i(\Box_{x_1}+m^2)\int d^4x_2\,e^{ik_2\cdot x_2}\,i(\Box_{x_2}+m^2) \\
&\qquad\qquad\qquad<\!\boldsymbol{k}_3,\cdots,\boldsymbol{k}_n;\mathrm{out}|\,T\phi(x_1)\phi(x_2)\,|\boldsymbol{p}_1,\cdots,\boldsymbol{p}_m;\mathrm{in}\!> \\
&=\;\cdots\cdots \\
&=\prod_{i=1}^{n}\int d^4x_i\,e^{ik_i\cdot x_i}\,i(\Box_{x_i}+m^2)<\!0|\,T\phi(x_1)\cdots\phi(x_n)\,|\boldsymbol{p}_1,\cdots,\boldsymbol{p}_m;\mathrm{in}\!>
\end{aligned}$$

と変形されるでしょう。散乱を考えているので、out 側の運動量 $\boldsymbol{k}_1,\cdots,\boldsymbol{k}_n$ はいずれも in 側の運動量 $\boldsymbol{p}_1,\cdots,\boldsymbol{p}_m$ のどれとも等しくないことを仮定しています。さらに in 側についても同様の変形を行えば、

$$\begin{aligned}
&<\!\boldsymbol{k}_1,\cdots,\boldsymbol{k}_n;\mathrm{out}|\boldsymbol{p}_1,\cdots,\boldsymbol{p}_m;\mathrm{in}\!> \\
&=\prod_{i=1}^{n}\int d^4x_i\,e^{ik_i\cdot x_i}\,i(\Box_{x_i}+m^2)\prod_{j=1}^{m}\int d^4y_j\,e^{-ip_j\cdot y_j}\,i(\Box_{y_j}+m^2) \\
&\qquad\qquad\qquad<\!0|\,T\phi(x_1)\cdots\phi(x_n)\phi(y_1)\cdots\phi(y_m)|0\!>
\end{aligned}$$

という公式を得ます。これを **LSZ 簡約公式** (レーマン・シマンツィック・ツィンマーマンの簡約公式、LSZ reduction formula) といいます。

LSZ 簡約公式により、散乱問題に関するS行列要素がグリーン関数から導かれることがわかります。すでに述べたグリーン関数の摂動展開をここに適用すると、相対論的場の量子論の章で紹介したファインマン規則と同じ規則が得られることが確かめられるでしょう。このとき $\int d^4x\,e^{-ik\cdot x}\,i(\Box+m^2)$ という演算子は、グリーン関数の端の内線 (伝播関数) を外線 (波動関数) に置き換える役割を果たします。

相互作用表示に比べてかなり導出が煩わしいですが、ハイゼンベルグ表示のままでも散乱問題を扱えることがわかったわけです。

27.9　グラスマン数

反可換な数 (代数) を一般に**グラスマン数**といいます。すなわち ξ, η をグラスマン数とすると、

$$\xi\eta = -\eta\xi, \quad \xi^2 = 0, \quad \eta^2 = 0$$

です。グラスマン数偶数個の積でできた数を**グラスマン偶**、奇数個の積でできた数を**グラスマン奇**といいます。実数や複素数はグラスマン偶、グラスマン数自体はグラスマン奇です。また、グラスマン奇とグラスマン奇は反可換、グラスマン偶とグラスマン奇は可換、グラスマン偶とグラスマン偶も可換になることがわかるでしょう。

グラスマン数 ξ の関数 $f(\xi)$ をマクローリン展開すると、$\xi^2 = 0$ に注意して、

$$f(\xi) = f_0 + f_1\xi$$

です。すなわちグラスマン数の関数は高々1次関数です。よって一般に、

$$\frac{\partial^2}{\partial\xi^2} f(\xi) = 0$$

がいえます。これはグラスマン数による微分演算子 $\partial/\partial\xi$ がグラスマン奇であるからとして理解することもできます。

グラスマン数の微分演算子は次のライプニッツ則を持つものとします :

$$\frac{\partial}{\partial\xi}(AB) = \frac{\partial A}{\partial\xi} B + \|A\| A \frac{\partial B}{\partial\xi.}$$

