あもんノート

　ユークリッド幾何学、ニュートン力学から、相対論、宇宙論、量子論、場の量子論、素粒子論、そして超ひも理論まで、理論物理学を簡潔にかつ幅広く網羅したノートです。TOP へは下の URL をクリックして行けます。専用の画像掲示板で、ご意見、ご質問等も受け付けております。

http://amonphys.web.fc2.com/

目 次

第0章　光が質量を持つ模型

量子電磁気学 (QED) などの理論において光子の質量が厳密に 0 であるのは、その理論が $U(1)$ ゲージ対称性を持つためです。一方、素粒子標準模型においてこの $U(1)$ ゲージ対称性は、$U(1)_Y \times SU(2)$ ゲージ対称性が自発的に破れた残りの対称性 (residual symmetry) という位置づけであり、$U(1)$ が残るのはひとえにヒッグス場が $SU(2)$ 2 重項 (doublet) の 1 つしかないという仮定によるものです。例えば標準模型において、$SU(2)$ 2 重項のヒッグスに加えて 1 重項 (singlet) のヒッグスが存在すると仮定すると、$U(1)$ も破ることが可能で、その結果、光子が質量を持ち、またニュートリノが帯電することがわかります。ここではこの模型の性質と現実世界における可能性を説明します。最後に質量を持つベクトル場の量子論に関して簡単に触れます。

1 重項ヒッグスを含む模型は独自の研究によるものですが、素朴で簡単な模型なので、一部では知られている可能性が高いと思われます。同様なことを述べている文献がありましたら、すみませんがご紹介ください。

0.1　素粒子標準模型の復習

まず標準模型を復習しておきましょう。簡単のため、カラー $SU(3)$ ゲージ (グルーオン) およびクォークのセクターは無視することにします。

そうすると、$U(1)_Y$ のゲージ場を $B_\mu(x)$, また、$SU(2)$ のゲージ場を $A^a_\mu(x)$ とし、ゲージ場のラグランジアン密度は、

$$\mathcal{L}_{\text{gauge}} = -\frac{1}{4} f_{\mu\nu} f^{\mu\nu} - \frac{1}{4} F^a_{\mu\nu} F^{a\mu\nu}$$

です。ここで、

$$f_{\mu\nu} = \partial_\mu B_\nu - \partial_\nu B_\mu, \quad F^a_{\mu\nu} = \partial_\mu A^a_\nu - \partial_\nu A^a_\mu - g\epsilon_{abc} A^b_\mu A^c_\nu$$

は、それぞれのゲージ場の強さ (曲率) です。ϵ_{abc} は $SU(2)$ の構造定数で、3 次元レビ・チビタの記号です。

一方、$SU(2)$ 2 重項で超電荷 (hyper charge) $+1/2$ のスカラー場 $\Phi(x)$ があるとし、これをヒッグス場と呼びます。そのラグランジアン密度は、

$$\mathcal{L}_{\text{Higgs}} = (D^\mu \Phi)^\dagger D_\mu \Phi - U(\Phi^\dagger \Phi).$$

であり、$-U(\Phi^\dagger\Phi)$ はポテンシャル項です。また、超電荷が $+1/2$ なので、共変微分は、

$$D_\mu\Phi = \partial_\mu\Phi + ig'\,\frac{1}{2}\,B_\mu\Phi + ig\,\frac{\sigma^a}{2}A_\mu^a\Phi$$

で与えられます。g', g はそれぞれ $U(1)_Y$, $SU(2)$ の結合定数で、σ^a はパウリ行列です。

さらに、$SU(2)$ 2重項の左手型ディラック場 $l_L(x)$, および2つの $SU(2)$ 1重項の右手型ディラック場 $l_R^u(x)$, $l_R^d(x)$ があるとし、これらをレプトン場といいます。超電荷は順に、$-1/2,\ 0,\ -1$ です。そのラグランジアン密度は、

$$\mathcal{L}_{\rm lepton} = \bar{l}_L i\gamma\!\cdot\! Dl_L + \bar{l}_R^u i\gamma\!\cdot\! Dl_R^u + \bar{l}_R^d i\gamma\!\cdot\! Dl_R^d$$

