あもんノート

ユークリッド幾何学、ニュートン力学から、相対論、宇宙論、量子論、場の量子論、素粒子論、そして超ひも理論まで、理論物理学を簡潔にかつ幅広く網羅したノートです。TOP へは下の URL をクリックして行けます。専用の画像掲示板で、ご意見、ご質問等も受け付けております。

http://amonphys.web.fc2.com/

目 次

第3章　ニュートン力学

ニュートン力学のまとめです。ユークリッド幾何学および応用数学を既知とします。運動の法則を出発点とし、そこから順に実用的な定理を導いていきます。例題として、落下運動、ロケットの推進、回転ごま、単振り子、惑星の運動などを取り上げます。

3.1　運動の法則

質量を持つ点を**質点**といい、これが多数あるものとし、物質の構成要素と考えます。質点 a の質量を m_a, 位置ベクトルを $\boldsymbol{r}_a$, 質点 a が質点 b から受ける**力**を $\boldsymbol{F}_{ab}$ と書きます。質点 a が受ける力 $\boldsymbol{F}_a$ は、全ての質点から受ける力の総和になります：

$$\boldsymbol{F}_a = \sum_b \boldsymbol{F}_{ab}.$$

これを**合力の法則**といいます。

また、**時間** t による微分をドットで表すことにします。質点 a の位置ベクトルの時間微分 $\dot{\boldsymbol{r}}_a = d\boldsymbol{r}_a/dt$ をこの質点の**速度**、時間 2 階微分 $\ddot{\boldsymbol{r}}_a = d^2\boldsymbol{r}_a/dt^2$ を**加速度**といいます。速度の大きさ $|\dot{\boldsymbol{r}}_a|$ を**速さ**といいます。

(1) 力の働かない全ての質点の速度が一定となる基準系が存在します。この系を**慣性系**といい、この要請を**慣性の法則**といいます。

(2) 慣性系においては、各々の質点が受ける力はその質点の質量と加速度の積に等しくなります。これを**運動方程式**といいます：

$$\boldsymbol{F}_a = m_a \ddot{\boldsymbol{r}}_a.$$

(3) 質点が及ぼしあう力は、大きさが同じで互いに逆向き、また 2 質点を結ぶ線分と平行になります (図 3.1)。これを**作用反作用の法則**といいます：

$$\boldsymbol{F}_{ab} = -\boldsymbol{F}_{ba} \propto (\boldsymbol{r}_a - \boldsymbol{r}_b).$$

以上 3 つの法則を**運動の法則**といい、ここで述べた事柄を公理と考え、時間、質量、力の概念とします。この公理を用いる物理を**ニュートン力学**といいます。

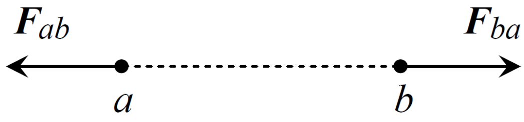

図 3.1: 作用反作用の法則

質量の単位である**キログラム** (kg), 長さの単位である**メートル** (m), 時間の単位である**秒** (s) に対し、

$$\mathrm{N} = \mathrm{kg\,m\,s^{-2}}$$

を**ニュートン**といいます。これは力の単位になります。

(余談) 力や質量や時間の定義を気にする人をたまに見かけますが、公理をもってそれが定義されていると考えます。公理には無定義語が含まれるのが常で、それらの用語は公理によって関連や運用が示されることで初めて意味を持つと考えるわけです。例えば上の公理において、力を "ハニタラ"、質量を "ガテマク" などと適当に置き換えても、別に構いません。ここでの公理以前には力や質量という用語には何の意味もないと考えているからです。これはヒルベルトが提唱した**ビールジョッキ思想**と**形式主義** (**公理主義**) に代表される、数理科学における大事な考え方です。かつてマッハがニュートン力学を批判したことは有名ですが、この種の批判は形式主義に対する無理解によるものと今日ではみなすことができます。

3.2 ガリレイ変換と相対性原理

ある慣性系から、変換、

$$\boldsymbol{r} \;\to\; \boldsymbol{r}' = \boldsymbol{r} - \boldsymbol{V}t$$

により等速度 $\boldsymbol{V}$ で運動する別の系に移っても、$\ddot{\boldsymbol{r}}' = \ddot{\boldsymbol{r}}$ なので、慣性の法則が満たされます。すなわち新しい系も慣性系です。この変換を**ガリレイ変換**といいます (図 3.2)。

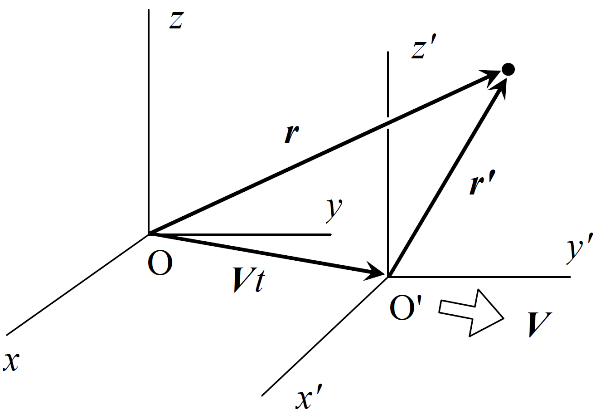

図 3.2: ガリレイ変換

ニュートン力学においては、慣性系は無数に存在することになり、そのどれもが他に対して特別ということはありません。すなわち絶対的な基準系 (**絶対静止系**) は存在しないのです。この性質をガリレイの**相対性原理**といいます。

地上の静止系 (地上が静止してみえる系) はおおよそ慣性系とみなせますが、実際には地球は自転や公転をしているため、これはあくまで近似と考えられます。太陽の中心の静止系はどうかというと、これも銀河系において公転しているため、完全に正確に慣性系であるとはいえないでしょう。このように突き詰めていくと、では本当に慣性系なんてあるのか、ということになりそうですが、それが確かに存在するということを公理としてかかげたものが慣性の法則であるわけです。

3.3 非慣性系とみかけの力

慣性系から、

$$\boldsymbol{r} \ \to \ \boldsymbol{r}' = \boldsymbol{r} - \boldsymbol{R}$$

で新しい系に移ったとき、$\boldsymbol{R}$ が一般に時間に依存すると、$\ddot{\boldsymbol{r}} = \ddot{\boldsymbol{r}}' + \ddot{\boldsymbol{R}}$ ですから、新しい系における質点 a の運動方程式は、

$$\boldsymbol{F}_a = m_a(\ddot{\boldsymbol{r}}'_a + \ddot{\boldsymbol{R}}) \quad \therefore \boldsymbol{F}_a - m_a\ddot{\boldsymbol{R}} = m_a\ddot{\boldsymbol{r}}'_a$$

となります。$-m_a\ddot{\boldsymbol{R}}$ は系が加速していることにより生じる**みかけの力**で、**慣性力**と呼ばれます。慣性系でない系を**非慣性系**といいますが、非慣性系においてはみかけの力が生じると考えることで運動方程式が成り立つ、と考えることができるわけです。例えば、電車が加速した時、電車に乗っている人は進行方向と逆の方向に引っ張られるように感じるでしょうが、これが慣性力の典型的な例です。

一方、あるデカルト座標の基底 $\boldsymbol{e}_i$ $(i = 1, 2, 3)$ が慣性系において時間的に変化しているとき、すなわち系が**回転系**のとき、基底の微小変化分 $d\boldsymbol{e}_i$ が無限小角度ベクトル $d\boldsymbol{\theta}$ を用いて $d\boldsymbol{e}_i = d\boldsymbol{\theta}\times\boldsymbol{e}_i$ と書けることに注意して、

$$\dot{\boldsymbol{e}}_i = \boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{e}_i, \quad \boldsymbol{\omega} = \frac{d\boldsymbol{\theta}}{dt}$$

です。$\boldsymbol{\omega}$ は回転系の**角速度**と呼ばれます。そうすると任意のベクトル $\boldsymbol{A} = A_i\boldsymbol{e}_i$ に関して、

$$\dot{\boldsymbol{A}} = \dot{A}_i\boldsymbol{e}_i + A_i\dot{\boldsymbol{e}}_i = \mathring{\boldsymbol{A}} + \boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{A}.$$

ここで $\mathring{\boldsymbol{A}} = \dot{A}_i\boldsymbol{e}_i$ は基底が静止していると考えた場合の時間微分で、すなわち回転系における時間微分を意味します。これを**回転系時間微分**と呼びましょう。

特に位置ベクトル $\boldsymbol{r}$ について、

$$\dot{\boldsymbol{r}} = \mathring{\boldsymbol{r}} + \boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{r}.$$

この式をさらに時間で微分すると、

$$
\begin{aligned}
\ddot{\boldsymbol{r}} &= \frac{d}{dt}\mathring{\boldsymbol{r}} + \dot{\boldsymbol{\omega}}\times\boldsymbol{r} + \boldsymbol{\omega}\times\dot{\boldsymbol{r}} = \mathring{\mathring{\boldsymbol{r}}} + \boldsymbol{\omega}\times\mathring{\boldsymbol{r}} + \dot{\boldsymbol{\omega}}\times\boldsymbol{r} + \boldsymbol{\omega}\times(\mathring{\boldsymbol{r}} + \boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{r}) \\
&= \mathring{\mathring{\boldsymbol{r}}} + 2\boldsymbol{\omega}\times\mathring{\boldsymbol{r}} + \boldsymbol{\omega}\times(\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{r}) + \dot{\boldsymbol{\omega}}\times\boldsymbol{r}
\end{aligned}
$$

を得るので、回転系における質点 a の運動方程式は、

$$
\boldsymbol{F}_a - 2m_a\boldsymbol{\omega}\times\mathring{\boldsymbol{r}}_a - m_a\boldsymbol{\omega}\times(\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{r}_a) - m_a\dot{\boldsymbol{\omega}}\times\boldsymbol{r}_a = m_a\mathring{\mathring{\boldsymbol{r}}}_a
$$

となります。$-2m_a\boldsymbol{\omega}\times\mathring{\boldsymbol{r}}_a$ は**コリオリの力**、$-m_a\boldsymbol{\omega}\times(\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{r}_a)$ は**遠心力**と呼ばれます。$-m_a\dot{\boldsymbol{\omega}}\times\boldsymbol{r}_a$ は角速度 $\boldsymbol{\omega}$ が変動する場合に生じるみかけの力ですが、特に決まった名称はないようです。

(余談) 大学2年の時だったか、この回転系時間微分という概念を思いつき、学友に見せてまわったのを覚えています。遠心力やコリオリ力の導出は、特に初等的な教科書では説明が煩雑であることが多いです。

