あもんノート

　ユークリッド幾何学、ニュートン力学から、相対論、宇宙論、量子論、場の量子論、素粒子論、そして超ひも理論まで、理論物理学を簡潔にかつ幅広く網羅したノートです。TOP へは下の URL をクリックして行けます。専用の画像掲示板で、ご意見、ご質問等も受け付けております。

http://amonphys.web.fc2.com/

目 次

第26章　カルツァ・クライン理論

一般相対論において時空を5次元と仮定すると、電磁場が重力場の一部として自然に現れることがわかり、カルツァ・クライン理論と呼ばれます。これは重力と電磁力の古典統一場理論と考えられます。ここではカルツァ・クライン理論をあるわかりやすい形式において紹介します。この理論からは物質粒子を含め、完全な形の一般相対論が導かれます。

26.1　重力と電磁力の統一

時空を4次元のリーマン空間とする通常の一般相対論においては、重力場が時空の幾何学構造であるのに対し、電磁場は時空上のテンソル場にすぎません。すなわち電磁場には明確な存在理由がありません。このことは力の場が重力場と電磁場しか知られていなかった当時、不満なことでした。電磁場に幾何学的意味を与える研究はアインシュタインが一般相対論を提示した直後から行われています。

例えばワイルは、通常のリーマン空間を拡張し、“長さ” に不定性を与えることで、電磁場の4元ポテンシャルを時空の接続構造の一種とみなせることを示しました (1918年)。ワイルのこの理論は**ゲージ理論** (ものさし理論) と呼ばれ、この名前は後の場の量子論においてやや拡張された意味で用いられることになります。ワイルの理論自体はさほど魅力がなく、廃れてしまったのですが、名前だけは後世に残ったという珍しい事例です。

一方、カルツァは、時空が4次元ではなく、実は5次元であると考えることで、電磁場が重力場の一部として自然に現れることを発見しました (1921年)。電磁場は5番目の方向の重力場とみなせるというわけです。しかし我々の空間は3次元であり、時間と合わせて時空は4次元です。5番目の方向など見当たりません。クラインは、「5番目の方向は小さく丸まっているので我々には認識できない」という**コンパクト化**の考えを打ちだし、カルツァの理論に肉付けを行います (1926年)。このためこの5次元時空の理論は**カルツァ・クライン理論**という名で広く知られることになりました。

例えば、細長いチューブを考えると、これは2次元状の物体 (曲面) ですが、もしチューブの半径が非常に小さければ、これは1次元のひものように見えることになるでしょう。時空の5番目の方向は細長いチューブの周回方向に相当し、ほ

とんど認識できないと考えられるわけです。あるいは次元を1つ上げるなら、薄い板を考え、ただし板の上面と下面が実は同じ面であると考えます。板の内部は3次元空間ですが、板が非常に薄ければ、これはほとんど2次元の空間として認識されます。前者は $\mathbf{R}^1 \times S^1$、後者は $\mathbf{R}^2 \times S^1$ と大域的に同相です。

(余談) アインシュタインはこのような幾何学的な統一場理論をすこぶる気に入り、晩年の研究テーマとします。しかしその研究はあくまで古典論であったため、多くの科学者から骨董品扱いされました。一方で多次元時空のアイディア自体は、後に量子重力理論である超重力理論や超ひも理論において重宝されることになります。

26.2 束縛型カルツァ・クライン理論

5次元時空の座標を x^A とします。ここで $A \in \{0,1,2,3,5\}$ で、x^5 が5番目の座標です。以下、大文字のラテン文字の添字 $A, B, \cdots$ 等は $0,1,2,3,5$ を走るものとし、ギリシャ文字 $\mu, \nu, \cdots$ 等は $0,1,2,3$ を走るものとします。

n 番目の粒子の座標を x_n^A, 質量を m_n, 微小固有時間を $d\tau_n = \sqrt{g_{AB}(x_n)dx_n^A dx_n^B}$ と書きます。$g_{AB}(x)$ は5次元時空の計量です。カルツァ・クライン理論の作用は、

$$S_g = -\sum_n m_n \int d\tau_n - \frac{1}{2\kappa\alpha}\int d^5x \sqrt{\ } R$$

