

あもんノート

ユークリッド幾何学、ニュートン力学から、相対論、宇宙論、量子論、場の量子論、素粒子論、そして超ひも理論まで、理論物理学を簡潔にかつ幅広く網羅したノートです。TOP へは下の URL をクリックして行けます。専用の画像掲示板で、ご意見、ご質問等も受け付けております。

<http://amonphys.web.fc2.com/>

目次

第 13 章	連続群論入門	3
13.1	リー群	3
13.2	リー代数と構造定数	4
13.3	直交群と回転群	5
13.4	$SO(2)$	6
13.5	$SO(3)$ とパウリ行列	6
13.6	随伴表現	8
13.7	ユニタリ群と特殊ユニタリ群	9
13.8	$SU(3)$ とゲルマン行列	10

第13章 連続群論入門

場の量子論に進むにあたって当面必要となる連続群についてここに手短かにまとめておきます。無限小量という物理で特になじみのある概念を用いて端的に記述します。特に量子物理で重要となる $SO(3)$ の表現論、および $SU(n)$ について詳しく触れます。

13.1 リー群

群 G があって、その元が局所的に実数の組で特徴づけられるとき、すなわち G が多様体を成すとき、 G をリー群、あるいは連続群といいます。実数パラメーターの個数(多様体の次元)をそのリー群の次元といいます。

例えば、行列式が0でない n 次複素正方行列の全体は、行列の積演算のもとで群を成し、また、局所的に実数パラメーターで記述できるのでリー群です。これは $GL(n, \mathbb{C})$ と書かれ、 n 次複素一般線形群と呼ばれます。また、行列式が1の n 次複素正方行列の全体もリー群を成し、こちらは $SL(n, \mathbb{C})$ と書かれ、 n 次複素特殊線形群と呼ばれます。明らかに $SL(n, \mathbb{C})$ は $GL(n, \mathbb{C})$ の部分群です。

n 次複素正方行列で与えられる代表的なリー群を表にまとめておきます：

記号	名称	条件	次元
$GL(n, \mathbb{C})$	n 次複素一般線形群	$\det A \neq 0$	$2n^2$
$SL(n, \mathbb{C})$	n 次複素特殊線形群	$\det A = 1$	$2n^2 - 2$
$U(n)$	n 次ユニタリー群	$A^\dagger A = 1$	n^2
$SU(n)$	n 次特殊ユニタリー群	$A^\dagger A = 1, \det A = 1$	$n^2 - 1$

同様に、 n 次実正方行列で与えられるリー群として、以下のようなものが考えられるでしょう：

記号	名称	条件	次元
$GL(n, \mathbb{R})$	n 次実一般線形群	$\det A \neq 0$	n^2
$SL(n, \mathbb{R})$	n 次実特殊線形群	$\det A = 1$	$n^2 - 1$
$O(n)$	n 次直交群	$A^T A = 1$	$n(n-1)/2$
$SO(n)$	n 次回転群	$A^T A = 1, \det A = 1$	$n(n-1)/2$

詳細はこれから説明します。

13.2 リー代数と構造定数

一般にリー群 G の単位元を 1 と書き、 G の単位元近傍の元を考えましょう。それは無限小の実数を ϵ として、 $1 + \epsilon X$ と表せます。これが G の元になっているという要請から、 X の集合が得られるでしょう。その集合を $\langle G \rangle$ と書き、 G のリー代数といいます。

次の2つの命題がわかるでしょう。

$$(X \in \langle G \rangle \wedge a \in \mathbf{R}) \Rightarrow aX \in \langle G \rangle .$$

ここで \mathbf{R} は実数全体の集合です。

[証明] 仮定より ϵ を無限小量として $1 + \epsilon X \in G$. ここで $\epsilon = \delta a$ とおけば、 δ は無限小量であり、 $1 + \delta a X \in G$. よって $aX \in \langle G \rangle$. [証明終]

$$X, Y \in \langle G \rangle \Rightarrow X + Y \in \langle G \rangle .$$

[証明] 仮定と G の閉性より、 $(1 + \epsilon X)(1 + \epsilon Y) \in G$. 展開して ϵ の高次項を落とし、 $1 + \epsilon(X + Y) \in G$. よって $X + Y \in \langle G \rangle$. [証明終]