3.4 万有引力の法則とクーロンの法則

基本的な力の1つに、**重力** (**万有引力**)、

$$
\boldsymbol{F}^g_{ab} = -G\,m_a m_b\,\frac{\boldsymbol{r}_a - \boldsymbol{r}_b}{|\boldsymbol{r}_a - \boldsymbol{r}_b|^3}
$$

があり、ここで G は**万有引力定数**と呼ばれ、その近似値は、

$$
G \sim\ 6.674\times 10^{-11}\,\mathrm{kg}^{-1}\mathrm{m}^3\mathrm{s}^{-2}
$$

です。これを**万有引力の法則**といいます。

万有引力が作用反作用の法則を満たしていることに注意してください。また、万有引力の大きさは、

$$
|\boldsymbol{F}^g_{ab}| = \frac{G\,m_a m_b}{|\boldsymbol{r}_a - \boldsymbol{r}_b|^2}
$$

というように、2質点間の距離の2乗 (自乗) に反比例します。このような力は一般に**逆2乗力** (**逆自乗力**) と呼ばれます。

一方、質点 a の**電荷**を q_a としたとき、

$$
\boldsymbol{F}^e_{ab} = \frac{q_a q_b}{4\pi\epsilon_0}\,\frac{\boldsymbol{r}_a - \boldsymbol{r}_b}{|\boldsymbol{r}_a - \boldsymbol{r}_b|^3}
$$

という力が働き、これを**静電気力** (**クーロン力**) といいます。ここで ϵ_0 は**真空の誘電率**と呼ばれ、その近似値は、

$$
\epsilon_0 \sim 8.854\times 10^{-12}\,\mathrm{kg}^{-1}\mathrm{m}^{-3}\mathrm{s}^2\mathrm{C}^2
$$

です。C (**クーロン**) は電荷の単位です。これを**クーロンの法則**といいます。クーロン力も作用反作用の法則を満たす逆2乗力になっています。

力は重力や静電気力以外にもありますが、多くの場合その詳細には触れず、作用反作用の法則だけで済ませます。それでもマクロな現象を一通り扱えるのがニュートン力学の秀逸なところです。

(余談) 静電気力は磁力と統合され電磁力 (ローレンツ力) と呼ばれますが、磁力は相対論的な現象であるため、これをニュートン力学で扱うことはできません。磁石に働く力など、部分的もしくは近似的に扱うことはできるでしょうが、深く追求すると矛盾が見出されることになります。

3.5 地球の重力

ある点 $\boldsymbol{r}$ の近傍の微小体積要素 $d^3\boldsymbol{r}$ に含まれる質量の総和を dm としたとき、

$$dm = \rho(\boldsymbol{r})d^3\boldsymbol{r}$$

で与えられる $\rho(\boldsymbol{r})$ を**質量密度**といいます。

地球の質量密度を $\rho(\boldsymbol{r})$ とすると、質点 a に働く地球の重力は、

$$\sum_{b\in\text{地球}} \boldsymbol{F}^g_{ab} = -Gm_a \sum_{b\in\text{地球}} m_b \frac{\boldsymbol{r}_a-\boldsymbol{r}_b}{|\boldsymbol{r}_a-\boldsymbol{r}_b|^3} = -Gm_a \int_{\text{地球}} d^3\boldsymbol{r}\,\rho(\boldsymbol{r})\,\frac{\boldsymbol{r}_a-\boldsymbol{r}}{|\boldsymbol{r}_a-\boldsymbol{r}|^3}$$

と書けます。いま、地球の中心を原点とし、質点 a の位置を $\boldsymbol{r}_a = (0,0,h)$ とします。また、積分変数を3次元極座標を用いて、$\boldsymbol{r} = (r\sin\theta\cos\phi,\ r\sin\theta\sin\phi,\ r\cos\theta)$ と表すと、ヤコビアンが $r^2\sin\theta$ となることに注意して (ユークリッド幾何学の章参照)、

$$\begin{aligned}\sum_{b\in\text{地球}} \boldsymbol{F}^g_{ab} &= -Gm_a \int_0^R dr \int_0^\pi d\theta \int_0^{2\pi} d\phi\ r^2\sin\theta\,\rho(\boldsymbol{r}) \\ &\qquad \times\ \frac{(-r\sin\theta\cos\phi,\ -r\sin\theta\sin\phi,\ h-r\cos\theta)}{\left(r^2\sin^2\theta + (h-r\cos\theta)^2\right)^{3/2}}.\end{aligned}$$

ここで R は地球の半径です (図3.3)。球対称性から $\rho(\boldsymbol{r})$ が r にしか依存しないものとし、これを $\rho(r)$ と書くと、ϕ 積分を実行できて、

$$\sum_{b\in\text{地球}} \boldsymbol{F}^g_{ab} = -2\pi Gm_a(0,0,1) \int_0^R dr\ r^2\rho(r) \int_0^\pi d\theta\ \frac{\sin\theta\,(h-r\cos\theta)}{(h^2+r^2-2hr\cos\theta)^{3/2}}.$$

θ 積分の部分は素朴に積分変数を $h^2+r^2-2hr\cos\theta$ に置換することで実行でき、$h \geq r$ のとき $2/h^2$ を与えます。結果、

$$\sum_{b\in\text{地球}} \boldsymbol{F}^g_{ab} = -\frac{4\pi Gm_a(0,0,1)}{h^2} \int_0^R dr\ r^2\rho(r) = -GMm_a\,\frac{\boldsymbol{r}_a}{|\boldsymbol{r}_a|^3}$$

となり、ここで $M=\int_0^R dr\,4\pi r^2\rho(r)$ は地球の質量です。このことは一般に、球対称な物体が及ぼす重力は、その物体の質量が全て中心に集まった場合と同じであることを示しています。またこの性質は、今の導出からわかるように、逆2乗力一般に成り立ちます。

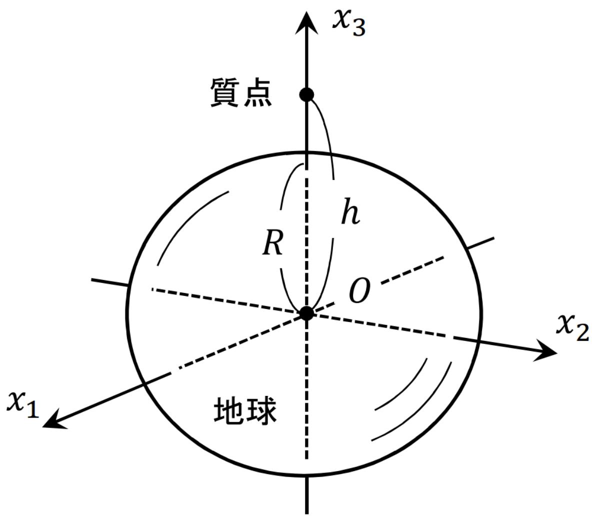

図 3.3: 地球の重力

特に地表近く ($|\boldsymbol{r}_a|\sim R$) では、

$$\sum_{b\in\text{地球}}\boldsymbol{F}^g_{ab}=m_a\boldsymbol{g},\quad \boldsymbol{g}=g\,\boldsymbol{e}_{\text{下}},\quad \boldsymbol{e}_{\text{下}}=-\frac{\boldsymbol{r}_a}{R,}\quad g=\frac{GM}{R^2}\sim 9.807\,\mathrm{m/s^2}$$

と整理され、$\boldsymbol{e}_{\text{下}}$ は地球の中心に向かう単位ベクトル、g は**重力加速度**と呼ばれます。これが地上において感じる**地球の重力**です。

(余談) 重力加速度 g や万有引力定数 G はそれぞれ実験で測定でき、地球の半径は $R\sim 6380\,\mathrm{km}$. これらと $g=GM/R^2$ から地球の質量の近似値が $M\sim 6.0\times10^{24}\,\mathrm{kg}$ であるとわかります。万有引力定数 G に相当する量を歴史上最初にきちんと測定したとされる実験に、**キャヴェンディッシュの実験**があります。

3.6 運動量と角運動量

ある質点系 S に対し、

$$\boldsymbol{P}=\sum_{a\in S}m_a\dot{\boldsymbol{r}}_a$$

を S の**運動量**といいます。この式を時間で微分し、運動方程式を用いると、

$$\dot{\boldsymbol{P}}=\sum_{a\in S}m_a\ddot{\boldsymbol{r}}_a=\sum_{a\in S}\boldsymbol{F}_a=\sum_{a\in S}\sum_{b\in S}\boldsymbol{F}_{ab}+\sum_{a\in S}\sum_{b\notin S}\boldsymbol{F}_{ab}$$

ですが、前の項は $\dfrac{1}{2}\displaystyle\sum_{a\in S}\sum_{b\in S}(\boldsymbol{F}_{ab}+\boldsymbol{F}_{ba})$ と書けるので、作用反作用の法則から消え、

$$\dot{\boldsymbol{P}}=\boldsymbol{F},\qquad \boldsymbol{F}=\sum_{a\in S}\sum_{b\notin S}\boldsymbol{F}_{ab}$$

を得ます。$\boldsymbol{F}$ は**外力**と呼ばれます。外力は系の外部から働くマクロな意味での力を意味しています。外力が $\mathbf{0}$ なら $\dot{\boldsymbol{P}}=\mathbf{0}$. すなわち運動量 $\boldsymbol{P}$ は時間的に一定となります。これを**運動量保存の法則**といいます。一般に、質点系 S がその外部から影響を受けない場合、S を**孤立系**といいます。S が孤立系のとき、運動量は保存するというわけです。

同様に、質点系 S に対し、

$$\boldsymbol{J}=\sum_{a\in S}m_a\boldsymbol{r}_a\times\dot{\boldsymbol{r}}_a$$

を S の**角運動量**といいます。時間で微分すると、

$$\dot{\boldsymbol{J}}=\sum_{a\in S}m_a\boldsymbol{r}_a\times\ddot{\boldsymbol{r}}_a=\sum_{a\in S}\boldsymbol{r}_a\times\boldsymbol{F}_a=\sum_{a\in S}\sum_{b\in S}\boldsymbol{r}_a\times\boldsymbol{F}_{ab}+\sum_{a\in S}\sum_{b\notin S}\boldsymbol{r}_a\times\boldsymbol{F}_{ab}.$$

前の項は、やはり作用反作用の法則に注意して、

$$\frac{1}{2}\sum_{a\in S}\sum_{b\in S}(\boldsymbol{r}_a\times\boldsymbol{F}_{ab}+\boldsymbol{r}_b\times\boldsymbol{F}_{ba})=\frac{1}{2}\sum_{a\in S}\sum_{b\in S}(\boldsymbol{r}_a-\boldsymbol{r}_b)\times\boldsymbol{F}_{ab}=\mathbf{0}$$