であり、ここで $\sqrt{\ } = \sqrt{\det g}$ で、R は5次元時空 (リーマン空間) のスカラー曲率です。また、$\kappa = 8\pi G$ で、G は万有引力定数、α は長さの次元を持つ定数で、5番目の方向のスケールを意味します。$(2\kappa\alpha)^{-1}$ はひっくるめて質量次元 3 の定数であることに注意してください。このため作用 S_g の質量次元は、普通そうであるように、0 になります。

さらにここではカルツァ・クライン理論を特に簡単な形で具現化するため、

$$S_\phi = -\frac{1}{2\kappa\alpha}\int d^5x \sqrt{\ }(g_{55}+1)\phi$$

という作用を S_g に加えた理論を考えます。$\phi(x)$ は運動項を持たない補助場です。S_ϕ は5次元一般座標不変性をあらわに破るもので、5番目の方向の特殊性を理論に付加するものです。作用が、

$$S = S_g + S_\phi$$

で与えられる5次元時空の理論を、ここでは**束縛型カルツァ・クライン理論**と呼ぶことにします。この理論が電磁場を含む通常の一般相対論と等価であることを、これから見ていくことします。

(余談) S_ϕ の追加は私が独自に考案したものです。通常、カルツァ・クライン理論は物質粒子について満足な形式ではないのですが、私は物質粒子を含め無矛盾で簡単な形式を発見したので、ここではそれを紹介することにします。

26.3 5次元アインシュタイン方程式

作用 S_g, S_ϕ をそれぞれ補助場 $\phi(x)$ で汎関数微分すると、

$$\frac{\delta S_g}{\delta\phi} = 0, \quad \frac{\delta S_\phi}{\delta\phi} = -\frac{1}{2\kappa\alpha}\sqrt{}(1 + g_{55})$$

なので、場の方程式として、

$$g_{55} = -1$$

を得ます。

一方、$g_{AB}(x)$ による汎関数微分は、それぞれ、

$$\begin{aligned}\frac{\delta S_g}{\delta g_{AB}} &= -\frac{1}{2}\sum_n m_n \int dx_n^A u_n^B \delta^5(x-x_n) + \frac{1}{2\kappa\alpha}\sqrt{}\left(R^{AB} - \frac{1}{2}g^{AB}R\right),\\ \frac{\delta S_\phi}{\delta g_{AB}} &= -\frac{1}{2\kappa\alpha}\sqrt{}\left(\frac{1}{2}g^{AB}(g_{55}+1)\phi + \delta_5^A\delta_5^B\phi\right)\end{aligned}$$

となります。$u_n^A = dx_n^A/d\tau_n$ は粒子の5元固有速度です。よって場の方程式は、$g_{55} = -1$ に注意して、

$$R^{AB} - \frac{1}{2}g^{AB}R = \kappa T^{AB} + \delta_5^A\delta_5^B\phi$$

となります。これを**5次元アインシュタイン方程式**と呼ぶことにします。ここで、

$$T^{AB} = \alpha\sqrt{}^{-1}\sum_n m_n \int dx_n^A u_n^B \delta^5(x-x_n)$$

は粒子の5次元エネルギー運動量テンソルです。α は5番目の方向のスケールなので、これは巨視的に、

$$T^{AB} = \sqrt{}^{-1}\sum_n m_n \int dx_n^A u_n^B \delta^4(x-x_n)$$

と表されることになります。

26.4 円柱条件とリッチテンソルの計算

5次元のリッチテンソル R_{AB} の計算を行いましょう。

場の方程式として $g_{55} = -1$ が成り立つことに注意し、5次元時空の計量を、

$$g_{\mu\nu} = \bar{g}_{\mu\nu} - a_\mu a_\nu, \quad g_{\mu 5} = g_{5\mu} = a_\mu, \quad g_{55} = -1$$