であり $(\gamma\!\cdot\! D = \gamma^\mu D_\mu)$、共変微分は、

$$D_\mu l_L = \partial_\mu l_L + ig'\Big(-\frac{1}{2}\Big)B_\mu l_L + ig\,\frac{\sigma^a}{2}A_\mu^a l_L,$$
$$D_\mu l_R^u = \partial_\mu l_R^u, \quad D_\mu l_R^d = \partial_\mu l_R^d + ig'(-1)B_\mu l_R^d$$

で与えられます。また、ヒッグス場との結合 (coupling) として、

$$\mathcal{L}_{\rm l-Higgs} = -\bar{l}_L\tilde{\Phi}\lambda^u l_R^u - \bar{l}_L\Phi\lambda^d l_R^d + c.c.$$

があります。$\tilde{\Phi}(x) = \epsilon\Phi^*(x)$ は $SU(2)$ 空間における外積的共役で、ϵ は2次元レビ・チビタです。$c.c.$ は前の項の複素共役を意味し、これはラグランジアン密度が実数であるために必要です。また、λ^u, λ^d は結合定数で、これらは世代空間における 3×3 複素行列です。

以上のラグランジアン密度を全て加えた、

$$\mathcal{L}_{\rm GWS} = \mathcal{L}_{\rm gauge} + \mathcal{L}_{\rm Higgs} + \mathcal{L}_{\rm lepton} + \mathcal{L}_{\rm l-Higgs}$$

がクォークセクターを無視した標準模型のラグランジアン密度で、**グラショウ・ワインバーグ・サラム模型** (GWS) とも呼ばれます。この理論は $U(1)_Y\times SU(2)$ ゲージ対称性を持ちます。詳しくは素粒子論の章を参照してください。

0.2 1重項ヒッグスの導入

ここでは GWS に $SU(2)$ 1重項で超電荷 y のスカラー場 $S(x)$ を加えた理論を考えます。この場を**1重項ヒッグス場**と呼ぶことにします。そのラグランジアン密度は、

$$\mathcal{L}_S = (D^\mu S)^* D_\mu S - U_S(S^*S)$$

であり、$-U_S(S^*S)$ はポテンシャル項です。また、共変微分は、超電荷が y なので、

$$D_\mu S = \partial_\mu S + ig' y B_\mu S$$

となります。

2 重項ヒッグスとは異なり、この 1 重項ヒッグスはレプトンと結合できません。なぜならもしそのような結合があるなら、ローレンツ対称性、および $SU(2)$ ゲージ対称性の要請から、$S\,\bar{l}_L l_L$ や $S\,\bar{l}_R^{u(d)} l_R^{u(d)}$ のような形でしかあり得ませんが $^{(*)}$、一般にディラック場 $\psi(x)$ に対し、$\bar{\psi}_L\psi_L = \bar{\psi}_R\psi_R = 0$ だからです。

GWS の理念からすると、1 重項ヒッグス $S(x)$ の存在は極めて自然であることに注意してください。レプトンやクォークに $SU(2)$ 2 重項と 1 重項がそれぞれあるのに対し、ヒッグスだけが 2 重項だけというのは、どちらかといえば不自然であり、また一般的でありません。1 重項ヒッグスもあるのだが、しかしその存在は現在の宇宙では観測されにくいと考えた方が自然です。理論のラグランジアンは、全体で、

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_{\rm GWS} + \mathcal{L}_S = \mathcal{L}_{\rm gauge} + \mathcal{L}_{\rm Higgs} + \mathcal{L}_S + \mathcal{L}_{\rm lepton} + \mathcal{L}_{\rm l-Higgs}$$