と評価されるので、

$$\dot{\boldsymbol{J}}=\boldsymbol{N},\qquad \boldsymbol{N}=\sum_{a\in S}\sum_{b\notin S}\boldsymbol{r}_a\times\boldsymbol{F}_{ab}$$

を得ます。$\boldsymbol{N}$ は**トルク**、あるいは**力のモーメント**と呼ばれます。トルクが $\mathbf{0}$ なら $\dot{\boldsymbol{J}}=\mathbf{0}$. すなわち系の角運動量は保存することになります。これを**角運動量保存の法則**といいます。

3.7 質点系の重心

質点系 S の**重心** $\boldsymbol{r}_G$ を、

$$\boldsymbol{r}_G=\sum_{a\in S}m_a\boldsymbol{r}_a\Big/M,\qquad M=\sum_{a\in S}m_a$$

で定義します。M は質点系の総質量を意味します。そうすると運動量の定義式から、

$$\boldsymbol{P}=\sum_{a\in S}m_a\dot{\boldsymbol{r}}_a=M\dot{\boldsymbol{r}}_G$$

がわかります。$\dot{\boldsymbol{P}} = \boldsymbol{F}$ を用いると、

$$\boldsymbol{F} = M\ddot{\boldsymbol{r}}_G$$

を得ます。これは外力 $\boldsymbol{F}$ に対して、系の重心が運動方程式と同形の方程式に従うことを意味しています。これを**重心の運動方程式**といいます。

一方、

$$\boldsymbol{r}'_a = \boldsymbol{r}_a - \boldsymbol{r}_G$$

で各質点の重心からの相対位置を定義すると、$\displaystyle\sum_{a\in S} m_a\boldsymbol{r}'_a = \boldsymbol{0}$ がわかるので、

$$\begin{aligned}\boldsymbol{J} &= \sum_{a\in S} m_a\boldsymbol{r}_a\times\dot{\boldsymbol{r}}_a = \sum_{a\in S} m_a(\boldsymbol{r}_G + \boldsymbol{r}'_a)\times(\dot{\boldsymbol{r}}_G + \dot{\boldsymbol{r}}'_a)\\ &= M\boldsymbol{r}_G\times\dot{\boldsymbol{r}}_G + \sum_{a\in S} m_a\boldsymbol{r}'_a\times\dot{\boldsymbol{r}}'_a.\end{aligned}$$

第 1 項は重心に全ての質量が集まったと考えた場合の角運動量と等価で、**軌道角運動量**と呼ばれます。第 2 項は重心を基準にした系、すなわち**重心系**における角運動量で、**スピン角運動量**と呼ばれます。質点系の角運動量はこれらの和になるわけです。

地表近くで質点系 S が受ける重力は、

$$\boldsymbol{F}^g = \sum_{a\in S}\sum_{b\in\text{地球}} \boldsymbol{F}^g_{ab} = \sum_{a\in S} m_a\boldsymbol{g} = M\boldsymbol{g}.$$

これを質点系 S の**重さ**といいます。一方、重力によるトルクは、

$$\boldsymbol{N}^g = \sum_{a\in S}\sum_{b\in\text{地球}} \boldsymbol{r}_a\times\boldsymbol{F}^g_{ab} = \sum_{a\in S}\boldsymbol{r}_a\times(m_a\boldsymbol{g}) = M\boldsymbol{r}_G\times\boldsymbol{g} = \boldsymbol{r}_G\times\boldsymbol{F}^g$$

となります。これは重心に全ての質量が集まったと考えた場合のトルクと等価です。重心の概念が非常に有用であることがわかるでしょう。

3.8 落下運動

ここで、地表近くで物体を空中に放ったときに物体がどのような運動をするかを考えてみましょう。

物体の質量 (質点系の総質量) を M, 物体の重心を $\boldsymbol{r}_G$ とすると、物体が受ける重力は $\boldsymbol{F}^g = M\boldsymbol{g}$. 一方、重心の運動方程式は $\boldsymbol{F}^g = M\ddot{\boldsymbol{r}}_G$ でしたから、

$$M\boldsymbol{g} = M\ddot{\boldsymbol{r}}_G \quad \therefore\ \ddot{\boldsymbol{r}}_G = \boldsymbol{g} \quad \therefore\ \boldsymbol{r}_G = \frac{1}{2}\boldsymbol{g}t^2 + \boldsymbol{v}t + \boldsymbol{a}.$$

ここで $\boldsymbol{v}$, $\boldsymbol{a}$ は積分定数ですが、$\boldsymbol{v}$ は重心の初速度、$\boldsymbol{a}$ は重心の初期位置を意味することがわかるでしょう。

いま、$\boldsymbol{r}_G = (x, y, z)$ とし、特に上方を z 方向とすると、$\boldsymbol{g} = (0, 0, -g)$. ここで g は重力加速度です。また、重心の初期位置を原点とし ($\boldsymbol{a} = \boldsymbol{0}$)、水平方向の回転対称性を利用して $\boldsymbol{v} = (v_x, 0, v_z)$ となるように座標を選んだとすると、

$$x = v_x t, \quad y = 0, \quad z = -\frac{1}{2}gt^2 + v_z t \quad \therefore\ z = -\frac{g}{2v_x^2}x^2 + \frac{v_z}{v_x}x.$$

これが物体の重心の軌跡を表す式で、上方に凸の放物線であることがわかります。

空中に放られた物体は、一般にクルクルとまわりながら、あるいは柔らかい場合はさらに振動などしながら複雑に運動しますが、その重心に注目すると、それは放物線を描くというわけです。また、物体の重心の運動は物体の質量 M に依存しないことがわかります。

(余談) 重い物体も軽い物体も、真空中 (空気抵抗を無視できる場合) では同じように落下するということを最初に明確に指摘したのはガリレオ・ガリレイといわれています。ガリレオは望遠鏡を用いた天体観測を初めて行った人物の一人で、その観測結果からコペルニクスの**地動説**に言及し、ローマ教皇庁から異端とみなされ軟禁刑に処されたことでも有名です (1633 年)。ガリレオの死から 350 年後である 1992 年、ローマ教皇はガリレオ裁判が誤りであったことを認め、謝罪しています。古代の哲学や宗教を信じるのではなく、実験や観測を重んじて物理学および天文学に関する多くの発見を成し遂げたガリレオは、今日では「近代科学の父」と呼ばれています。

3.9 ロケットの推進

次に、無重力空間の宇宙においてガスを噴出し、推進するロケットの運動を考えてみましょう。

時刻 0 におけるロケットの速度を $\boldsymbol{v}$, 質量を M_0 とし、単位時間あたりに噴出するガスの質量を α, ロケットに対するガスの噴出速度を $\boldsymbol{\beta}$ とします。ただし α, $\boldsymbol{\beta}$ は時間に依存せず一定とします。

時刻 t におけるロケットの重心位置を $\boldsymbol{r}(t)$ とすると、時刻 t におけるロケットの運動量は、

$$\boldsymbol{P}(t) = M(t)\dot{\boldsymbol{r}}(t)$$

ここで $M(t) = M_0 - \alpha t$ です。また、微小時間 Δt 後の運動量は、この間に噴出したガスの運動量も含めて、

$$\boldsymbol{P}(t + \Delta t) = M(t + \Delta t)\dot{\boldsymbol{r}}(t + \Delta t) + \alpha\Delta t\big(\dot{\boldsymbol{r}}(t) + \boldsymbol{\beta}\big)$$

と書けるので、運動量保存からこれらは等しく、

$$\frac{d}{dt}(M\dot{\boldsymbol{r}}) + \alpha(\dot{\boldsymbol{r}} + \boldsymbol{\beta}) = \boldsymbol{0}.$$

そうすると、$\dot{M} = -\alpha$ に注意して、

$$M\ddot{\boldsymbol{r}} = -\alpha\boldsymbol{\beta} \quad \therefore\ \ddot{\boldsymbol{r}} = \frac{-\alpha\boldsymbol{\beta}}{M_0 - \alpha t} \quad \therefore\ \dot{\boldsymbol{r}} = \boldsymbol{\beta}\log(M_0 - \alpha t) + \boldsymbol{A}$$

ですが、初速度が $\boldsymbol{v}$ であることから積分定数 $\boldsymbol{A}$ が定まり、

$$\dot{\boldsymbol{r}} = \boldsymbol{v} + \boldsymbol{\beta}\log\left(1 - \frac{\alpha t}{M_0}\right).$$

これが時刻 t におけるロケットの速度です。さらに時間で積分すれば、初期位置を $\boldsymbol{a}$ として、

$$\boldsymbol{r} = \boldsymbol{a} + (\boldsymbol{v} - \boldsymbol{\beta})t - \frac{M_0\boldsymbol{\beta}}{\alpha}\left(1 - \frac{\alpha t}{M_0}\right)\log\left(1 - \frac{\alpha t}{M_0}\right)$$

を得るでしょう。これが時刻 t におけるロケットの位置です。

3.10 接触力と摩擦

2物体 A, B が互いに接触している場合、接触面を通じて互いに力 (外力) を及ぼします。2物体の接触面の近傍をそれぞれ A', B' とすると、物体 A が物体 B から受ける**接触力**は、

$$\boldsymbol{F}_{AB}^{\text{接触}} = \sum_{a\in A'}\sum_{b\in B'}\boldsymbol{F}_{ab}$$

と書けます。作用反作用の法則から、

$$\boldsymbol{F}_{BA}^{\text{接触}} = -\boldsymbol{F}_{AB}^{\text{接触}}$$

がわかります。これは巨視的な意味での作用反作用の法則を意味します。

接触力のうち、接触面と垂直な成分を**垂直抗力**、水平な成分を**摩擦力**と呼びます (図3.4)。特に接触面が互いに静止している場合の摩擦力を**静摩擦力**、接触面を擦りながら運動している場合の摩擦力を**動摩擦力**と呼びます。動摩擦力は運動の方向と反対の方向に働きます。

垂直抗力の大きさを N, 静摩擦力の大きさを f と書くと、

$$f < \mu N$$

という関係があり、μ は2物質の表面の性質だけで決まります。μ は**静摩擦係数**と呼ばれます。また、動摩擦力の大きさ f については、

$$f = \mu' N$$

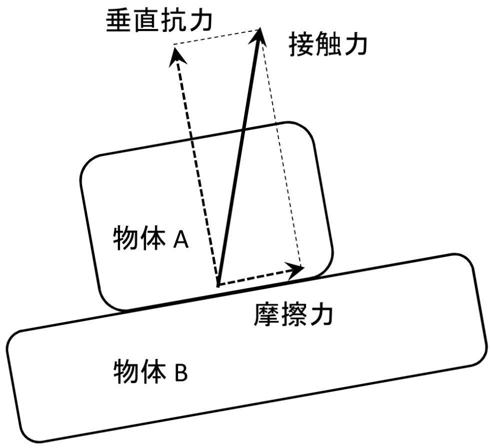

図 3.4: 垂直抗力と摩擦力

という関係があり、μ' も 2 物質の表面の性質だけで決まります。μ' は**動摩擦係数**と呼ばれます。一般に $\mu' < \mu$ です。

接触力は実際には面の各部において働き、いわゆる応力として作用します。すなわち接触力の作用点は本当は 1 点ではないのですが、マクロな問題では 1 点と仮想することが可能です。接触力の正体は究極的にはクーロン力と考えられます。