ここで $\|A\|$ は、A がグラスマン偶のとき $+1$, グラスマン奇のとき -1 を与える符号因子です。この微分を特に**左微分**といいます。一方、

$$\frac{\bar\partial}{\partial\xi} AB = A \frac{\bar\partial B}{\partial\xi} + \|B\| \frac{\bar\partial A}{\partial\xi} B$$

でライプニッツ則を定義することもでき、この場合の微分を**右微分**といいます。グラスマン数による微分はこのように2通り存在するわけです。

27.10　グラスマン数による積分

グラスマン数による積分は、部分積分可能性 :

$$\int d\xi \frac{\partial}{\partial\xi} f(\xi) = 0$$

が成り立つように、<u>左微分と同義である</u>とします :

$$\int d\xi = \frac{\partial}{\partial\xi.}$$

そうすると、N 個のグラスマン数 $\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_N$ による重積分は、

$$\int d^N\xi = \int d\xi_1 \cdots \int d\xi_N = \frac{\partial}{\partial\xi_1} \cdots \frac{\partial}{\partial\xi_N}$$

ですが、線形変換: $\xi_i \to \xi'_i$ を考えると、$\partial/\partial\xi_i$ が互いに反可換であることに注意して、

$$\begin{aligned}\int d^N\xi &= \frac{\partial}{\partial\xi_1} \cdots \frac{\partial}{\partial\xi_N} = \frac{\partial\xi'_{i_1}}{\partial\xi_1} \cdots \frac{\partial\xi'_{i_N}}{\partial\xi_N}\, \frac{\partial}{\partial\xi'_{i_1}} \cdots \frac{\partial}{\partial\xi'_{i_N}} \\ &= \frac{\partial\xi'_{i_1}}{\partial\xi_1} \cdots \frac{\partial\xi'_{i_N}}{\partial\xi_N}\, \epsilon_{i_1\cdots i_N}\, \frac{\partial}{\partial\xi'_1} \cdots \frac{\partial}{\partial\xi'_N} \\ &= \det\frac{\partial\xi'}{\partial\xi} \int d^N\xi'.\end{aligned}$$

ヤコビアン $\det(\partial\xi'/\partial\xi)$ の出方が実数の場合と逆であることに注意してください。

グラスマン数のデルタ関数は、極めて単純に、

$$\delta(\xi) = \xi$$

で定義されます。実際このとき、グラスマン数 ξ, η, グラスマン偶に値をとる関数 $f(\xi)$ に対して、

$$\begin{aligned}\int d\xi\, f(\xi)\delta(\xi-\eta) &= \frac{\partial}{\partial\xi}\,(f_0 + f_1\xi)(\xi-\eta) = \frac{\partial}{\partial\xi}\,(f_0\xi - f_0\eta - f_1\xi\eta) \\ &= f_0 + f_1\eta = f(\eta).\end{aligned}$$

$f(\xi)$ がグラスマン偶であることから、f_0 はグラスマン偶、f_1 はグラスマン奇であることに注意してください。次の積分表示があります :

$$\delta(\xi) = \int d\eta\; e^{\eta\xi}.$$

これは $e^{\eta\xi} = 1 + \eta\xi$ に注意すれば簡単に確かめられるでしょう。

次の公式は特に特異系の量子論において重要になります :

$$\int d^N\xi\, d^N\eta\; e^{\eta_i A_{ij}\xi_j} = \det A.$$

ただし A_{ij} はグラスマン偶で、$d^N\xi\, d^N\eta = d\xi_1 d\eta_1 \cdots d\xi_N d\eta_N$ です。