これらの命題によりリー代数 $\langle G \rangle$ は実ベクトル空間を成します。その基底を T_a ($a = 1, 2, \dots, N$) と書けば、 $\langle G \rangle$ の元は、 θ_a を実数(ベクトルの成分)として、

$$X = \theta_a T_a \tag{1}$$

と表すことができます (a については和を取る)。

さらに次の2つの命題がいえます。

$$X \in \langle G \rangle \Rightarrow e^X \in G. \tag{2}$$

[証明] 仮定と G の閉性より自然数 n に対して $(1 + \epsilon X)^n \in G$. ここで ϵ は無限小量だから、 $1 + \epsilon X = e^{\epsilon X}$ に注意して $e^{n\epsilon X} \in G$. $n\epsilon = 1$ となるように n を選べば与題を得る。[証明終]

$$X, Y \in \langle G \rangle \Rightarrow [X, Y] \in \langle G \rangle . \tag{3}$$

[証明] 仮定から $e^{\epsilon X} e^{\epsilon Y} e^{-\epsilon X} e^{-\epsilon Y} \in G$. 指数関数を展開して ϵ の高次項を落として $1 + \epsilon^2 [X, Y] \in G$. よって $[X, Y] \in \langle G \rangle$. [証明終]

(3)により、リー代数は交換子を積とみなすことで環を成します。このためリー代数はリー環とも呼ばれます。基底 T_a に対して、

$$[T_a, T_b] = f_{abc}T_c$$

とおいたとき、 f_{abc} は構造定数と呼ばれます。構造定数は、考えている基底において、リー代数の演算規則を完全に決定しています。一方、(1)(2)より、

$$A(\theta) = e^{\theta_a T_a} \in G.$$

すなわち、リー代数の基底 T_a からリー群 G の少なくとも単位元を含む部分群が生成されるということです。これにより同じ構造定数のリー代数から生成された2つのリー群は同型になります(*)。

あるリー群が与えられたとき、これと同型なリー群を探すことは、物理学において特に重要な作業です。それは、ある変換に対して、ある量(例えば力学変数)がどのように振る舞うかということを矛盾なく決定する手段だからです。見つかった同型なリー群が、 M 次正方行列ならば、これをもとのリー群の M 次元表現といいます。もちろん、表現の次元と、リー群の多様体としての次元(基底 T_a の個数 N) は一般に別物です。

一方、元のリー群がすでに正方行列であるとき、これを定義表現、もしくは基本表現といいます。

(*注) 2つの群 G, G' が同型であるとは、 $\forall ab \in G (f(ab) = f(a)f(b))$ を満たす写像 $f: G \rightarrow G'$ が存在することで、 f を同型写像といいます。

13.3 直交群と回転群

リー群の簡単な例は n 次直交群 $O(n)$ ($n \geq 2$) で、

$$A^T A = 1$$

を満たす n 次実正方行列 A が成す群です(1は単位行列)。上式の両辺に関して行列式をとれば、 $\det A^T = \det A$ に注意して、

$$(\det A)^2 = 1 \quad \therefore \det A = \pm 1.$$

よって $O(n)$ は2つの非連結部分からなり、特に $\det A = +1$ の部分は単位元を含み、部分群を成します。これを n 次回転群 $SO(n)$ と呼びます。 $O(n)$ の元全体は $SO(n)$ の元全体と、それらに反転行列:

$$P = \text{diag}(1, \dots, 1, -1)$$

を乗じたものになります。

$SO(n)$ のリー代数を構成するために、単位元の近傍を考え、 $A = 1 + \epsilon X$ (ϵ は無限小量) とおくと、

$$X^T = -X$$

を得ます。これが $\langle SO(n) \rangle$ の条件であり、要するに反対称の n 次正方行列であるということです。よって $SO(n)$ の次元は $n(n-1)/2$ です。

13.4 SO(2)

例えば $n = 2$ のとき、 $X^T = -X$ の一般解は、 θ を任意の実数として、

$$X = \theta T, \quad T = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

と書けます。基底 T が1つであることから構造定数は0です。よって $SO(2)$ は1次元の可換群になります ($[X, Y] = 0 \Rightarrow e^X e^Y = e^Y e^X$ に注意)。

$SO(2)$ の元を具体的に書けば、

$$\begin{aligned} A(\theta) &= e^{\theta T} = \exp \begin{pmatrix} 0 & -\theta \\ \theta & 0 \end{pmatrix} = \exp \left\{ U \begin{pmatrix} i\theta & 0 \\ 0 & -i\theta \end{pmatrix} U^\dagger \right\} \\ &= U \begin{pmatrix} e^{i\theta} & 0 \\ 0 & e^{-i\theta} \end{pmatrix} U^\dagger = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}. \quad \text{ここで } U = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -i & i \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