となります。

(*注) 厳密には $S\,\bar{l}_R^{u(d)C} l_R^{u(d)} = S\,l_R^{u(d)T} i\gamma^2\gamma^0 l_R^{u(d)}$ という結合だけは上の対称性の要求を満たし、また y の値次第では $U(1)_Y$ ゲージ対称性も保持しますが、マヨラナ質量項と同様、このような結合は粒子数 (レプトン数) を破るので、ここでは考えないことにします。カイラリティ γ_5 やディラック場の右手型・左手型については量子電磁気学の章を参照してください。

0.3 対称性の破れと質量の獲得

現在の宇宙 (その真空 $|0>$) においては、2 重項ヒッグス場は、

$$\Phi(x) = \frac{v}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} + \phi(x), \quad <0|\phi(x)|0> = 0$$

と展開され、真空が $U(1)_Y \times SU(2)$ 対称性を破っています。v は観測から $\sim 246\mathrm{GeV}$ であり、このことから対称性が回復する温度は極めて高温で、くりこみ群によるおおざっぱな考察から $\sim 10^2\,\mathrm{GeV} \sim 10^{15}\,\mathrm{K}$ (1000 兆°C) と予想されています。

一方、1 重項ヒッグス場については、その存在が現在観測的に認められないため、$<0|S(x)|0> = 0$ であり、なおかつその量子が現在の高エネルギー加速器で発見できない程に大きな質量を持つものと考えられます。しかしもし “超低温領域” が大域的に実現されれば、1 重項ヒッグスの (くりこまれた) 質量が小さくなり、さらに低温では真空が相転移し、

$$S(x) = \frac{u}{\sqrt{2}} + s(x), \quad <0|s(x)|0> = 0$$

が実現される可能性があります。この超低温の相において何が起こるのかを考えてみましょう。

上の相において、2つのヒッグス場のラグランジアン密度は、それぞれ、

$$\mathcal{L}_{\text{Higgs}} = \frac{v^2}{8}\,(g'B - gA^3)^2 + (B_\mu, A^3_\mu \text{ を含まない項})$$

$$\mathcal{L}_S = \frac{(ug'y)^2}{2}\,B\cdot B + (B_\mu, A^3_\mu \text{ を含まない項})$$

と展開されるので、$B_\mu(x)$ と $A^3_\mu(x)$ が混合 (mixing, 場の 2 次の結合) しています。これを対角化するために、$Z_\mu(x)$, $A_\mu(x)$ を、

$$\begin{pmatrix} A^3_\mu(x) \\ B_\mu(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Z_\mu(x) \\ A_\mu(x) \end{pmatrix}$$

で定義します。θ は、通常、ワインバーグ角と呼ばれるものです。そうすると、

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{\text{Higgs}} = &\frac{v^2}{8}\,(g'\cos\theta - g\sin\theta)^2\,A\cdot A \\ &- \frac{v^2}{4}\,(g'\sin\theta + g\cos\theta)(g'\cos\theta - g\sin\theta)\,A\cdot Z \\ &+ \frac{v^2}{8}\,(g'\sin\theta + g\cos\theta)^2\,Z\cdot Z + (A_\mu, Z_\mu \text{ を含まない項}). \end{aligned}$$

および、

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_S = &\frac{(g'yu)^2}{2}\,\cos^2\theta\,A\cdot A \\ &- (g'yu)^2\sin\theta\cos\theta\,A\cdot Z \\ &+ \frac{(g'yu)^2}{2}\,\sin^2\theta\,Z\cdot Z + (A_\mu, Z_\mu \text{ を含まない項}) \end{aligned}$$

を得るので、非対角項 ($A\cdot Z$ を含む項) が消える条件は、

$$\frac{v^2}{4}\,(g'\tan\theta + g)(g' - g\tan\theta) + (g'yu)^2\tan\theta = 0$$

となり、これがワインバーグ角 θ の条件式になります。もし 1 重項ヒッグス場の真空期待値が 0 で、$u = 0$ なら、この式は $\tan\theta = g'/g$ を与え、これは通常の GWS のワインバーグ角です。しかし $u \neq 0$ においては、そうはならなくなります。