のように表します。$\bar{g}_{\mu\nu}$ は4次元のテンソルです。このとき逆行列である上付き計量は、

$$g^{\mu\nu}=\bar{g}^{\mu\nu},\quad g^{\mu5}=g^{5\mu}=a^{\mu},\quad g^{55}=-1+(a)^2$$

となります。ここで $\bar{g}^{\mu\nu}$ は $\bar{g}_{\mu\nu}$ の逆行列で、4次元のベクトル a_μ は $\bar{g}_{\mu\nu}$, $\bar{g}^{\mu\nu}$ により添字を上げ下げされるものとします。また、$(a)^2=a_\mu a^\mu$ です。

ここで座標条件として、

$$\partial_5 g_{AB}=0$$

を仮定しましょう。これは広く**円柱条件**と呼ばれるものです。

そうすると、接続係数：$\Gamma_{CAB}=\frac{1}{2}\left(-\partial_C g_{AB}+\partial_B g_{CA}+\partial_A g_{BC}\right)$ は、

$$\begin{aligned}
\Gamma_{\lambda\mu\nu}&=\bar{\Gamma}_{\lambda\mu\nu}+\frac{1}{2}\,a_\mu f_{\lambda\nu}+\frac{1}{2}\,a_\nu f_{\lambda\mu}-\frac{1}{2}\,a_\lambda h_{\mu\nu},\\
\Gamma_{5\mu\nu}&=\frac{1}{2}\,h_{\mu\nu},\quad \Gamma_{\lambda\mu5}=\Gamma_{\lambda5\mu}=\frac{1}{2}\,f_{\mu\lambda}\quad (\text{他の成分は}\,0\,).
\end{aligned}$$

ここで $\bar{\Gamma}_{\lambda\mu\nu}$ は4次元の接続係数で、また、

$$f_{\mu\nu}=\partial_\mu a_\nu-\partial_\nu a_\mu,\quad h_{\mu\nu}=\partial_\mu a_\nu+\partial_\nu a_\mu$$

です。最初の添字を上げ、$\Gamma^A{}_{BC}=g^{AD}\Gamma_{DBC}$ を作ると、

$$\begin{aligned}
\Gamma^\lambda{}_{\mu\nu}&=\bar{\Gamma}^\lambda{}_{\mu\nu}+\frac{1}{2}\,a_\mu f^\lambda{}_\nu+\frac{1}{2}\,a_\nu f^\lambda{}_\mu,\\
\Gamma^5{}_{\mu\nu}&=a_\lambda\bar{\Gamma}^\lambda{}_{\mu\nu}+\frac{1}{2}\,a_\mu a^\lambda f_{\lambda\nu}+\frac{1}{2}\,a_\nu a^\lambda f_{\lambda\mu}-\frac{1}{2}\,h_{\mu\nu},\\
\Gamma^\lambda{}_{\mu5}&=\Gamma^\lambda{}_{5\mu}=\frac{1}{2}\,f_\mu{}^\lambda,\quad \Gamma^5{}_{\mu5}=\Gamma^5{}_{5\mu}=\frac{1}{2}\,a^\lambda f_{\mu\lambda}\quad (\text{他の成分は}\,0\,).
\end{aligned}$$