U は対角化のためのユニタリ行列です。結果はよく知られた2次元の回転行列になります。

$SO(2)$ と同型な群はいくらでも考えられますが、簡単な例として1次元表現を考えましょう。例えば基底を 1 とすれば $\{e^\theta\}$ 。これはスケール変換 \mathbb{R}^+ を意味します。基底を i とすれば $\{e^{i\theta}\}$ 。これは位相変換を意味し、1次ユニタリ行列が成す群とみなせるので、 $U(1)$ と書きます。前者は非コンパクト群ですが、後者はコンパクト群です。

また、これらが(局所)同型であることは、いずれの表現においても $A(\theta)A(\phi) = A(\theta + \phi)$ となっていることからわかります。ちなみに基底を 0 にとれば $\{1\}$ となり、これは単位元だけからなる群ですが、それは全ての群と(準)同型であり、自明な例になっています。

13.5 SO(3) とパウリ行列

$n = 2$ は自明すぎて、連続群論の有難みが伝わってこないかと思います。次に $n = 3$ の場合を考えてみましょう。

$n = 3$ のときは、 $X^T = -X$ の一般解は、

$$X = \theta_a T_a \quad (a = 1, 2, 3),$$

$$T_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad T_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad T_3 = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

と書けます。すなわち $(T_a)_{bc} = -\epsilon_{abc}$ ということです。このとき、

$$[T_a, T_b] = \epsilon_{abc} T_c$$

が確かめられるので、 $\langle SO(3) \rangle$ の構造定数は ϵ_{abc} です。 $SO(3)$ は3次元の非可換群であることがわかります。

ここで角運動量代数が $[J_a, J_b] = i\epsilon_{abc} J_c$ であったことに注意すると、ちょうど、代数 $-iJ_a$ の構造定数が ϵ_{abc} です。よって、 J_a の角運動量固有状態における表現行列、

$$(R_a^{(l)})_{mm'} = \langle l, m | J_a | l, m' \rangle$$

を作れば、 $-iR_a^{(l)}$ も、各 l に対して同じ構造定数 ϵ_{abc} を持つはずで、すなわち $\{e^{-i\theta_a R_a^{(l)}}\}$ が $SO(3)$ と同型で、各 l に対してそれぞれ $(2l + 1)$ 次元表現になります。

計算のために、角運動量代数に関する次の公式を思い出しましょう。

$$J_1 = \frac{1}{2}(J_+ + J_-), \quad J_2 = \frac{1}{2i}(J_+ - J_-),$$

$$J_{\pm} |l, m\rangle = \sqrt{(l \mp m)(l \pm m + 1)} |l, m \pm 1\rangle, \quad J_3 |l, m\rangle = m |l, m\rangle.$$

具体的には、まず $l = 0$ のときは、 $R_a^{(0)} = 0$ となるので、自明な1次元表現 $\{1\}$ になります。これは物理においてはスカラー表現と呼ばれます。

$l = 1/2$ のときは、 $|\frac{1}{2}, +\frac{1}{2}\rangle = |+\rangle$, $|\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\rangle = |-\rangle$ という略記を用いて、

$$\begin{aligned} \langle + | J_1 | - \rangle &= \frac{1}{2}, & \langle - | J_1 | + \rangle &= \frac{1}{2}, \\ \langle + | J_2 | - \rangle &= -\frac{i}{2}, & \langle - | J_2 | + \rangle &= \frac{i}{2}, \\ \langle + | J_3 | + \rangle &= \frac{1}{2}, & \langle - | J_3 | - \rangle &= -\frac{1}{2} \end{aligned}$$

で、その他の成分は0ですから、

$$R_a^{(1/2)} = \frac{\sigma_a}{2}, \quad \sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

が得られます。 σ_a はパウリ行列と呼ばれます。

$$\sigma_a^\dagger = \sigma_a, \quad \text{tr } \sigma_a = 0,$$

および、一般に正方行列 M に対して、

$$\det e^M = e^{\text{tr}M}$$

であること (*) に注意すると、 $SO(3)$ の 2次元表現 $\{e^{-i\theta_a\sigma_a/2}\}$ は、行列式が 1 の 2次ユニタリ行列が作るリー群 $SU(2)$ であることがわかるでしょう。これは物理においてはスピノル表現と呼ばれます。