いま、少なくとも相転移直後 (臨界点近く) では $(u/v)^2 \ll 1$ が妥当と考えられるので、これを仮定し、また、

$$\tan\theta = \frac{g'}{g}\,(1 + 4\alpha)$$

とおきます。ただし α は $(u/v)^2$ と同程度の十分小さな摂動とし、これらの高次項は無視するものとします。そうすると、

$$\alpha = \frac{(g'yu/v)^2}{g'^2 + g^2}$$

を得るでしょう。これが通常のワインバーグ角からのずれを意味する、オーダーパラメータになります。この結果、ラグランジアン密度における $A{\cdot}A$ の項の係数は、やはり α と $(u/v)^2$ の高次項を無視し、

$$\frac{v^2}{8}\,(g'\cos\theta - g\sin\theta)^2 + \frac{(g'yu)^2}{2}\,\cos^2\theta = \frac{\alpha(gv)^2}{2}$$

となります。すなわち、4 元ポテンシャル $A_\mu(x)$ が質量項を持ち、よって光子が質量、

$$m_\gamma = \sqrt{\alpha}gv = \frac{g'gyu}{\sqrt{g'^2+g^2}}$$

を持つことになります。1 重項ヒッグスによる相転移で、$U(1)$ ゲージ対称性も破れ、光子が質量を獲得するというわけです。

0.4 新しい相における電磁カレント

レプトンのラグランジアン密度は、共変微分を展開すると、

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_{\text{lepton}} &= \bar{l}_L i\gamma{\cdot}\partial l_L + \bar{l}^u_R i\gamma{\cdot}\partial l^u_R + \bar{l}^d_R i\gamma{\cdot}\partial l^d_R \\ &\quad - \bar{l}_L\gamma^\mu\left(g'\Big(-\frac{1}{2}\Big)B_\mu + g\,\frac{\sigma^a}{2}A^a_\mu\right) l_L - \bar{l}^d_R\gamma^\mu\big(g'(-1)B_\mu\big)l^d_R\end{aligned}$$

となりますが、今の場合、

$$\begin{aligned}&g'YB_\mu = g'\cos\theta\,YA_\mu + (A_\mu\,\text{を含まない項}) \\ &g'YB_\mu + g\,\frac{\sigma^a}{2}A^a_\mu = g'\cos\theta\,\left(Y + \frac{\sigma^3}{2}(1+4\alpha)\right)A_\mu + (A_\mu\,\text{を含まない項})\end{aligned}$$

であることに注意して $^{(*)}$、

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_{\text{lepton}} = \bar{l}^u_L i\gamma{\cdot}\partial l^u_L + \bar{l}^d_L i\gamma{\cdot}\partial l^d_L + \bar{l}^u_R i\gamma{\cdot}\partial l^u_R + \bar{l}^d_R i\gamma{\cdot}\partial l^d_R \\ - g'\cos\theta\,A_\mu J^\mu + (A_\mu\,\text{を含まない項}).\end{aligned}$$

ここで、

$$J^\mu = 2\alpha\,\bar{l}^u_L\gamma^\mu l^u_L + (-1-2\alpha)\,\bar{l}^d_L\gamma^\mu l^d_L + (-1)\,\bar{l}^d_R\gamma^\mu l^d_R$$

は電磁カレントです。また、$SU(2)$ 2 重項のレプトン $l_L(x)$ の成分を、

$$l_L = \begin{pmatrix} l^u_L \\ l^d_L \end{pmatrix}$$

とおきました。さらに完全な $((2+2^*)$ 表現の$)$ ディラック場、$l^u(x), l^d(x)$ を、

$$l^{u(d)} = l^{u(d)}_L + l^{u(d)}_R, \quad l^{u(d)}_L = \frac{1-\gamma_5}{2}\,l^{u(d)}, \quad l^{u(d)}_R = \frac{1+\gamma_5}{2}\,l^{u(d)}$$