[証明] $\xi'_i = A_{ij}\xi_j$ で変数変換すると、左辺 $= \det(\partial\xi'/\partial\xi) \int d^N\xi'\, d^N\eta\; e^{\eta_i\xi'_i}$ ですが、$\det(\partial\xi'/\partial\xi) = \det A$. また、続く積分部が、

$$\begin{aligned}\int d\xi'_1 d\eta_1 \cdots d\xi'_N d\eta_N\, e^{\eta_1\xi'_1} \cdots e^{\eta_N\xi'_N} &= \int d\xi'_1 d\eta_1\, e^{\eta_1\xi'_1} \cdots \int d\xi'_N d\eta_N\, e^{\eta_N\xi'_N} \\ &= \int d\xi'_1\, \delta(\xi'_1) \cdots \int d\xi'_N\, \delta(\xi'_N) = 1\end{aligned}$$

となるので与題が得られます。[証明終]

27.11 フェルミオンの量子力学

ただ1つの複素グラスマン数 $\Psi = \Psi(t)$ を力学変数とする簡単な力学系、

$$S[\Psi, \Psi^*] = \int dt\, L, \quad L = i\Psi^*\dot{\Psi} - V\Psi^*\Psi$$

を考えてみましょう。ここで V は実数で、$V > 0$ を仮定します。グラスマン数の積の複素共役が、

$$(\xi\eta)^* = \eta^*\xi^*$$

で定義されることに注意すると、$\Psi^*\Psi$ は実の (複素共役不変な) グラスマン偶と考えられますが、$i\Psi^*\dot{\Psi}$ は実ではありません。しかしその時間積分は、

$$\left(\int dt\, i\Psi^*\dot{\Psi}\right)^* = \int dt\, (-i)\dot{\Psi}^*\Psi = \int dt\, i\Psi^*\dot{\Psi}$$

なので実です。よって作用汎関数は実のグラスマン偶と考えられます。

正準共役変数は右微分により定義され、$(\bar{\partial}/\partial\dot{\Psi})\, L = i\Psi^*$ となることに注意すると、正準反交換関係は、

$$\{\Psi(t), \Psi^*(t)\} = 1, \quad \{\Psi(t), \Psi(t)\} = 0 \quad (\forall t)$$

で与えられます。ここで $\{A, B\} = AB + BA$ は反交換子です。Ψ の正準共役として Ψ^* が現れたので、Ψ^* の正準共役についてはもはや問わないことにします。このような量子化は**簡便量子化**と呼ばれます。

ハミルトニアンは、

$$H = i\Psi^*\dot{\Psi} - L = V\Psi^*\Psi$$

となるので、基底状態 $|0>$ を、

$$\Psi(t)|0> = 0, \quad <0|0> = 1$$

で定義すると、$H|0> = 0$ ですから、$|0>$ は時間に依存しません。一方、

$$|1> = \Psi^*(t)|0>$$

で励起状態を定義すると、そのエネルギー固有値は V になります。エネルギーの固有ベクトルはこれだけで、よってこの量子力学系の状態空間は2次元ということになります。状態空間が有限次元になるのはこのようなフェルミオンの系に限られます。

27.12 フェルミオンの経路積分

力学変数 $\Psi(t)$ の複素グラスマン固有値 ψ の固有ベクトルを $|\psi, t>$ とすると、

$$\Psi(t)|\psi, t> = \psi|\psi, t>$$

ですが、その解は、

$$|\psi, t> = (1 - \psi\Psi^*(t))\,|0>$$

と書けます。実際、このベクトルに $\Psi(t)$ を乗じても ψ を乗じても、どちらも $\psi|0>$ となることがわかるでしょう。固有ベクトル $|\psi, t>$ は、文献によってはフェルミオンの**コヒーレント状態**などと呼ばれます。

固有ベクトルの内積は、

$$\begin{aligned}<\psi, t|\psi', t> &= <0|(1 - \Psi(t)\psi^*)(1 - \psi'\Psi^*(t))|0> \\ &= <0|0> + \psi^*\psi' <0|\Psi(t)\Psi^*(t)|0> \\ &= 1 + \psi^*\psi' = e^{\psi^*\psi'}\end{aligned}$$