$l = 1$ のときも同様に計算すれば、

$$R_1^{(1)} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad R_2^{(1)} = \frac{i}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad R_3^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

となり、 $\{e^{-i\theta_a R_a^{(1)}}\}$ が 3次元表現で、物理ではベクトル表現と呼ばれます。

以下同様に、4次元表現、5次元表現、... と作れるわけです。一般に $R_a^{(l)}$ の第 3成分 (z 成分) は対角行列で、

$$(R_3^{(l)})_{mm'} = m\delta_{mm'}$$

となることは定義から明らかです。

(*注) N 次正方行列 M , 無限小量 ϵ に対して、

$$\begin{aligned} \det(1 + \epsilon M) &= \epsilon_{i_1 i_2 \dots i_N} (\delta_{1i_1} + \epsilon M_{1i_1}) (\delta_{2i_2} + \epsilon M_{2i_2}) \dots (\delta_{Ni_N} + \epsilon M_{Ni_N}) \\ &= \epsilon_{12\dots N} + \epsilon_{i_1 2\dots N} \epsilon M_{1i_1} + \epsilon_{1i_2\dots N} \epsilon M_{2i_2} + \dots + \epsilon_{12\dots i_N} \epsilon M_{Ni_N} \\ &= 1 + \epsilon(M_{11} + M_{22} + \dots + M_{NN}) = 1 + \epsilon \text{tr}M. \end{aligned}$$

よって、 $\det e^{\epsilon M} = e^{\epsilon \text{tr}M}$ ですが、両辺 n 乗して $n\epsilon = 1$ とおけば、 $\det e^M = e^{\text{tr}M}$ を得ます。

13.6 随伴表現

ヤコビ恒等式：

$$[A, [B, C]] + [B, [C, A]] + [C, [A, B]] = 0.$$

および構造定数の定義 $[T_a, T_b] = f_{abc} T_c$ に注意すると、

$$f_{bcd} f_{ade} + f_{cad} f_{bde} + f_{abd} f_{cde} = 0$$

を得ますが、構造定数の定義から $f_{bac} = -f_{abc}$ であることに注意すると、

$$f_{cad} f_{dbe} - f_{cbd} f_{dae} = f_{abd} f_{cde}$$

と書けます。よって、

$$(S_a)_{bc} = f_{bac}$$

という実行列の組 S_a を定義すると、これは考えているリー群のリー代数の基底になっています。その表現次元はリー群の次元と同一です。これを随伴表現 (アジョイント表現) といいます。

3次回転群 $SO(3)$ の場合は、定義表現であった T_a が、同時に随伴表現になっていたことに注意して下さい。どんなリー群にも、そのリー群と同じ次元の実表現があるというわけです。例えば $SU(2)$ から出発して、これを定義表現と考えて随伴表現を作れば、それは $SO(3)$ になるわけです。

13.7 ユニタリ群と特殊ユニタリ群

n 次ユニタリ群 $U(n)$ は、

$$U^\dagger U = 1$$

を満たす n 次複素正方行列 U が成す群です。 $U = 1 + \epsilon X$ (ϵ は無限小量) とおくと、

$$X^\dagger = -X$$

を得るので、リー代数 $\langle U(n) \rangle$ は n 次反エルミート行列全体の集合です。よって T_μ を n 次エルミート行列の基底として、 $U(n)$ は、

$$U(n) = \{e^{-i\theta_\mu T_\mu}\}$$

と表せます。 T_μ は生成子と呼ばれます。 θ_μ は実パラメーターです。 n 次エルミート行列の実自由度は n^2 なので、 $U(n)$ の次元は n^2 です。便宜上、ギリシャ文字添字 μ は 0 を含めて、

$$\mu = 0, 1, \dots, n^2 - 1$$

を走るものとしします。

$n \geq 2$ のとき、複数ある生成子 T_μ を互いに直交するように選びます。すなわち $\mu \neq \nu$ のとき、

$$(T_\mu^*)_{ab}(T_\nu)_{ab} = 0 \quad \therefore (T_\mu)_{ba}(T_\nu)_{ab} = 0 \quad \therefore \text{tr}(T_\mu T_\nu) = 0.$$

また、 T_0 を単位行列に選ぶと、それは全ての正方行列と可換なので、

$$U(n) = \{e^{-i\theta_0} e^{-i\theta_a T_a}\} = U(1) \times \{e^{-i\theta_a T_a}\} \quad (a = 1, 2, \dots, n^2 - 1)$$