また、$\Gamma_A=\Gamma^B{}_{BA}$ に対し、

$$\Gamma_\mu=\bar{\Gamma}_\mu,\quad \Gamma_5=0$$

を得ます。ここで $\bar{\Gamma}_\mu=\bar{\Gamma}^\nu{}_{\nu\mu}$ です。

リッチテンソル：$R_{AB}=\partial_C\Gamma^C{}_{AB}-\partial_B\Gamma_A+\Gamma_C\Gamma^C{}_{AB}-\Gamma^C{}_{DA}\Gamma^D{}_{CB}$ を計算するのは少々大変ですが、結果は、

$$\begin{aligned}
R_{\mu\nu}&=\bar{R}_{\mu\nu}+\frac{1}{2}\left(a_\mu\nabla_\lambda f^\lambda{}_\nu+a_\nu\nabla_\lambda f^\lambda{}_\mu\right)-\frac{1}{2}\,f_{\mu\lambda}f^\lambda{}_\nu+\frac{1}{4}\,a_\mu a_\nu(f)^2,\\
R_{\mu5}&=R_{5\mu}=-\frac{1}{2}\,\nabla_\lambda f^\lambda{}_\mu-\frac{1}{4}\,a_\mu(f)^2,\quad R_{55}=\frac{1}{4}\,(f)^2
\end{aligned}$$

となります。$\bar{R}_{\mu\nu}$ は4次元のリッチテンソルで、∇_μ は4次元の共変微分です。また、$(f)^2 = f_{\mu\nu}f^{\mu\nu}$. 添字を上げれば、

$$R^\mu_\nu = \bar{R}^\mu_\nu + \frac{1}{2}\,a_\nu \nabla_\lambda f^{\lambda\mu} - \frac{1}{2}\,f^\mu{}_\lambda f^\lambda{}_\nu,$$

$$R^\mu_5 = -\frac{1}{2}\,\nabla_\lambda f^{\lambda\mu}, \quad R^5_5 = -\frac{1}{2}\,a_\mu \nabla_\nu f^{\nu\mu} - \frac{1}{4}\,(f)^2$$

となり、よってスカラー曲率：$R = R^A_A$ は、

$$R = \bar{R} + \frac{1}{4}\,(f)^2$$

となります。$\bar{R}$ は4次元のスカラー曲率です。

さらに、

$$\det g = -\det \bar{g}$$

が次のように証明されます。

[証明] 4次元一般座標変換により任意の時空点で $\bar{g}_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu}$, $a_1 = a_2 = a_3 = 0$ とすることができますが($\eta_{\mu\nu}$ はローレンツ計量)、このときその点において $\det g = 1$, $\det \bar{g} = -1$ となることが簡単に確かめられます。一方、4次元一般座標変換に関して、

$$\det g' = \left(\det \frac{\partial x}{\partial x'}\right)^2 \det g, \quad \det \bar{g}' = \left(\det \frac{\partial x}{\partial x'}\right)^2 \det \bar{g}$$

なので、$\det g / \det \bar{g}$ は4次元一般座標変換に関して不変です。これらから恒等的に $\det g / \det \bar{g} = -1$ であることがわかります。[証明終]

これにより特に $\surd = \sqrt{-\det \bar{g}}$ です。

26.5 一般相対論の演繹

5次元アインシュタイン方程式：

$$R^{AB} - \frac{1}{2}\,g^{AB}R = \kappa T^{AB} + \delta^A_5 \delta^B_5 \phi$$

は $5(5+1)/2 = 15$ 個の独立な場の方程式を意味します。その $(A, B) = (\mu, \nu)$ 成分は、

$$R^{\mu\nu} = g^{\nu A} R^\mu_A = g^{\nu\lambda} R^\mu_\lambda + g^{\nu 5} R^\mu_5 = \bar{R}^{\mu\nu} - \frac{1}{2}\,f^\mu{}_\lambda f^{\lambda\nu}$$

に注意して、

$$\bar{R}^{\mu\nu} - \frac{1}{2}\,\bar{g}^{\mu\nu}\bar{R} = \kappa T^{\mu\nu} + \frac{1}{2}\left(f^\mu{}_\lambda f^{\lambda\nu} + \frac{1}{4}\,\bar{g}^{\mu\nu}(f)^2\right)$$

を与えます。これは、

$$a_\mu = \sqrt{2\kappa} A_\mu, \quad F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu = \frac{1}{\sqrt{2\kappa}}\, f_{\mu\nu}$$