で構成すると、電磁カレントは、

$$J^\mu = \bar{l}^u(\alpha - \alpha\gamma_5)l^u + \bar{l}^d(-1 - \alpha + \alpha\gamma_5)l^d$$

と書けます。$l^u(x)$ はニュートリノ族の場を、$l^d(x)$ は電子族の場を意味することに注意。すなわち今考えている相においては、ニュートリノ族が電磁相互作用し、また、電子族についても軸性部分 (γ_5 を含む項) が存在し、QED のレベルでパリティが破れることがわかります。

(*注) $SU(2)$ 1 重項を $I_3 = 0$, $SU(2)$ 2 重項の上成分を $I_3 = +1/2$, 下成分を $I_3 = -1/2$ とし、アイソスピン (その第 3 成分) I_3 を定義することがあります。このとき GWS において電荷は、

$$Q = Y + I_3$$

で表され、これを**中野・西島・ゲルマンの法則**といいます。1 重項ヒッグスによる相転移は、この法則を $Q = Y + (1 + 4\alpha)I_3$ に変えます。

0.5 観測的可能性

このように、現在の宇宙とはまったく異なる相が超低温において実現される可能性があるというのは興味深いでしょう。現在における宇宙の輻射温度は 2.7 K で、大域的に実現された低温としては銅の電子系において $\sim 10^{-5}$ K といった記録があります。ここで述べた模型は、さらにもっと低温において、真空の相転移が起こり、光子が質量を獲得し、光の到達距離が有限になり、ニュートリノが帯電することがあり得ることを示唆しているわけです。

また、低温の実現でなくても、高エネルギー加速器により 1 重項ヒッグス粒子を発見することによっても、この理論の検証は可能です。検証のために、超低温と超高エネルギーという相対する二つのアプローチがあるというのも、なかなか面白いことです。

ちなみに 1 重項ヒッグスの超電荷 y が 0 の場合、新しい相においても、オーダーパラメータ α が恒等的に 0 になるため、何ら新しい現象は起こらないことになります。この場合、1 重項ヒッグス場が他のゲージ場や物質場と相互作用していない (decouple している) ため、重力以外においてこれを認識することはできないと考えられます。このような場の量子はコールドダークマター (CDM) の候補になり得るものです。

(余談) 特に相対論や宇宙論関連の啓蒙書など、素粒子論についての見解が浅い本においては、CDM や宇宙項 (真空のエネルギー密度 Λ) を、とってつけた仮定であるかのように紹介しがちです。しかしこれはむしろ逆で、例えばもし Λ-CDM を一切生じず、なおかつ観測事実をちゃんと説明できる素粒子の模型を作れといわれたら、それこそ不自然な仮定や、人為的なファインチューニングを必要とすることになるでしょう。Λ-CDM は、相対論的場の量子論において、極めて自然に現れるものなのです。

0.6 質量を持つベクトル場の量子論

質量を持つベクトル場のローレンツ共変な量子化は、質量がない場合と少し異なるので注意が必要です。

ベクトル場が質量を持った場合、ラグランジアン密度の自由部分は、

$$\mathcal{L}_{\rm mp} = -\frac{1}{4}\,F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + \frac{m^2}{2}\,A\cdot A - \frac{1}{2\xi}\,(\partial\cdot A)^2$$

となります。第2項が質量項で、第3項はゲージ固定項です。ξ はゲージパラメータで、特に $\xi=1$ はファインマンゲージと呼ばれます。ファインマンゲージをとると、上のラグランジアン密度は、

$$\mathcal{L}'_{\rm mp} = -\frac{1}{2}\,\partial_\mu A_\nu \partial^\mu A^\nu + \frac{m^2}{2}\,A\cdot A$$