[例題] 細くて密度が一様な棒が垂直な壁に立てかけられている。棒と壁の成す角を θ, 棒と床の静摩擦係数を μ としたとき、棒が倒れない条件を求めよ。ただし壁は十分滑らかで、棒と壁の間には摩擦を生じないものとする。

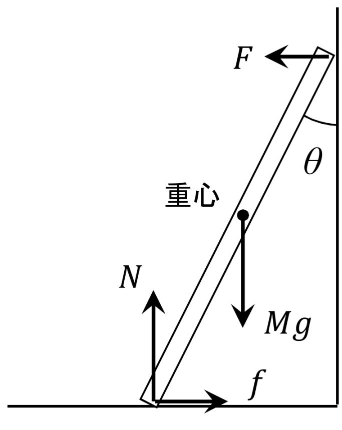

図 3.5: 立てかけられた棒

[解] 棒の質量を M, 長さを L, 重力加速度を g とします。棒と床との接点を原点にとり、図3.5のように垂直抗力および静摩擦力を定義すると、棒が静止していることから外力とトルクは共に $\mathbf{0}$ で (**釣り合いの条件**)、

$$N = Mg, \quad F = f, \quad \frac{L}{2} Mg \sin\theta = LF \cos\theta.$$

ここで棒の密度が一様であることから、その重心が棒の中央にあることを用いました。一方、棒が滑らずに静止していられる条件は $f < \mu N$ ですが、これは上の3つの式を用いて、

$$\tan\theta < 2\mu$$

を与えます。[解終]

(余談) 例題で壁が滑らかでない場合は、壁における摩擦力も存在し、力に関する未知数は全部で4つとなり、釣り合いの条件を用いてもこれらを決定できなくなります。これは床と壁の間に棒がどれくらい食い込んでいるかということに関連した不定性です。私は大学生の頃この不定性になかなか気がつかず、3日ほど悩んだことがあります。

3.11 剛体と慣性モーメント

合同変換 (並進と回転変換) において同一視される物体は合同と呼ばれますが、時間的に合同であり続ける物体、すなわち変形しない物体は、**剛体**と呼ばれます。

剛体の重心もしくは固定点を原点に選び、原点のまわりの剛体の角速度を $\boldsymbol{\omega}$ とすると、剛体の各素片 α の速度は、

$$\dot{\boldsymbol{r}}_\alpha = \boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{r}_\alpha$$

と表されます。よって素片 α の質量を m_α とし、そのスピン角運動量を無視できるものとすると、剛体の角運動量は、

$$\boldsymbol{J} = \sum_{\alpha\in\text{剛体}} m_\alpha \boldsymbol{r}_\alpha\times\dot{\boldsymbol{r}}_\alpha = \sum_{\alpha\in\text{剛体}} m_\alpha \boldsymbol{r}_\alpha\times(\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{r}_\alpha) = \sum_{\alpha\in\text{剛体}} m_\alpha(|\boldsymbol{r}_\alpha|^2\boldsymbol{\omega} - \boldsymbol{r}_\alpha\boldsymbol{r}_\alpha\cdot\boldsymbol{\omega}).$$

あるいはテンソルを用いて、

$$\boldsymbol{J} = I\cdot\boldsymbol{\omega}, \qquad I = \sum_{\alpha\in\text{剛体}} m_\alpha\big(|\boldsymbol{r}_\alpha|^2\,\delta - \boldsymbol{r}_\alpha\boldsymbol{r}_\alpha\big)$$

と書けます。I は剛体の**慣性モーメント** (テンソル) と呼ばれます。

慣性モーメントは、剛体に固定された系で考え、剛体の質量密度を $\rho(\boldsymbol{r})$ とすれば、

$$I = \int_{\text{剛体}} d^3\boldsymbol{r}\,\rho(\boldsymbol{r})\,\big(|\boldsymbol{r}|^2\,\delta - \boldsymbol{r}\,\boldsymbol{r}\big).$$

$\boldsymbol{r} = (x, y, z)$ として、

$$I = \int_{\text{剛体}} d^3\boldsymbol{r}\,\rho(\boldsymbol{r}) \begin{pmatrix} y^2+z^2 & -xy & -zx \\ -xy & z^2+x^2 & -yz \\ -zx & -yz & x^2+y^2 \end{pmatrix}$$

となります。これは対称行列ですから回転変換 (直交行列) で対角化することができ、対角化されたときの座標系を剛体の**主軸系**といいます。

剛体に固定された系は、通常、回転系であり、このため一般に慣性モーメント I は、その成分は時間に依存しませんが、テンソル自体は時間に依存することになります。すなわち $I = I_{ij}\boldsymbol{e}_i\boldsymbol{e}_j$ において、I_{ij} は時間に依存しませんが、基底である $\boldsymbol{e}_i$ が時間に依存し、このため I は時間に依存すると考えられるわけです。

[例題] 質量 M, 半径 R, 高さ L の密度が一様な円柱がある。円柱の重心を原点とし、図3.6のようにデカルト座標 (x, y, z) を選んだとき、円柱の慣性モーメントの各成分を求めよ。また、この座標系が円柱の主軸系であることを確かめよ。

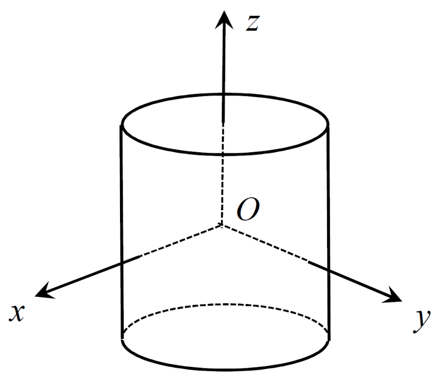

図 3.6: 円柱の慣性モーメント

[解] **円柱座標** r, θ, s を、$\boldsymbol{r} = (x, y, z) = (r\cos\theta, r\sin\theta, s)$ で定義すると、

$$\left[\frac{\partial\boldsymbol{r}}{\partial r}, \frac{\partial\boldsymbol{r}}{\partial\theta}, \frac{\partial\boldsymbol{r}}{\partial s}\right] = \big((\cos\theta, \sin\theta, 0) \times (-r\sin\theta, r\cos\theta, 0)\big)\cdot(0, 0, 1) = r.$$

よって円柱の質量密度を $\rho = M/(\pi R^2 L)$ として、

$$I_{zz} = \int_{\text{円柱}} d^3\boldsymbol{r}\,\rho\,(x^2 + y^2) = \int_0^R dr \int_0^{2\pi} d\theta \int_{-L/2}^{L/2} ds\ r\,\rho\,r^2 = \frac{\rho\pi R^4 L}{2} = \frac{MR^2}{2.}$$

また、

$$\begin{aligned} I_{xx} &= \int_{\text{円柱}} d^3\boldsymbol{r}\,\rho\,(y^2 + z^2) = \int_0^R dr \int_0^{2\pi} d\theta \int_{-L/2}^{L/2} ds\ r\,\rho\,(r^2\sin^2\theta + s^2) \\ &= \frac{\rho\pi R^4 L}{4} + \frac{\rho\pi R^2 L^3}{12} = \frac{M(3R^2 + L^2)}{12.} \end{aligned}$$

さらに、$I_{yy} = I_{xx},\ I_{xy} = I_{yz} = I_{zx} = 0$ を得ます。よって (x, y, z) はこの円柱の主軸系です。[解終]

(余談) 系の原点が剛体の一点にある場合、$\boldsymbol{J} = I\cdot\boldsymbol{\omega}$. さらにこの系が慣性系なら、剛体に加わるトルクを $\boldsymbol{N}$ として $\boldsymbol{N} = \dot{\boldsymbol{J}}$ ですから、$\boldsymbol{N} = (d/dt)\,(I\cdot\boldsymbol{\omega})$. これは**回転の運動方程式**、あるいは**オイラー方程式**と呼ばれます。

3.12 一方向の回転

特に剛体の回転の方向が一方向に限られている場合、問題が簡単になります。

ある慣性系の基底を $\boldsymbol{e}_X$, $\boldsymbol{e}_Y$, $\boldsymbol{e}_Z$ とし、剛体が Z 方向に回転している場合、角速度は $\boldsymbol{\omega} = \omega \boldsymbol{e}_Z$. 一方、剛体に固定された基底を $\boldsymbol{e}_x$, $\boldsymbol{e}_y$, $\boldsymbol{e}_z$ とすると、剛体は Z 方向にしか回転しないので $\boldsymbol{e}_z = \boldsymbol{e}_Z$ とできます。このとき角運動量の Z 成分は、

$$\begin{aligned} J_Z &= \boldsymbol{e}_Z \cdot (I \cdot \boldsymbol{\omega}) = (\boldsymbol{e}_Z \cdot I \cdot \boldsymbol{e}_Z)\omega = (\boldsymbol{e}_z \cdot I \cdot \boldsymbol{e}_z)\omega \\ &= I_{zz}\omega \end{aligned}$$

のように I_{zz} だけで表されます。慣性モーメントの対角成分 I_{zz} は、特に z 軸の周りの慣性モーメントと呼ばれます。

例題を 2 つ紹介しましょう。

[例題] 質量 M, 半径 R, 回転軸の周りの慣性モーメントが kMR^2 $(k > 0)$ で与えられる回転体が、傾斜角 θ の平らな斜面を滑らず転がるとき、回転体の重心の加速度の大きさを求めよ。重力加速度を g とする。