とおくことで、

$$\bar{R}^{\mu\nu} - \frac{1}{2}\,\bar{g}^{\mu\nu}\bar{R} = \kappa T^{\mu\nu} + \kappa\left(F^\mu{}_\lambda F^{\lambda\nu} + \frac{1}{4}\,\bar{g}^{\mu\nu}(F)^2\right)$$

となり、A_μ を4元ポテンシャル、$F_{\mu\nu}$ を電磁場と考えた場合、これはよく知られた4次元のアインシュタイン方程式になっています。

次に、5次元アインシュタイン方程式で添字を下げた式 :

$$R^A_B - \frac{1}{2}\,\delta^A_B R = \kappa T^A_B + \delta^A_5 g_{B5}\,\phi$$

を考え、これの $(A,B)=(\mu,5)$ 成分を取り出すと、

$$\nabla_\lambda f^{\lambda\mu} = -2\kappa T^\mu_5 \quad \therefore\ \nabla_\lambda F^{\lambda\mu} = -\sqrt{2\kappa}\,T^\mu_5.$$

これは、

$$j^\mu = -\sqrt{2\kappa}\,T^\mu_5 = -\sqrt{2\kappa}\sqrt{\ }^{-1}\sum_n m_n \int dx^\mu_n u_{n5}\,\delta^4(x-x_n)$$

を4元電流密度と考えることで、4次元のマックスウェル方程式 :

$$\nabla_\lambda F^{\lambda\mu} = j^\mu$$

になります。円柱条件により計量 $g_{AB}(x)$ が x^5 に依存せず、すなわち x^5_n は循環座標なので、u_{n5} が運動の定数になることに注意してください$^{(*)}$。よって j^μ の式から、n 番目の粒子の電荷は、

$$q_n = -\sqrt{2\kappa}\,m_n u_{n5}$$

で与えられることになります。m_n は荷電粒子の “裸の質量” を意味するので、$m_n \sim -\infty$. また、電荷 q_n は有限値なので、u_{n5} はほとんど 0 でなければいけません :

$$u_{n5} \sim 0.$$

一方、$R^A_B - \dfrac{1}{2}\,\delta^A_B R = \kappa T^A_B + \delta^A_5 g_{B5}\,\phi$ の $(A,B)=(5,5)$ 成分は、

$$\phi = \frac{1}{2}\,\bar{R} + \frac{3}{8}\,(f)^2 + \kappa\left(T^5_5 - a_\mu T^\mu_5\right)$$

という補助場 $\phi(x)$ に関する方程式を与えます。特に粒子が存在しない時空点においては、アインシュタイン方程式から $\bar{R}=0$ となるので、$\phi=(3/8)(f)^2$ で

す。よってもし補助場を導入していなければ、粒子が存在しない時空点において $(F)^2=0$ となってしまい、これは一般相対論にはない命題です。言い換えると、もし補助場を導入しないとするなら、$g_{55}=-1$ かつ $\partial_5 g_{AB}=0$ となるような簡単な5次元計量からは一般相対論は演繹されないということです。このためここでは補助場を導入したわけです。

自由度15の5次元アインシュタイン方程式は、自由度10のアインシュタイン方程式、自由度4のマックスウェル方程式、自由度1の補助場に関する方程式を与え、これで勘定が合っていることに注意してください。

(*注) 作用から n 番目の粒子のラグランジアンは $L_n=-m_n\sqrt{g_{AB}(x_n)\dot{x}_n^A\dot{x}_n^B}$. ここでドットは世界線のパラメータによる微分を意味します。よって、

$$\frac{\partial L_n}{\partial \dot{x}_n^A}=-m_n\frac{g_{AB}\dot{x}_n^B}{\sqrt{g_{CD}\dot{x}_n^C\dot{x}_n^D}}=-m_n u_{nA}$$