となるので、これに対応して、完全性の式は、

$$\int d\psi^* d\psi \; |\psi, t> e^{\psi\psi^*} <\psi, t| = 1$$

となります。実際このとき、

$$\begin{aligned}\text{左辺} \times |\psi', t> &= \int d\psi^* d\psi \; |\psi, t> e^{\psi\psi^*} e^{\psi^*\psi'} = -\int d\psi d\psi^* \,|\psi, t> \; e^{\psi^*(\psi'-\psi)} \\ &= -\int d\psi \,|\psi, t> \delta(\psi' - \psi) = \int d\psi \,|\psi, t> \delta(\psi - \psi') = |\psi', t> .\end{aligned}$$

そうすると、異なる時刻 t_F, t_I における力学変数の固有ベクトルの内積は、2つの時刻の間を、

$$t_F = t_N > t_{N-1} > \cdots > t_1 > t_0 = t_I, \quad t_{i+1} - t_i = \Delta t = \frac{t_F - t_I}{N}$$

のように Δt 間隔で N 等分し、各時刻における完全系の式を挟んで、

$$\begin{aligned}<\psi_F, t_F|\psi_I, t_I> = \int d\psi_1^* d\psi_1 \cdots d\psi_{N-1}^* d\psi_{N-1} \\ e^{-\psi_F\psi_F^*} \prod_{i=0}^{N-1} e^{\psi_{i+1}\psi_{i+1}^*} <\psi_{i+1}, t_{i+1}|\psi_i, t_i>\end{aligned}$$

と書けるでしょう。分割数 N が大きく、Δt が十分小さいとすると、

$$
\begin{aligned}
e^{\psi_{i+1}\psi^*_{i+1}} <\psi_{i+1}, t_{i+1}|\psi_i, t_i> &= e^{\psi_{i+1}\psi^*_{i+1}} <\psi_{i+1}, t_i|\, e^{-i\Delta t H}|\psi_i, t_i> \\
&= e^{\psi_{i+1}\psi^*_{i+1}} <\psi_{i+1}, t_i|\, e^{-i\Delta t V \Psi^*(t)\Psi(t)}|\psi_i, t_i> \\
&= e^{-\psi^*_{i+1}\psi_{i+1}}\, e^{-i\Delta t V \psi^*_{i+1}\psi_i}\, e^{\psi^*_{i+1}\psi_i} = e^{-\psi^*_{i+1}(\psi_{i+1}-\psi_i) - i\Delta t V \psi^*_{i+1}\psi_i} \\
&= e^{i\Delta t(\, i\psi^*_{i+1}\dot\psi_i - V\psi^*_{i+1}\psi_i\,)}, \quad \dot\psi_i = \frac{\psi_{i+1}-\psi_i}{\Delta t}
\end{aligned}
$$

であり、$N \to \infty$ の連続極限を取ることで、

$$
<\psi_F, t_F|\psi_I, t_I> = e^{-\psi_F\psi^*_F} \int_{\substack{\psi(t_F) = \psi_F \\ \psi(t_I) = \psi_I}} \mathcal{D}\psi^*\mathcal{D}\psi \;\; \exp\left(i\int_{t_I}^{t_F} dt\, L \right)
$$

を得ます。

上式を用いると、$t_1 > t_2$ のとき、

$$
<0|\,\Psi(t_1)\Psi(t_2)|0> = \int d\psi^*_- d\psi_-\, e^{\psi_-\psi^*_-} \int_{\psi(-\infty)=\psi_-} \mathcal{D}\psi^*\mathcal{D}\psi\, \psi(t_1)\psi(t_2)\, e^{iS[\psi,\psi^*]}
$$

を示すことができます。$<0|\psi, t> = 1$ に注意。よって一般に、フェルミオンの系のグリーン関数の経路積分表式は、

$$
\begin{aligned}
&<0|\, T\Psi^{(*)}(t_1)\cdots\Psi^{(*)}(t_n)|0> \\
&\qquad = \int d\psi^*_- d\psi_-\, e^{\psi_-\psi^*_-} \int_{\psi(-\infty)=\psi_-} \mathcal{D}\psi^*\mathcal{D}\psi\, \psi^{(*)}(t_1)\cdots\psi^{(*)}(t_n)\, e^{iS[\psi,\psi^*]}
\end{aligned}
$$