と、時空の全微分項を除き等しくなります。時空の全微分項は作用に寄与しないので、これらラグランジアン密度は理論として等価です。

$\partial\mathcal{L}'_{\rm mp}/\partial\partial_\mu A_\nu = -\partial^\mu A^\nu,\ \ \partial\mathcal{L}'_{\rm mp}/\partial A_\nu = m^2 A^\nu$ より、場の方程式は、

$$(\Box + m^2)A^\nu(x) = 0.$$

また、A_ν の正準共役は $-\dot{A}^\nu$ ですから、正準交換関係は、

$$[A^\mu(x), \dot{A}^\nu(x')]_{t=t'} = -ig^{\mu\nu}\delta^3(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}')$$

です。場の方程式の一般解は、

$$A^\mu(x) = \int \frac{d^3\boldsymbol{k}}{(2\pi)^3 2k^0} \sum_{\lambda=0}^{3} \varepsilon^\mu_\lambda(\boldsymbol{k}) \left(a_\lambda(\boldsymbol{k})e^{-ik\cdot x} + a^*_\lambda(\boldsymbol{k})e^{ik\cdot x}\right), \qquad k^0 = \sqrt{|\boldsymbol{k}|^2 + m^2}$$

と表すことができます。ここで、

$$\varepsilon^\mu_0(\boldsymbol{k}) = \frac{k^\mu}{m,} \qquad \varepsilon^\mu_3(\boldsymbol{k}) = \left(\frac{|\boldsymbol{k}|}{m,}\ \ \frac{k^0\boldsymbol{k}}{m|\boldsymbol{k}|}\right), \qquad \varepsilon^\mu_{1,2}(\boldsymbol{k}) = (0,\,\boldsymbol{\varepsilon}_{1,2}(\boldsymbol{k}))$$

であり、$\boldsymbol{\varepsilon}_{1,2}(\boldsymbol{k})$ は $\boldsymbol{k}$ と直交する2つの単位ベクトルです。$\lambda=1,2$ は横波モード、$\lambda=3$ は縦波モード、$\lambda=0$ はスカラーモードと呼ばれます。零質量の場合と比べ、縦波モードとスカラーモードの定義が異なることに注意してください(量子電磁気学の章参照)。ここでは縦波モードは on-shell で $k\cdot\varepsilon_3(\boldsymbol{k})=0$ を満たすよう決められていて、スカラーモードはこれとミンコフスキー的に直交するものです。

$\varepsilon^\mu_\lambda(\boldsymbol{k})$ がローレンツ変換の変換係数になることに注意して、

$$g_{\mu\nu}\varepsilon^\mu_\lambda(\boldsymbol{k})\varepsilon^\nu_{\lambda'}(\boldsymbol{k}) = g_{\lambda\lambda'}, \quad g^{\lambda\lambda'}\varepsilon^\mu_\lambda(\boldsymbol{k})\varepsilon^\nu_{\lambda'}(\boldsymbol{k}) = g^{\mu\nu}$$

が成り立ちます。これに注意すると、正準交換関係は、

$$[a_\lambda(\boldsymbol{k}),\, a^*_{\lambda'}(\boldsymbol{k}')] = -(2\pi)^3 2k^0 g_{\lambda\lambda'}\delta^3(\boldsymbol{k}-\boldsymbol{k}') \quad (\text{他は可換})$$

において満たされることが確かめられるでしょう。

零質量の場合、物理的粒子空間は横波モードだけから成る状態空間でしたが、今度の場合は縦波モードも許されることが、例えば BRS 処方により確かめられます。すなわちベクトル場が質量を持つ場合、非物理的モードはスカラーモードだけであり、場の量子の内部自由度は 3 になります。質量を持つだけで自由度が 2 から 3 に変わるというのは少し不思議な感じがしますが、これにはちょっとしたトリックがあります。

実のところ質量を持つベクトル場の量子論は、多くの場合、くりこみ不可能であったり、ユニタリティを持たないなどの矛盾を持つことがわかっていて、無矛盾になり得るのは対称性が自発的に破れゲージ場としてのベクトル場が質量を獲得した場合に限られる、ということが判明しています。言い換えると、質量を持つベクトル場について、くりこみが可能になること、ユニタリティが破れないなどの条件を課してゆくと、それは潜在的にゲージ対称性を持つモデルに行き着いてしまうわけです。