ですが、円柱条件から $\partial L_n/\partial x_n^5=0$ なので、ラグランジュ方程式から u_{n5} は保存量であることがわかります。

26.6 粒子の運動方程式と固有時間

束縛型カルツァ・クライン理論における粒子の方程式は、

$$\frac{du_n^C}{d\tau_n}+\Gamma^C{}_{AB}u_n^A u_n^B=0$$

となるはずです。特に $C=\lambda$ の成分は、すでに計算した接続係数の式を使い、

$$\frac{du_n^\lambda}{d\tau_n}+\bar{\Gamma}^\lambda{}_{\mu\nu}u_n^\mu u_n^\nu+a_\mu f^\lambda{}_\nu u_n^\mu u_n^\nu+f_\mu{}^\lambda u_n^\mu u_n^5=0$$

を与えますが、ここで、

$$\begin{aligned} u_{n5}&=g_{5A}u_n^A=g_{5\mu}u_n^\mu+g_{55}u_n^5\\ &=a_\mu u_n^\mu-u_n^5 \end{aligned}$$

に注意すると、

$$\frac{du_n^\lambda}{d\tau_n}+\bar{\Gamma}^\lambda{}_{\mu\nu}u_n^\mu u_n^\nu=-u_{n5}f^\lambda{}_\mu u_n^\mu.$$

さらに $f^\lambda{}_\mu=\sqrt{2\kappa}\,F^\lambda{}_\mu,\ q_n=-\sqrt{2\kappa}\,m_n u_{n5}$ に注意すると、

$$\frac{du_n^\lambda}{d\tau_n}+\bar{\Gamma}^\lambda{}_{\mu\nu}u_n^\mu u_n^\nu=\frac{q_n}{m_n}F^\lambda{}_\mu u_n^\mu$$

となります。これは一般相対論における粒子の運動方程式に他なりません。

一方、固有速度に関する恒等式： $g_{AB}u_n^A u_n^B = 1$ は、

$$\bar{g}_{\mu\nu}u_n^\mu u_n^\nu - (a_\mu u_n^\mu - u_n^5)^2 = 1$$

を与えるでしょうが、$a_\mu u_n^\mu - u_n^5 = u_{n5} \sim 0$ に注意して、

$$\bar{g}_{\mu\nu}u_n^\mu u_n^\nu \sim 1 \quad \therefore\ d\tau_n^2 \sim \bar{g}_{\mu\nu}dx_n^\mu dx_n^\nu$$

となります。すなわち $\bar{g}_{\mu\nu}$ はまさに4次元の計量を意味しているわけです。

以上、5次元時空を基礎とする単純な束縛型カルツァ・クライン理論から、粒子と電磁場を含んだ4次元の一般相対論が導かれることを見ました。束縛型カルツァ・クライン理論は古典論にすぎませんが、これは低次元のあまり単純でないモデルが、高次元のより単純なモデルから導かれる例であり、**多次元統一場理論**の簡単で教育的な例と考えられます。

26.7 ライスナー解と荷電粒子の世界線

物質粒子がない場合、アインシュタイン方程式、およびマックスウェル方程式の球対称で静的な解は、4次元時空の座標を、

$$x^0 = t, \quad x^1 = r, \quad x^2 = \theta, \quad x^3 = \phi$$

として、

$$\begin{aligned}
\bar{g}_{00} &= -\bar{g}_{11}^{-1} = 1 - \frac{2GM}{r} + \frac{Gq^2}{4\pi r^2,} \\
\bar{g}_{22} &= -r^2, \quad \bar{g}_{33} = -r^2\sin\theta \quad (\text{非対角成分は}\,0\,), \\
A_0 &= \frac{q}{4\pi r,} \quad A_1 = A_2 = A_3 = 0
\end{aligned}$$

であり、**ライスナー解**、あるいはライスナー・ノルドシュトロム解という名で知られています。これは有効質量 M, 電荷 q の静止した荷電物体の周りの時空と考えられ、$q = 0$ でシュヴァルツシルト解になります。