と書けることがわかります。無限過去において $e^{\psi\psi^*}$ の重みを付けて積分する経路積分を単に $\int \mathcal{D}\psi^*\mathcal{D}\psi$ と書けば、

$$
<0|\, T\Psi^{(*)}(t_1)\cdots\Psi^{(*)}(t_n)|0> = \int \mathcal{D}\psi^*\mathcal{D}\psi\, \psi^{(*)}(t_1)\cdots\psi^{(*)}(t_n)\, e^{iS[\psi,\psi^*]}
$$

です。

27.13 ディラック場の経路積分

一般に複数の実場 $\varphi_i(x)$ と複数のディラック場 $\psi_i(x)$ を含む相対論的場の理論を考え、作用汎関数を、

$$
S[\,\varphi, \psi, \bar\psi\,] = \frac{i}{2}\,\varphi\cdot K\cdot\varphi + i\bar\psi\cdot K_D\cdot\psi + S_I[\,\varphi, \psi, \bar\psi\,]
$$

としましょう。K は実場の自由項演算子、K_D はディラック場の自由項演算子で、

$$
K_D^{ij}(x, y) = -i(i\partial\!\!\!/_x - m_i)\delta^i_j\delta^4(x-y)
$$

です。$\not\partial=\gamma^\mu\partial_\mu$ という略記を用いています。その逆である伝播関数は、

$$\Delta_D^{ij}(x,y)=\int\frac{d^4k}{(2\pi)^4}\,\frac{i\delta^i_j}{\not k-m_i}\,e^{-ik\cdot(x-y)}=\int\frac{d^4k}{(2\pi)^4}\,\frac{i\delta^i_j(\not k+m_i)}{k^2-m_i^2}\,e^{-ik\cdot(x-y)}$$

となるでしょう。ここで作用汎関数に正則化のための項 : $i\epsilon\bar\psi\cdot\psi$ $(\epsilon\to+0)$ があると考えれば、それは $m_i\to m_i-i\epsilon\ \therefore m_i^2\to m_i^2-i\epsilon'$ $(\epsilon'=2m_i\epsilon\to+0)$ という修正を生み、伝播関数の特異性が消えるのは実場 (ボゾン) の場合と同様です。すなわち、

$$\Delta_D^{ij}(x,y)=\int\frac{d^4k}{(2\pi)^4}\,\frac{i\delta^i_j(\not k+m_i)}{k^2-m_i^2+i\epsilon}\,e^{-ik\cdot(x-y)}.$$

この場の理論を量子化し、グリーン関数の生成汎関数を、

$$Z[J,\bar\eta,\eta]=<0|\,Te^{J\cdot\varphi+\bar\eta\cdot\psi+\bar\psi\cdot\eta}|0>$$

で定義します。$\psi_i(x)$ のソースを $\bar\eta_i(x)$, $\bar\psi_i(x)$ のソースを $\eta_i(x)$ としました。これらソースもグラスマン数であると考えます。生成汎関数の経路積分表式が、

$$Z[J,\bar\eta,\eta]=\int\mathcal{D}\varphi\mathcal{D}\psi^*\mathcal{D}\psi\,e^{iS[\varphi,\psi,\bar\psi]+J\cdot\varphi+\bar\eta\cdot\psi+\bar\psi\cdot\eta}\Big/\int\mathcal{D}\varphi\mathcal{D}\psi^*\mathcal{D}\psi\,e^{iS[\varphi,\psi,\bar\psi]}$$