です。このとき T_0, T_a の直交性から $\text{tr} T_a = 0$ なので、 $e^{-i\theta_a T_a}$ は行列式が 1 で、その集合は特殊ユニタリ群 $SU(n)$ を成すことがわかります。すなわち $n \geq 2$ のとき、

$$U(n) = U(1) \times SU(n)$$

と直積分解されるわけです。

生成子 T_a は、

$$\text{tr}(T_a T_b) = \frac{1}{2} \delta_{ab}$$

で規格化するのが慣習です。例えば $SU(2)$ の場合、 $T_a = \sigma_a/2$ でしたが、これが上式を満たしていることに注意してください。一方、 $\langle SU(n) \rangle$ の構造定数を f_{abc} とすると、

$$[-iT_a, -iT_b] = f_{abc}(-iT_c) \quad \therefore [T_a, T_b] = i f_{abc} T_c.$$

ですが、これらから、

$$\text{tr}([T_a, T_b] T_c) = \frac{i}{2} f_{abc}$$

を得るでしょう。これとトレースの性質から f_{abc} が添字 a, b, c について完全反対称であることがわかります。

13.8 $SU(3)$ とゲルマン行列

例えば $SU(3)$ の場合、生成子は $T_a = \lambda_a/2$ ($a = 1, 2, \dots, 8$). ここで、

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, & \lambda_2 &= \begin{pmatrix} 0 & -i & 0 \\ i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, & \lambda_3 &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \\ \lambda_4 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, & \lambda_5 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 \end{pmatrix}, \\ \lambda_6 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, & \lambda_7 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i \\ 0 & i & 0 \end{pmatrix}, & \lambda_8 &= \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

はゲルマン行列と呼ばれます。このとき T_a は全てトレース0のエルミート行列で、規格直交性： $\text{tr}(T_a T_b) = (1/2)\delta_{ab}$ を満たすことに注意してください。また、 $\langle SU(3) \rangle$ の構造定数 f_{abc} に対し、

$$\text{tr}([\lambda_a, \lambda_b] \lambda_c) = 4i f_{abc}$$

ですが、完全反対称性から f_{abc} の独立な成分は ${}_8C_3 = 56$ 個です。 $a < b < c$ を満たす代表成分を上式から計算すると、少し面倒ですが、

$$\begin{aligned} f_{123} &= 1, & f_{147} &= \frac{1}{2}, & f_{156} &= -\frac{1}{2}, & f_{246} &= \frac{1}{2}, & f_{257} &= \frac{1}{2}, \\ f_{345} &= \frac{1}{2}, & f_{367} &= -\frac{1}{2}, & f_{458} &= \frac{\sqrt{3}}{2}, & f_{678} &= \frac{\sqrt{3}}{2} \end{aligned}$$

で、他は全て 0 になることが確かめられます^(*)。そうすると、 $\langle SU(3) \rangle$ の随伴表現の基底 $(S_a)_{bc} = f_{bac}$ に対し、例えば、

$$S_1 = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

です。 $SU(3) = \{e^{-i\theta_a \lambda_a/2}\}$ とその随伴表現 $\{e^{\theta_a S_a}\}$ は、当然、同型ということになります。

$SU(n)$ の表現を作る処方、すなわち $SU(n)$ の表現論は、テンソル法と呼ばれる方法により一般的に確立していますが、ここでは基本的な範囲に留めることにし、これは紹介しないことにします。それでも例えば素粒子論を十分に理解できます。一方、 $SO(3)$ の表現論は、いわばたまたま角運動量代数の固有ベクトルの構成と等価になっていたことに注意してください。

(*注) Excel VBA による計算プログラムのソースを「あもんノート/数値計算 for VBA」に置いておきます。URL: <http://amonphys.web.fc2.com/>

索引

あ	
アジョイント表現	9
位相変換	6
一般線形群	3
か	
回転群	5
基本表現	5
ゲルマン行列	10
構造定数	5
さ	
次元	3
随伴表現	9
スカラー表現	7
スピノル表現	8
生成子	9
た	
直交群	5
定義表現	5
同型	5
同型写像	5
特殊線形群	3
特殊ユニタリ群	9
は	
パウリ行列	8
反転行列	5
表現	5
表現論	11
ベクトル表現	8
や	
ヤコビ恒等式	8
ユニタリ群	9
ら	
リー環	5
リー群	3
リー代数	4
連続群	3