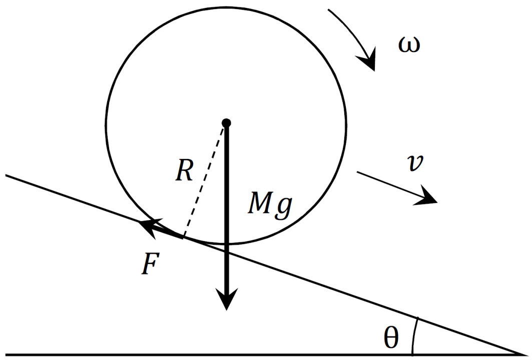

図 3.7: 斜面を転がる回転体

[解] 回転体が斜面から受ける静摩擦力の大きさを F, 重心の速さを v とすると、重心の運動方程式より、

$$Mg\sin\theta - F = M\dot{v}$$

です (図 3.7)。一方、ある瞬間の回転体の重心の位置を原点にとると、軌道角運動量は $\mathbf{0}$, スピン角運動量の大きさは回転体の角速度の大きさを ω として $kMR^2\omega$ となるので、$\boldsymbol{N} = \dot{\boldsymbol{J}}$ より、

$$RF = kMR^2\dot{\omega}.$$

また、回転体は斜面上を滑らず転がるので、

$$v = R\omega \quad \therefore\ \dot{v} = R\dot{\omega}.$$

以上3つの式から $F, \dot{\omega}$ を消去して、

$$\dot{v} = \frac{g\sin\theta}{1+k.} \quad \text{[解終]}$$

[例題] 長さ L の細くて丈夫な棒が無重力空間において静止していて、その棒の一端に小物体が棒と垂直な方向に速さ v で衝突、合体したとする。このとき棒は回転を始めるが、その角速度の大きさを求めよ。小物体の質量を m、棒の質量を M とする。また、棒の密度は一様であるとする。

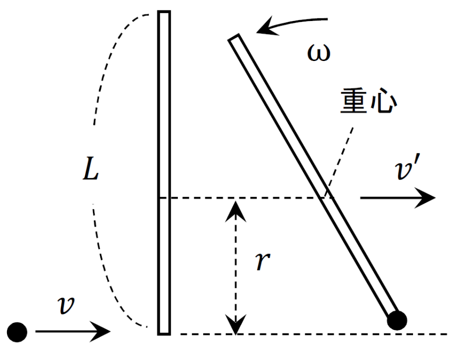

図 3.8: 衝突による棒の回転

[解] 衝突後、系の重心は一定の速度で進むはずです。その速さを v' とすると、運動量保存の法則から、

$$mv = (m+M)v'.$$

また、衝突点を原点にとると、衝突前の系の角運動量が $\mathbf{0}$ であることに注意して、角運動量保存の法則は、

$$0 = -(m+M)rv' + I\omega$$

を与えます。右辺初項は衝突後の軌道角運動量、第二項はスピン角運動量を意味します (図3.8紙面手前向き成分)。r は衝突後の重心位置で、

$$r = \frac{ML}{2(m+M).}$$

ω は角速度の大きさ、I は重心を通る回転軸の周りの慣性モーメントで、

$$I = mr^2 + \frac{M}{L}\int_{-r}^{L-r} dx\, x^2 = (m+M)r^2 - MLr + \frac{ML^2}{3.}$$

以上4つの式から v', r, I を消去して、

$$\omega = \frac{6mv}{(4m+M)L.} \quad \text{[解終]}$$

3.13 回転ごまの運動

次に3次元的な回転の問題として、**回転ごま**の運動に触れておきましょう。

地上の静止系のデカルト座標を (X, Y, Z), こまの軸の方向を z 軸、これに合わせて回転するデカルト座標 (x, y, z) をとります。ただし y 軸は常に X-Y 平面内にあるとします。図3.9のように角 θ, ϕ を定義し、z 軸まわりのこまの自転角を φ とします。これら3つの角度は、一般に剛体の姿勢を完全に記述し、**オイラー角**と呼ばれます。

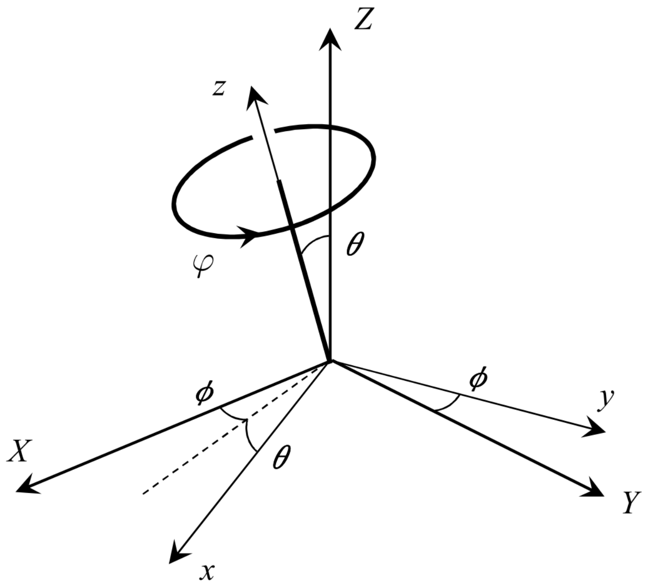

図 3.9: オイラー角

こまの角速度は、

$$\boldsymbol{\omega} = \dot{\varphi}\, \boldsymbol{e}_z + \dot{\theta}\, \boldsymbol{e}_y + \dot{\phi}\, \boldsymbol{e}_Z$$

ということになりますが、こまの自転角速度の大きさ $\dot{\varphi}$ が $\dot{\theta}$ や $\dot{\phi}$ に比べ十分大きいとし、

$$\boldsymbol{\omega} = \dot{\varphi}\, \boldsymbol{e}_z$$

と近似します。また、こまの慣性モーメントは (x, y, z) 系で対角化されているはずで、$I = I_{xx}\, \boldsymbol{e}_x \boldsymbol{e}_x + I_{yy}\, \boldsymbol{e}_y \boldsymbol{e}_y + I_{zz}\, \boldsymbol{e}_z \boldsymbol{e}_z$. よって角運動量は、

$$\boldsymbol{J} = I \cdot \boldsymbol{\omega} = I_{zz} \dot{\varphi}\, \boldsymbol{e}_z$$

と書けます。時間で微分すると $\dot{\boldsymbol{J}} = I_{zz} (\ddot{\varphi}\, \boldsymbol{e}_z + \dot{\varphi}\, \dot{\boldsymbol{e}}_z)$ ですが、ここで、

$$\dot{\boldsymbol{e}}_z = \dot{\theta}\, \boldsymbol{e}_y \times \boldsymbol{e}_z + \dot{\phi}\, \boldsymbol{e}_Z \times \boldsymbol{e}_z = \dot{\theta}\, \boldsymbol{e}_x + \dot{\phi} \sin\theta\, \boldsymbol{e}_y$$

に注意して、

$$\dot{\boldsymbol{J}} = I_{zz} \left(\dot{\varphi}\dot{\theta}\, \boldsymbol{e}_x + \dot{\varphi}\dot{\phi} \sin\theta\, \boldsymbol{e}_y + \ddot{\varphi}\, \boldsymbol{e}_z \right)$$

となります。一方、こまに対するトルクは、こまの質量を M とし、床との接点 (原点) からこまの重心までの距離を l, 重力加速度を g とすると、

$$\boldsymbol{N} = l\boldsymbol{e}_z \times (-Mg\,\boldsymbol{e}_Z) = Mgl\sin\theta\,\boldsymbol{e}_y$$

ですから、$\boldsymbol{N} = \dot{\boldsymbol{J}}$ より、

$$\dot{\theta} = \ddot{\varphi} = 0, \qquad \dot{\phi} = \frac{Mgl}{I_{zz}\dot{\varphi}} \quad (\text{一定})$$

を得ます。すなわち自転するこまの自転軸先端は円を描いて動くわけで、これを**歳差運動** (**首振り運動**、**すりこぎ運動**) といいます。歳差運動の角速度 $\dot{\phi}$ は、自転角速度 $\dot{\varphi}$ に反比例することがわかりますが、このことは回転ごまで遊んだことがある人なら皆経験していることでしょう。勢いよく回っているこまほどゆっくりと歳差運動するのです。

(余談)　無重力空間における軸対称な物体は一般に歳差運動を行います (静止や単純な自転を含む)。このことは以下のようにして確かめられます。無重力空間ではトルクが生じず、角運動量が保存するので、その方向を Z 方向として、$\boldsymbol{J} = |\boldsymbol{J}|\boldsymbol{e}_Z = |\boldsymbol{J}|(-\sin\theta\,\boldsymbol{e}_x + \cos\theta\,\boldsymbol{e}_z)$ とします。一方、物体の対称軸を z 方向とし、慣性モーメントを $I = \alpha\,\boldsymbol{e}_x\boldsymbol{e}_x + \alpha\,\boldsymbol{e}_y\boldsymbol{e}_y + \beta\,\boldsymbol{e}_z\boldsymbol{e}_z$ とすると、$\boldsymbol{J} = I\cdot\boldsymbol{\omega} = -\alpha\dot{\phi}\sin\theta\,\boldsymbol{e}_x + \alpha\dot{\theta}\,\boldsymbol{e}_y + \beta(\dot{\varphi} + \dot{\phi}\cos\theta)\,\boldsymbol{e}_z$ を得ます。これらを比較して、

$$\dot{\theta} = 0, \quad \dot{\phi} = \frac{|\boldsymbol{J}|}{\alpha,} \quad \dot{\varphi} = \left(\frac{\alpha}{\beta} - 1\right)\dot{\phi}\cos\theta$$

を得るでしょう。$\dot{\theta} = \ddot{\phi} = \ddot{\varphi} = 0$ なので、これは歳差運動です。

3.14　力のポテンシャル

質点 a の位置ベクトル $\boldsymbol{r}_a = (x_a^1, x_a^2, x_a^3)$ に関するナブラを $\boldsymbol{\nabla}_a$ と書きます。すなわち、

$$(\boldsymbol{\nabla}_a)_i = \frac{\partial}{\partial x_a^i.}$$

一般に、質点 a が質点 b から受ける力が、

$$\boldsymbol{F}_{ab} = -\boldsymbol{\nabla}_a U_{ab}$$

と書けるとき、U_{ab} をこの力の**ポテンシャル**といいます。

例えば、万有引力のポテンシャルは、

$$U_{ab}^g = -\frac{Gm_a m_b}{|\boldsymbol{r}_a - \boldsymbol{r}_b|}$$

と書けます。実際このとき、

$$\boldsymbol{F}_{ab}^g = -\boldsymbol{\nabla}_a U_{ab}^g = Gm_a m_b \boldsymbol{\nabla}_a \frac{1}{|\boldsymbol{r}_a - \boldsymbol{r}_b|}$$

および、

$$
\begin{aligned}
\left(\boldsymbol{\nabla}_a \frac{1}{|\boldsymbol{r}_a-\boldsymbol{r}_b|}\right)_i &= \frac{\partial}{\partial x_a^i}\left(|\boldsymbol{r}_a-\boldsymbol{r}_b|^2\right)^{-1/2} \\
&= -\frac{1}{2}\left(|\boldsymbol{r}_a-\boldsymbol{r}_b|^2\right)^{-3/2}\frac{\partial}{\partial x_a^i}(x_a^j-x_b^j)(x_a^j-x_b^j) \\
&= -\frac{1}{2\,|\boldsymbol{r}_a-\boldsymbol{r}_b|^3}\;2(x_a^j-x_b^j)\delta_{ij} = \left(-\frac{\boldsymbol{r}_a-\boldsymbol{r}_b}{|\boldsymbol{r}_a-\boldsymbol{r}_b|^3}\right)_i
\end{aligned}
$$