となることはフェルミオンの量子力学における経路積分表式から類推できるかと思います。

上式に作用汎関数の式を代入し、相互作用部分を汎関数微分演算子として前に出せば、

$$Z[J,\bar\eta,\eta]\propto\exp\left(iS_I\left[\frac{\delta}{\delta J,}\,\frac{\delta}{\delta\bar\eta,}\,\frac{-\delta}{\delta\eta}\right]\right)$$
$$\int\mathcal{D}\varphi\,e^{-(1/2)\varphi\cdot K\cdot\varphi+J\cdot\varphi}\int\mathcal{D}\psi^*\mathcal{D}\psi\,e^{-\bar\psi\cdot K_D\cdot\psi+\bar\eta\cdot\psi+\bar\psi\cdot\eta}$$

となりますが、実場による経路積分が $\propto e^{(1/2)J\cdot\Delta\cdot J}$ となるのはすでに見ています。一方、ディラック場による経路積分は、

$$-\bar\psi\cdot K_D\cdot\psi+\bar\eta\cdot\psi+\bar\psi\cdot\eta=-(\bar\psi-\bar\eta\Delta_D)\cdot K_D\cdot(\psi-\Delta_D\eta)+\bar\eta\cdot\Delta_D\cdot\eta$$

に注意して $\propto e^{\bar\eta\cdot\Delta_D\cdot\eta}$ となることがわかります。よって、

$$Z[J,\bar\eta,\eta]\propto\exp\left(iS_I\left[\frac{\delta}{\delta J,}\,\frac{\delta}{\delta\bar\eta,}\,\frac{-\delta}{\delta\eta}\right]\right)e^{(1/2)J\cdot\Delta\cdot J+\bar\eta\cdot\Delta_D\cdot\eta}$$

を得ますが、この式の右辺は、

$$\exp\left(iS_I\left[\frac{\delta}{\delta J,}\,\frac{\delta}{\delta\bar\eta,}\,\frac{-\delta}{\delta\eta}\right]\right)\exp\left(\frac{1}{2}\,\frac{\delta}{\delta\varphi}\cdot\Delta\cdot\frac{\delta}{\delta\varphi}-\frac{\delta}{\delta\psi}\cdot\Delta_D\cdot\frac{\delta}{\delta\bar\psi}\right)e^{J\cdot\varphi+\bar\eta\cdot\psi+\bar\psi\cdot\eta}\Big|_{\varphi=\psi=\bar\psi=0}$$
$$=\exp\left(\frac{1}{2}\,\frac{\delta}{\delta\varphi}\cdot\Delta\cdot\frac{\delta}{\delta\varphi}-\frac{\delta}{\delta\psi}\cdot\Delta_D\cdot\frac{\delta}{\delta\bar\psi}\right)e^{iS_I[\varphi,\psi,\bar\psi]+J\cdot\varphi+\bar\eta\cdot\psi+\bar\psi\cdot\eta}\Big|_{\varphi=\psi=\bar\psi=0}$$

と変形されるので、$Z[0,0,0]=1$ に注意して、結局、

$$Z[J,\bar{\eta},\eta]=\left\langle e^{iS_I[\varphi,\psi,\bar{\psi}]+J\cdot\varphi+\bar{\eta}\cdot\psi+\bar{\psi}\cdot\eta}\right\rangle_0 \Big/ \left\langle e^{iS_I[\varphi,\psi,\bar{\psi}]}\right\rangle_0$$

という伝播関数展開表式を得ます。ここで、

$$\left\langle\cdots\right\rangle_0=\exp\left(\frac{1}{2}\frac{\delta}{\delta\varphi}\cdot\Delta\cdot\frac{\delta}{\delta\varphi}-\frac{\delta}{\delta\psi}\cdot\Delta_D\cdot\frac{\delta}{\delta\bar{\psi}}\right)\cdots\Big|_{\varphi=\psi=\bar{\psi}=0}$$

です。

この伝播関数展開表式により、ディラック場が含まれている理論においても、グリーン関数の摂動論を行うことができます。また、かなり面倒なことになりますが、LSZ 簡約公式もディラック場が含まれている場合に拡張することができ、散乱問題を相互作用表示に頼らずともハイゼンベルグ表示のまま摂動計算できることになるわけです。

索 引

あ

か

さ

た

は

ま