$\bar{g}_{00}$ は動径座標 r の関数で、

$$r = r_0 := \frac{q^2}{4\pi M}$$

において、最小値、

$$\bar{g}_{00}\,|_{r=r_0} = 1 - \frac{4\pi GM^2}{q^2}$$

を与えることがわかるでしょう。よって有効質量 M が大きく、$4\pi GM^2 > q^2$ を満たす場合、中心の特異点は事象の地平面に覆われ、ブラックホールを成します。しかしそうでない場合、事象の地平面が存在せず、中心の特異点が露出したものになります。例えば電子においては、

$$r_0 \sim 2.8\,\mathrm{fm}, \quad \bar{g}_{00}\big|_{r=r_0} \sim 1 - 2.4 \times 10^{-43} > 0$$

です。このような有効質量が非常に小さな荷電粒子 (素粒子) においては、$\bar{g}_{00}$ は $r \geq r_0$ においてほぼ 1 で、中心は露出した特異点になります。

いま、スカラー引力の導入などにより中心の特異性が正則化されているものとし、これを5次元時空において考えると、荷電粒子の5番目の方向の座標速度は、$u^5 \sim a_\mu u^\mu = a_0 u^0$ に注意して、

$$v^5 = \frac{u^5}{u^0} \sim \lim_{r\to 0} a_0 = \sqrt{16\pi G}\,\lim_{r\to 0} A_0 \sim \begin{cases} +\infty & (q>0) \\ -\infty & (q<0) \end{cases}$$

となります。よって、5次元時空における荷電粒子の世界線は、ほとんど5番目の方向を向き、何度も周回するため、5番目の方向に広がった2次元の面のようになります (図26.1)。

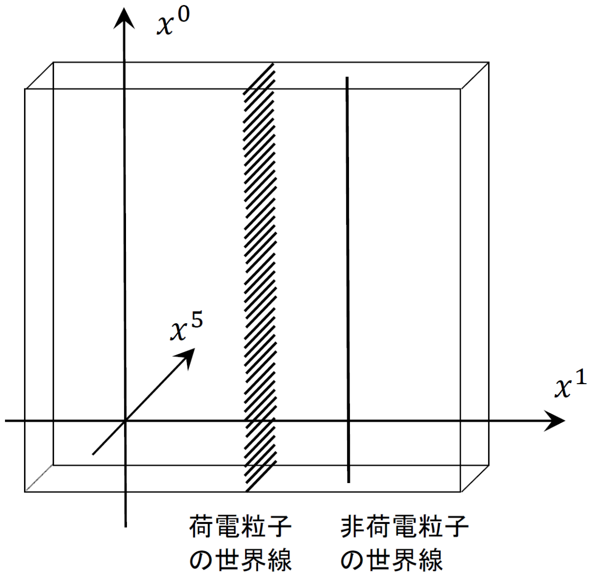

図 26.1: 荷電粒子の世界線

一方、固有速度については、

$$u^5 \sim \lim_{r\to 0} a_0 u^0 = \lim_{r\to 0} \frac{\sqrt{16\pi G}\,A_0}{\sqrt{\bar{g}_{00}}} \sim \begin{cases} +2 & (q>0) \\ -2 & (q<0) \end{cases}$$

となることが確かめられるでしょう。束縛型カルツァ・クライン理論が採用している計量においては、荷電粒子の有効質量や電荷に依らずに、$|u^5| \sim 2$ と定まってしまうわけです。

このような多次元時空における荷電粒子の描像は、量子論を無視したものであるため、何ら予言能力がなく、物理としてはほとんど意味がありません。しかし古典論の数理として知っておくべきでしょう。例えば多次元時空におけるある量子論があったときに、「古典論でどうなるかはまったくわからないが、量子論では確かにこうなる」といったような理解では、片手落ちと考えられるからです。

索 引