に注意して、万有引力の法則が導かれるでしょう。

同様にして、クーロン力のポテンシャルは、

$$
U_{ab}^e = \frac{q_a q_b}{4\pi\epsilon_0|\boldsymbol{r}_a-\boldsymbol{r}_b|}
$$

と書かれます。

多くの力はポテンシャルにより記述でき、力はポテンシャルの現れと考えることができます。一般に力のポテンシャル U_{ab} が a, b について対称で、特に2質点の距離 $|\boldsymbol{r}_a-\boldsymbol{r}_b|$ だけの関数で与えられるとき、その力は作用反作用の法則を自動的に満たすことに注意してください。

3.15 エネルギー

質点系 S の**運動エネルギー** K, および**ポテンシャルエネルギー** U を、

$$
K = \sum_{a\in S}\frac{m_a}{2}|\dot{\boldsymbol{r}}_a|^2, \qquad U = \frac{1}{2}\sum_{a\in S}\sum_{b\in S} U_{ab}
$$

で定義します。それぞれの時間的変化分を考えると、

$$
\begin{aligned}
dK &= \sum_{a\in S} m_a\dot{\boldsymbol{r}}_a\cdot d\dot{\boldsymbol{r}}_a = \sum_{a\in S} m_a d\boldsymbol{r}_a\cdot\ddot{\boldsymbol{r}}_a = \sum_{a\in S}\boldsymbol{F}_a\cdot d\boldsymbol{r}_a, \\
dU &= \frac{1}{2}\sum_{a\in S}\sum_{b\in S}\Big(\boldsymbol{\nabla}_a U_{ab}\cdot d\boldsymbol{r}_a + \boldsymbol{\nabla}_b U_{ab}\cdot d\boldsymbol{r}_b\Big) = -\sum_{a\in S}\sum_{b\in S}\boldsymbol{F}_{ab}\cdot d\boldsymbol{r}_a
\end{aligned}
$$

となるので、

$$
dE = dW, \quad E = K + U, \quad dW = \sum_{a\in S}\sum_{b\notin S}\boldsymbol{F}_{ab}\cdot d\boldsymbol{r}_a
$$

を得ます。E を系 S の**エネルギー**といいます。$\int dW$ を系 S がされた**仕事**といいます。dW/dt を**仕事率**といいます。系の外部と相互作用がなく $dW = 0$ のときは、$dE = 0$ がわかり、これを**エネルギー保存の法則**といいます。

重心からの相対位置 $\boldsymbol{r}'_a = \boldsymbol{r}_a - \boldsymbol{r}_G$ を用いると、系 S の運動エネルギーは、

$$K = \sum_{a\in S} \frac{m_a}{2}\,|\dot{\boldsymbol{r}}_a|^2 = \frac{M}{2}\,|\dot{\boldsymbol{r}}_G|^2 + \sum_{a\in S}\frac{m_a}{2}\,|\dot{\boldsymbol{r}}'_a|^2$$

となります。すなわち質点系の運動エネルギーは、重心に全ての質量が集まったと考えた場合の重心の運動エネルギーと、重心系における運動エネルギーの和になります。特に剛体の場合、剛体の重心系における運動エネルギー (上式第 2 項) は、

$$\sum_{\alpha\in \text{剛体}} \frac{m_\alpha}{2}\,|\dot{\boldsymbol{r}}_\alpha|^2 + \sum_{\alpha\in \text{剛体}}\sum_{a\in\alpha}\frac{m_a}{2}\,|\dot{\boldsymbol{r}}_a - \dot{\boldsymbol{r}}_\alpha|^2$$

のように、各素片の重心の運動エネルギーと、各素片の重心系における運動エネルギーの和になるでしょう。後者を K_I と書きましょう。前者は、

$$\sum_{\alpha\in \text{剛体}} \frac{m_\alpha}{2}|\dot{\boldsymbol{r}}_\alpha|^2 = \sum_{\alpha\in \text{剛体}} \frac{m_\alpha}{2}\,|\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{r}_\alpha|^2 = \sum_{\alpha\in \text{剛体}} \frac{m_\alpha}{2}\Big(|\boldsymbol{r}_\alpha|^2|\boldsymbol{\omega}|^2 - |\boldsymbol{r}_\alpha\cdot\boldsymbol{\omega}|^2\Big) = \frac{1}{2}\,\boldsymbol{\omega}\cdot I\cdot\boldsymbol{\omega}$$

と、慣性モーメントと角速度を使って表せます。よって剛体の運動エネルギーは、

$$K = \frac{M}{2}|\dot{\boldsymbol{r}}_G|^2 + \frac{1}{2}\,\boldsymbol{\omega}\cdot I\cdot\boldsymbol{\omega} + K_I$$

と表すことができます。

K_I は熱や振動による微視的な運動エネルギーを意味します。ポテンシャルエネルギーにも微視的な部分があり、これを U_I と書き、微視的ポテンシャルと呼びましょう。

$$E_M = E - K_I - U_I$$

を**力学的エネルギー**といいます。力学的エネルギーは巨視的に想定されるエネルギーですが、摩擦や衝突など、熱や振動への変換がある場合は保存しません。力学的エネルギーが保存しない系は一般に**散逸系**と呼ばれます。また、力学的エネルギーが保存する衝突を**弾性衝突**といい、保存しない衝突を**非弾性衝突**といいます。

あるエネルギーが微視的エネルギーかそうでないかは、問題の取り扱い方に依存します。微視的と巨視的の境界を決めているのは、結局のところ、問題を考えている “人間” であることに注意してください。このことは系の内部と外部の境界についてもいえます。質点系のニュートン力学がやや複雑に見えるのは、実用の際にこの境界の設定を行う必要性があるからです。

エネルギーおよび仕事率の単位は、

$$\mathrm{J} = \mathrm{kg\,m^2s^{-2}}, \quad \mathrm{W} = \mathrm{J\,s^{-1}} = \mathrm{kg\,m^2s^{-3}}$$

となります。順に、**ジュール**、**ワット**と呼ばれます。

(余談)　万有引力やクーロン力においては U_{aa} は発散します。よってポテンシャルエネルギー $U=(1/2)\sum_{a,b}U_{ab}$ は実は発散するわけですが、ポテンシャルエネルギーはその微分にしか意味がなく、通常、その絶対値は問題になりません。$U_{aa}/2$ は質点 a の**自己エネルギー**と呼ばれます。ポテンシャルエネルギーから自己エネルギーの寄与を除き、

$$U^{(r)}=\frac{1}{2}\sum_{a,b}U_{ab}-\frac{1}{2}\sum_{a}U_{aa}=\sum_{a<b}U_{ab}$$

でポテンシャルエネルギーを定義する教科書も多いでしょう。これはいわば "くりこまれたポテンシャルエネルギー" などと呼ぶべきものです。相対論や量子論ではこのようなくりこみの処理 (無限大の相殺) が非常にトリッキーになり、また重要になってきます。

3.16　外部ポテンシャル

質点系 S の外部が定常的 (静止している) とみなせるとき、

$$U'=\sum_{a\in S}\sum_{b\notin S}U_{ab}$$

で S の**外部ポテンシャル**を定義します。このとき、

$$dU'=\sum_{a\in S}\sum_{b\notin S}\boldsymbol{\nabla}_aU_{ab}\cdot d\boldsymbol{r}_a=-\sum_{a\in S}\sum_{b\notin S}\boldsymbol{F}_{ab}\cdot d\boldsymbol{r}_a=-dW$$

なので、$dE=dW$ は、

$$dE'=0,\quad E'=E+U'$$

を与えます。E' を外部ポテンシャルを含むエネルギーといいます。$dE'=0$ はやはり**エネルギー保存の法則**と呼ばれます。外部からの仕事の効果をエネルギー E に上乗せすることで、上乗せされたエネルギー E' は保存するというわけです。外部ポテンシャルによる力は**保存力**と呼ばれます。

例えば地表近くで、系の外部から働く力が地球の重力だけと考えられる場合、

$$dU'=-\sum_{a\in S}\sum_{b\in\text{地球}}\boldsymbol{F}^g_{ab}\cdot d\boldsymbol{r}_a=-\sum_{a\in S}m_a\boldsymbol{g}\cdot d\boldsymbol{r}_a=-d(M\boldsymbol{g}\cdot\boldsymbol{r}_G)$$

よって、

$$U'=-M\boldsymbol{g}\cdot\boldsymbol{r}_G.$$

この式には定数を加える不定性がありますが、簡単のためその定数を 0 に選びました。外部ポテンシャルにはこのように定数を加える不定性が常にあります。特に上方を z 方向とし、$\boldsymbol{r}_G=(x,y,z),\ \boldsymbol{g}=(0,0,-g)$ としたときは、

$$U'=Mgz.$$

これは**位置エネルギー**と呼ばれ、高校物理でもお馴染みでしょう。

3.17 単振り子

エネルギー保存の法則を用いる簡単な例題として、**単振り子**を紹介します。

図3.10のように、長さ l の軽くて丈夫な棒に質量 m のおもりが繋がれた振り子を考えます。おもりの大きさは l に比べて十分小さいとし、よってスピンによる運動エネルギーは無視できるものとします。また、振り子の支点 O は摩擦なく自由に回転できるとします。

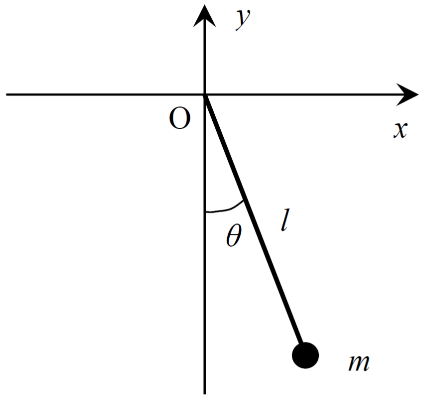

図 3.10: 単振り子

おもりの位置は、$x = l\sin\theta,\ y = -l\cos\theta$ と表されるので、外部ポテンシャルを含む系のエネルギーは、重力加速度を g として、

$$E = \frac{m}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) + mgy = \frac{ml^2}{2}\,\dot{\theta}^2 - mgl\cos\theta$$

となり、これは保存量です。最大の振れ角 (振幅) を Θ とおけば、

$$E = -mgl\cos\Theta$$

ですから、これらより、

$$\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 = \frac{2g}{l}\,(\cos\theta - \cos\Theta)$$

を得ます。この微分方程式は変数分離形であり、$\dot{\theta} \le 0$ の仮定のもとで、

$$t = -\sqrt{\frac{l}{2g}} \int \frac{d\phi}{\sqrt{\cos\phi - \cos\Theta}}\,\bigg|_{\phi=\theta}$$