このため質量を持つベクトル場のモデルには、それが無矛盾である限り、必ずヒッグス場のようなスカラー場が付随しています。ベクトル場の量子の内部自由度が 2 から 3 に増えた代わりに、実はスカラー場の量子のどれかのモードが非物理的になり減っているのです。この現象は**ヒッグス機構**と呼ばれ、

> 対称性が自発的に破れることで、ヒッグス粒子の一部はゲージ場に喰われてお化け (非物理的) になり、喰ったゲージ場は重くなる (質量を持つ)

などと表現されます。

例えば GWS では、2 重項ヒッグスの自由度は複素スカラー場 2 つで 4 ですが、$U(1)_Y \times SU(2)$ ゲージ対称性が破れるとウィークボゾン 3 つ $(W^\pm, Z)$ が重くなるので、ヒッグスの内部自由度は $4-3=1$ になります。この 1 がヒッグス粒子に相当します。また、さらに 1 重項ヒッグスがある場合、その自由度は複素スカラー場 1 つで 2. もし $U(1)$ ゲージ対称性が破れれば光子を重くしますから、1 重項ヒッグスの内部自由度は 1 になります。

0.7 U(1) ヒッグス模型

上の事柄を具体的に見るために、簡単なゲージ理論、

$$\mathcal{L}_{U(1)\mathrm{H}} = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + (D^\mu S)^* D_\mu S - U_S(S^*S), \quad D_\mu S = \partial_\mu S + iqA_\mu S$$

を考えましょう。これを**U(1) ヒッグス模型**といいます。

　複素スカラー場 $S(x)$ は、その真空期待値が $v/\sqrt{2}$ のとき、

$$S(x)=\frac{v+w(x)+i\chi(x)}{\sqrt{2}}$$

と展開されます。ここで $w(x)$, $\chi(x)$ は実数の場です。このとき、

$$(D^\mu S)^* D_\mu S=\frac{1}{2}\,(\partial w)^2+\frac{1}{2}\,(\partial\chi+qvA)^2+(\text{場の 3 次以上})$$

と計算され、また、

$$-U_S(S^*S)=-\frac{\mu^2}{2}\,w^2+(\text{定数と場の 3 次以上})\qquad(\,\mu\text{ は実数})$$

ですから、

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_{U(1)\mathrm{H}}=&-\frac{1}{4}\,F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}+\frac{(qv)^2}{2}A\cdot A+\frac{1}{2}\,(\partial\chi)^2+qv\partial\chi\cdot A\\&+\frac{1}{2}\,(\partial w)^2-\frac{\mu^2}{2}\,w^2+(\text{定数と場の 3 次以上})\end{aligned}$$

です。混合項 $qv\partial\chi\cdot A$ が生じることに注意。この混合を消すために、ゲージ固定項を、

$$\mathcal{L}_{GF}=-\frac{1}{2\xi}\,(\partial\cdot A+qv\xi\chi)^2$$

と設定します (ト・ホーフト 1971)。そうすると、ラグランジアン密度は全体で、

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_{U(1)\mathrm{H}}+\mathcal{L}_{GF}=&-\frac{1}{4}\,F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}+\frac{(qv)^2}{2}A\cdot A-\frac{1}{2\xi}\,(\partial\cdot A)^2\\&+\frac{1}{2}\,(\partial\chi)^2-\frac{\xi(qv)^2}{2}\,\chi^2+\frac{1}{2}\,(\partial w)^2-\frac{\mu^2}{2}\,w^2\\&+(\text{定数と場の 3 次以上})\end{aligned}$$

となりますが、ファインマンゲージ $\xi=1$ で、実スカラー場 $\chi(x)$ はゲージ場と同じ質量を持ち、その量子がゲージ場のスカラーモードと共に非物理的モードになるわけです。もう 1 つの実スカラー場 $w(x)$ は物理的で、その量子は観測されることになります。

索 引

あ

か

さ

な

は

や