と解けますが、 さらに初期条件として $t = 0 \Leftrightarrow \theta = \Theta$ を仮定すると、

$$t = \sqrt{l/g}\, I(\theta, \Theta), \qquad I(\theta, \Theta) = \frac{1}{\sqrt{2}} \int_\theta^\Theta \frac{d\phi}{\sqrt{\cos\phi - \cos\Theta}}$$

となります。一方、振動の周期 T は、$\theta = 0$ を与える時刻の 4 倍のはずですから、

$$T = 4\sqrt{l/g}\, I(0, \Theta) = \frac{2T_0}{\pi}\, I(0, \Theta), \quad T_0 = 2\pi\sqrt{l/g}$$

です。グラフを図 3.11 に示します。

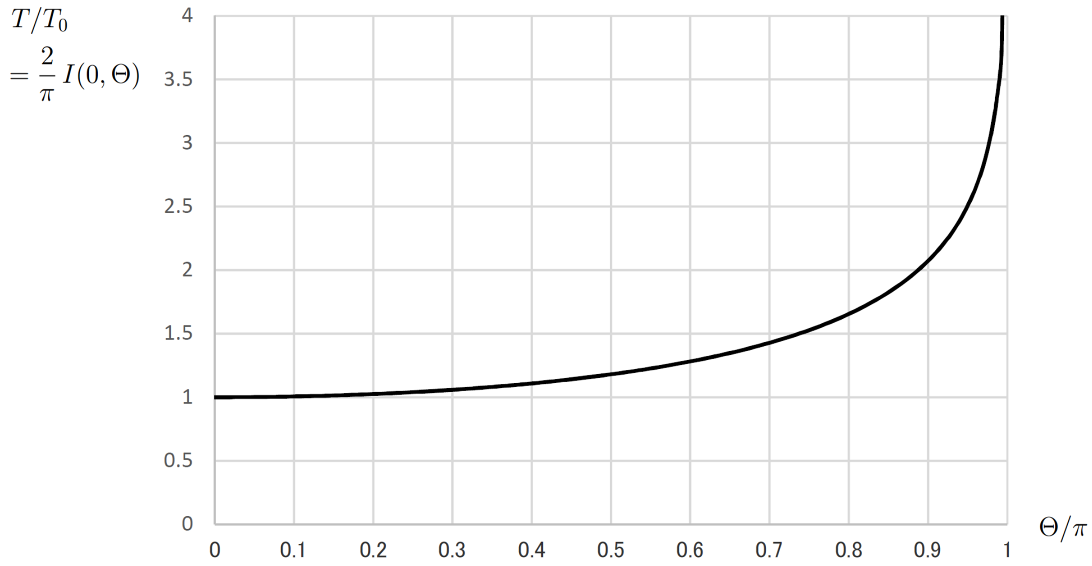

図 3.11: 単振り子の周期

ちなみに振幅が十分小さく、$\Theta \ll 1$ のときは、$\cos x = 1 - x^2/2 + \cdots$ に注意して、

$$I(\theta, \Theta) \sim \int_\theta^\Theta \frac{d\phi}{\sqrt{\Theta^2 - \phi^2}} = \arccos\frac{\theta}{\Theta}$$

となるので、解と周期は、それぞれ、

$$\theta \sim \Theta\cos(\sqrt{g/l}\; t), \qquad T \sim T_0$$

と近似されます。このように力学変数が時間変数の三角関数として与えられる運動は、一般に**単振動**と呼ばれます。

振幅が一定のもとで周期が一定なので、単振り子は時計として機能します。これを振り子の**等時性**といいます。また、単振り子の実験により重力加速度 g を精度よく決定することができます。

(余談) 定積分 $I(\theta, \Theta)$ は積分の境界に特異性を持つ、いわゆる広義積分ですが、倍角公式 $\cos\theta = 1 - 2\sin^2(\theta/2)$ に注意すると、

$$I(\theta, \Theta) = \frac{1}{2}\int_\theta^\Theta \frac{d\phi}{\sqrt{\sin^2(\Theta/2) - \sin^2(\phi/2).}}$$

$\sin(\phi/2) = \sin(\Theta/2)\,x$ で積分変数を x に変換すると、

$$I(\theta, \Theta) = \int_{\frac{\sin(\theta/2)}{\sin(\Theta/2)}}^{1} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}\sqrt{1-\sin^2(\Theta/2)\,x^2}}.$$

さらに $x = \cos\psi$ で積分変数を ψ に変換すると、

$$I(\theta, \Theta) = \int_0^{\arccos\frac{\sin(\theta/2)}{\sin(\Theta/2)}} \frac{d\psi}{\sqrt{1-\sin^2(\Theta/2)\cos^2\psi}}$$

となって、特異性を回避できます。特に、

$$I(0, \Theta) = \int_0^{\pi/2} \frac{d\psi}{\sqrt{1-\sin^2(\Theta/2)\cos^2\psi}}.$$

これは**楕円積分**と呼ばれる特殊関数の 1 つです。数値積分の際にはこちらの表示の方が境界の処理をしなくて済むので便利です。

3.18 段差を乗り越える回転体

次にエネルギー保存則と角運動量保存則の両方を用いる例題として、段差を乗り越える回転体の問題を紹介します。

質量 M, 半径 R, 回転軸の周りの慣性モーメント kMR^2 の回転体が滑らず水平な平面上を転がり、図 3.12 のような高さ $h\,(< R)$ の段差を乗り越える運動を考えます。ただし点 O との衝突時、回転体は O から離れず、スムーズに段差を乗り越えるものとします。回転体の中心の初速度を v_0 としたとき、段差を乗り越えた後の中心の速度 v を求めてみましょう。重力加速度を g とします。

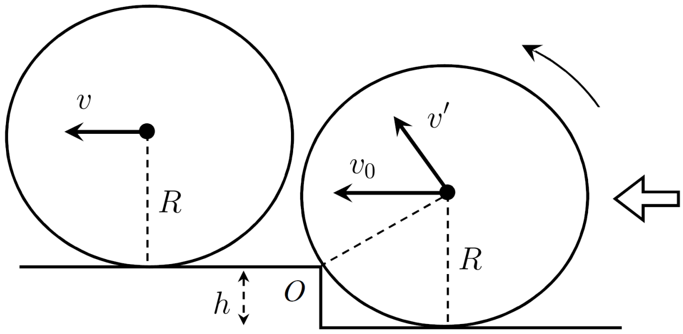

図 3.12: 段差を乗り越える回転体

O との衝突時、力学的エネルギーは一般に保存しませんが、O のまわりの角運動量は保存します。衝突時に回転体に作用する**撃力** (ごく短時間に作用する大きな力) は、力の作用点が O にあるため、そのトルクは $\mathbf{0}$ だからです。衝突直後の回転体の中心の速度を図 3.12 のように v' とすると、O のまわりの角運動量保存則は、

$$M(R-h)v_0 + kMR^2\,\frac{v_0}{R} = MRv' + kMR^2\,\frac{v'}{R}$$

と書けます。v_0/R や v'/R は、それぞれ、衝突前、衝突後の回転体の自転角速度を意味していることに注意。これを v' について解いて、

$$v' = \left(1 - \frac{h}{(1+k)R}\right) v_0.$$

一方、衝突後は、重力による外部ポテンシャルを含めた力学的エネルギーが保存するはずなので、段差を乗り越えた後の回転体の中心速度を v として、

$$\frac{1}{2}Mv'^2 + \frac{1}{2}kMR^2\left(\frac{v'}{R}\right)^2 + Mg(R-h) = \frac{1}{2}Mv^2 + \frac{1}{2}kMR^2\left(\frac{v}{R}\right)^2 + MgR$$

です。これを v について解くと $v = \left(v'^2 - \dfrac{2gh}{1+k}\right)^{1/2}$ ですが、v' の式を代入して、

$$v = \left(\left(1 - \frac{h}{(1+k)R}\right)^2 v_0^2 - \frac{2gh}{1+k}\right)^{1/2}$$

を得ます。これが求めたかった式です。

3.19 惑星の運動

次に、重要な例題として、太陽系における**惑星の運動**を考えてみましょう。

太陽の質量を M とし、ある惑星の質量を m とします。$M \gg m$ を仮定すると、近似的に太陽の中心の静止系の1つを慣性系とみなすことができます。そこで太陽の中心を原点とし、考えている惑星の中心の位置ベクトルを $\boldsymbol{r}$ とします。(惑星の半径) $\ll |\boldsymbol{r}|$ の場合、惑星の重心 $\boldsymbol{r}$ は、惑星の全ての質量が $\boldsymbol{r}$ にあると考えた場合の運動方程式に従うので、惑星をそのような1つの質点と仮想した場合の力学的エネルギー、

$$E = \frac{m}{2}|\dot{\boldsymbol{r}}|^2 - \frac{C}{|\boldsymbol{r}|}, \qquad C = GMm$$

が保存するはずです。また、同じ仮想のもとでの角運動量、すなわち惑星の軌道角運動量、

$$\boldsymbol{J} = m\boldsymbol{r}\times\dot{\boldsymbol{r}}$$

も保存するはずです。角運動量の全体は保存するため、惑星のスピン角運動量も保存し、すなわち、惑星が球形の場合、惑星の自転の角速度が一定であることがわかります。

惑星の軌道角運動量 $\boldsymbol{J}$ が一定であることから、惑星の軌道は太陽を含むある面内に限られ、この面を $\theta = \pi/2$ とするように3次元極座標 (r, θ, ϕ) を張ります。このとき、

$$\boldsymbol{r} = r\boldsymbol{e}_r, \qquad \dot{\boldsymbol{r}} = \dot{r}\boldsymbol{e}_r + r\dot{\boldsymbol{e}}_r = \dot{r}\boldsymbol{e}_r + r\dot{\phi}\boldsymbol{e}_\phi$$

に注意して、エネルギーと軌道角運動量の大きさは、それぞれ、

$$E = \frac{m}{2}(\dot{r}^2 + r^2\dot{\phi}^2) - \frac{C}{r,} \qquad J = |\boldsymbol{J}| = mr^2\dot{\phi}$$

と書けます。J の式から、

$$\dot{\phi} = \frac{J}{mr^2,} \qquad \dot{r} = \dot{\phi}\,\frac{dr}{d\phi} = \frac{J}{mr^2}\,\frac{dr}{d\phi}$$

ですから、E の式にこれらを代入して整理すれば、

$$\left(\frac{dr}{d\phi}\right)^2 = \frac{2mE}{J^2}\,r^4 + \frac{2mC}{J^2}\,r^3 - r^2$$

あるいは、$r = 1/u$ で変数を置換して、

$$\left(\frac{du}{d\phi}\right)^2 = \frac{2mE}{J^2} + \frac{2mC}{J^2}\,u - u^2$$

となります。

上の微分方程式は変数分離形ですから解くことが可能です。実際、

$$\phi = \pm\int \frac{du}{\sqrt{K^2 - (u - mC/J^2)^2},} \qquad K = \frac{\sqrt{2mEJ^2 + m^2C^2}}{J^2}$$

と変形できますが、$u - mC/J^2 = K\sin\psi$ で積分変数を ψ に置換すれば、積分を実行でき、$\phi = \pm\psi + \alpha$ を得ます。α は積分定数です。変数を元に戻せば、

$$u = \frac{mC}{J^2} \pm K\sin(\phi - \alpha)$$

となりますが、積分定数 α があるので複号はどちらかに定めることができ、r で表して、

$$r = \frac{l}{1 - \epsilon\sin(\phi - \alpha),} \qquad l = \frac{J^2}{mC,} \quad \epsilon = \left(1 + \frac{2EJ^2}{mC^2}\right)^{1/2}$$

のように整理されます。これが惑星の軌道の式で、高校の数学でも習うように、これは2次曲線を意味します。

- $E > 0$ のとき $\epsilon > 1$. このとき軌道は双曲線
- $E = 0$ のとき $\epsilon = 1$. このとき軌道は放物線
- $E < 0$ のとき $\epsilon < 1$. このとき軌道は楕円

に注意 (図 3.13)。l は軌道の**半直弦**、ϵ は**離心率**と呼ばれます。図の点線の 1 目盛りは半直弦の長さを意味します。

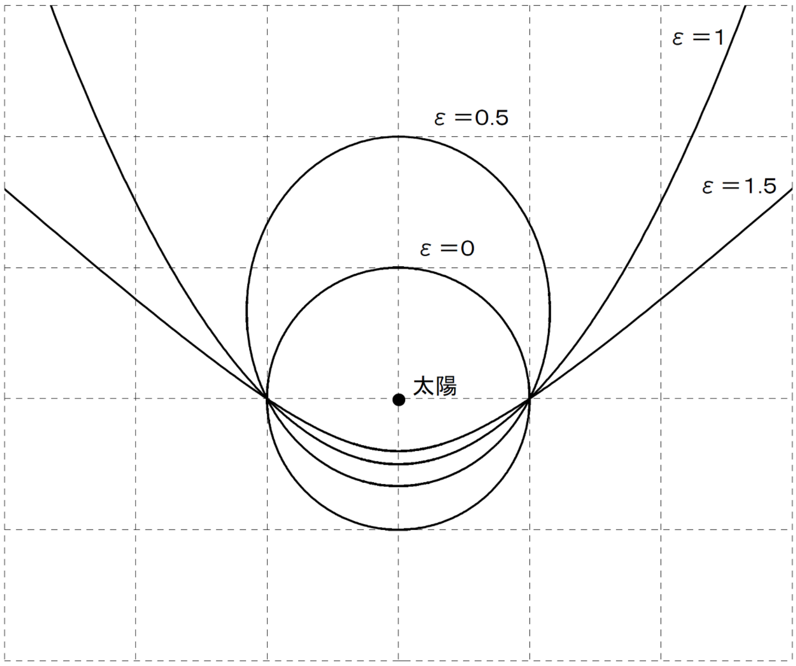

図 3.13: 惑星の軌道

$\epsilon < 1$ の場合の惑星の公転周期は、$J = mr^2\dot{\phi}$ に注意して、

$$T = \int_0^T dt = \frac{m}{J}\int_0^{2\pi} d\phi\ r^2 = \frac{ml^2}{J}\int_0^{2\pi} \frac{d\phi}{(1-\epsilon\sin\phi)^2}$$

ですが、この積分は、例えば留数定理により実行できます(関数論と応用数学の章を参照)。結果、

$$T = \frac{ml^2}{J}\ \frac{2\pi}{(1-\epsilon^2)^{3/2}} = \frac{2\pi}{\sqrt{GM}}\left(\frac{l}{1-\epsilon^2}\right)^{3/2}$$

となります。$l/(1-\epsilon^2)$ は楕円の長半径を意味します。

太陽系における各惑星の軌道や周期は、ティコ・ブラーエとケプラーにより詳しく観測され、次のような性質が指摘されていました。

(1) 惑星は太陽を 1 つの焦点とする楕円軌道を描く。

(2) 各惑星ごとに面積速度 $(r^2\dot{\phi}/2)$ が一定である。

(3) 惑星の公転周期の 2 乗はその軌道の長半径の 3 乗に比例する。

これを**ケプラーの法則**といいます。これら観測結果を運動の法則および万有引力の法則で説明できることを示したのはニュートンで、ニュートン力学は地上のみならず、太陽系という大きなスケールにおいてもよく成り立っていることがわかったわけです。

(余談) 「リンゴは木から落ちるのに、月はなぜ地球に落ちてこないのか？ 月も落ちているのではないか？ しかし地球の丸みに沿って落ちているため空中に永遠にとどまっているのだ。そのような引力とはどのようなものか？」というような推察を経て、ニュートンは万有引力の法則を発見したといわれています。ニュートンは1687年「自然哲学の数学的諸原理」(通称「**プリンキピア**」)を書き上げ、力学の数学的体系を世に知らしめました。現在でも宇宙探査機の軌道計算はニュートン力学で行われ、それで十分な精度が得られます。

3.20 2体問題と換算質量

2つの質点、もしくは2つの十分小さな粒子から成る系があるとき、系の運動エネルギーは、

$$K = \frac{m_1}{2}\,|\dot{\boldsymbol{r}}_1|^2 + \frac{m_2}{2}\,|\dot{\boldsymbol{r}}_2|^2.$$

一方、外部から作用する力がなく、外部ポテンシャルが 0 の場合、系の重心は慣性系において等速度運動をします (静止を含む)。よって慣性系となる重心系が存在するはずで、そのような重心系を選べば、

$$m_1\boldsymbol{r}_1 + m_2\boldsymbol{r}_2 = \boldsymbol{0}$$

であり、また、2粒子の**相対位置**を、

$$\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}_1 - \boldsymbol{r}_2$$

で定義すれば、

$$\boldsymbol{r}_1 = \frac{m_2\boldsymbol{r}}{m_1 + m_2,} \qquad \boldsymbol{r}_2 = \frac{-m_1\boldsymbol{r}}{m_1 + m_2}$$

を得るので、系の運動エネルギーは、

$$K = \frac{m_*}{2}\,|\dot{\boldsymbol{r}}|^2, \qquad m_* = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}$$

と書けます。m_* を2粒子の**換算質量**といいます。特に $m_1 \ll m_2$ のときは $m_* \sim m_1$ となることに注意。すなわち2粒子の質量差が大きい場合、換算質量は小さい方の質量に近似されます。

[例題] 時刻 0 に距離 R で静止していた2粒子が、

$$U = -C/(2\,\text{粒子間の距離}), \quad C > 0$$

という逆2乗力のポテンシャルにより引き合うとき、2粒子間の距離 r と時刻 t の関係式を求めよ。ただし2粒子の換算質量を m_* とする。

[解] 重心系で考え、2粒子の相対位置を $\boldsymbol{r}$ とすると、エネルギー保存の法則から、

$$\frac{m_*}{2}\,|\dot{\boldsymbol{r}}|^2 - \frac{C}{|\boldsymbol{r}|} = -\frac{C}{R.}$$

ここで $\boldsymbol{r} = (r,\, 0,\, 0)$ とすれば、

$$\frac{m_*}{2}\left(\frac{dr}{dt}\right)^2 - \frac{C}{r} = -\frac{C}{R} \qquad \therefore\ t = \pm\sqrt{\frac{m_*}{2C}}\int dr\,\sqrt{\frac{r}{1-r/R}}$$

を得ますが、この積分は $r = R\cos^2\theta$ と置くことで実行できて、

$$t = \mp\sqrt{\frac{2m_*R^3}{C}}\int d\theta\ \cos^2\theta = \mp\sqrt{\frac{m_*R^3}{2C}}\,(\theta + \sin\theta\cos\theta) + F.$$

F は積分定数です。変数を元に戻し、$r = R \Leftrightarrow t = 0$ に注意すれば、

$$t = \mp\sqrt{\frac{m_*R^3}{2C}}\left(\arccos\sqrt{\frac{r}{R}} + \sqrt{\frac{r}{R}\left(1-\frac{r}{R}\right)}\right)$$

を得ます (図 3.14)。[解終]

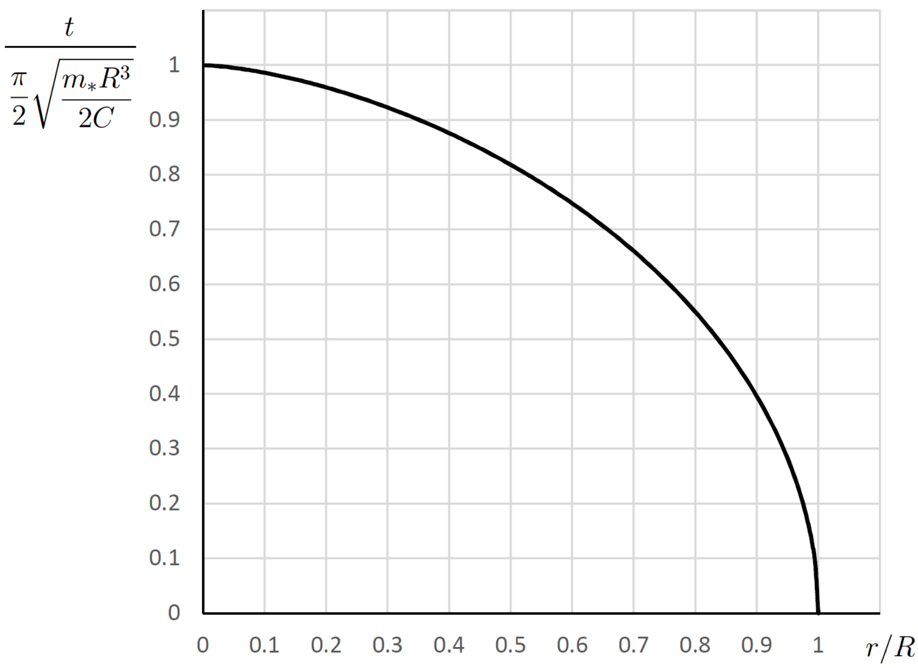

図 3.14: 逆 2 乗力で引き合う 2 粒子

このように相対位置と換算質量の導入といった工夫により系の運動が簡単に解けるのは、多体問題でも特に**2体問題**に限られます。実際、3 体以上の系の振る舞いは、場合によって非常に複雑になることが知られています。

索引