

あもんノート

ユークリッド幾何学、ニュートン力学から、相対論、宇宙論、量子論、場の量子論、素粒子論、そして超ひも理論まで、理論物理学を簡潔にかつ幅広く網羅したノートです。TOP へは下の URL をクリックして行けます。専用の画像掲示板で、ご意見、ご質問等も受け付けております。

<http://amonphys.web.fc2.com/>

目次

第9章	一般相対論	3
9.1	アインシュタイン方程式	3
9.2	宇宙項	5
9.3	弱い重力場	6
9.4	ニュートン近似	7
9.5	弱い重力場のローレンツ変換	8
9.6	重力赤方偏移	9
9.7	重力波	10
9.8	シュヴァルツシルト解とブラックホール	11
9.9	等方座標と重力質量	13
9.10	シュヴァルツシルト時空における粒子の軌道	14
9.11	惑星の近日点移動	15
9.12	光の湾曲	16
9.13	エネルギー運動量テンソルの巨視的表示	17
9.14	トルマン方程式	18
9.15	シュヴァルツシルト内部解	20
9.16	ヒルベルト作用の1階微分表現	21
9.17	重力場のエネルギー擬テンソル	23
9.18	エネルギー運動量密度の全微分表示	23
9.19	星のエネルギー	25
9.20	慣性系のひきずりとカー解	27

第9章 一般相対論

特殊相対論を拡張し重力を含むようにした理論はいくつかありますが、その中で観測と矛盾がなく、もっとも簡単な理論が、特殊相対論の創始者アインシュタイン本人による一般相対論です。ここでは一般相対論の基礎事項について解説します。また、後半では少し難しいかもしれませんが重力場のエネルギーについて詳しく触れます。

9.1 アインシュタイン方程式

一般相対論は、特殊相対論における計量テンソル $g_{\mu\nu}$ を力学変数とみなし、作用に、

$$S_g = -\frac{1}{16\pi G} \int d^4x \sqrt{R}$$

を追加することで得られます。ここで G は万有引力定数、 R は時空のスカラー曲率です。この作用 S_g をアインシュタイン・ヒルベルト作用、あるいは単にヒルベルト作用といいます。スカラー曲率はスカラーなので、 S_g は座標に依存しません。よって基礎方程式の共変性、すなわち一般相対性原理が保持されるわけです。

計量による変分をとれば、 $R = g^{\mu\nu} R_{\mu\nu}$ に注意して、

$$\delta S_g = -\frac{1}{16\pi G} \int d^4x (R\delta\sqrt{g} + \sqrt{g} R_{\mu\nu} \delta g^{\mu\nu} + \sqrt{g} g^{\mu\nu} \delta R_{\mu\nu}).$$

$\delta R_{\mu\nu}$ を含む項は実のところ消えます。なぜならリッチテンソルと曲率テンソルの定義から $\delta R_{\mu\nu} = \partial_\lambda \delta \Gamma^\lambda_{\mu\nu} - \partial_\nu \delta \Gamma^\lambda_{\lambda\mu} + (\Gamma$ をあらわに含む項) ですが、接続係数の変分 $\delta \Gamma^\lambda_{\mu\nu}$ がテンソルであることに注意すると、共変微分を用いて

$$\delta R_{\mu\nu} = \nabla_\lambda \delta \Gamma^\lambda_{\mu\nu} - \nabla_\nu \delta \Gamma^\lambda_{\lambda\mu} + (\Gamma \text{ をあらわに含む項})$$

と書けます。テンソル定理によれば (Γ をあらわに含む項) は0であり、計量が共変微分に対し定数並みであること、および $\sqrt{g} \nabla_\mu A^\mu = \partial_\mu (\sqrt{g} A^\mu)$ に注意すれば、

$$\sqrt{g} g^{\mu\nu} \delta R_{\mu\nu} = \sqrt{g} \nabla_\lambda \delta \Gamma^{\lambda\nu}_{\nu} - \sqrt{g} \nabla_\nu \delta \Gamma^{\lambda\nu}_{\lambda} = \partial_\lambda (\sqrt{g} \delta \Gamma^{\lambda\nu}_{\nu}) - \partial_\nu (\sqrt{g} \delta \Gamma^{\lambda\nu}_{\lambda})$$

となり、これは座標の全微分なので積分をとることで消えます。

δS_g の残りの2つの項の計算は、計量の微分公式：

$$\delta g^{\mu\nu} = -g^{\mu\rho} g^{\nu\sigma} \delta g_{\rho\sigma}, \quad \delta \sqrt{g} = \frac{1}{2} \sqrt{g} g^{\mu\nu} \delta g_{\mu\nu}$$

を用いれば簡単で、結果、

$$\delta S_g = \frac{1}{16\pi G} \int d^4x \sqrt{g} G^{\mu\nu} \delta g_{\mu\nu}$$

を得ます。ここで $G^{\mu\nu} = R^{\mu\nu} - (1/2)g^{\mu\nu} R$ はアインシュタインテンソルです(リーマン幾何学の章を参照)。

また、特殊相対論の作用、

$$S_{sr} = - \sum_n \int d\tau_n \left(m_n + q_n u_n^\mu A_\mu(x_n) \right) - \frac{1}{4} \int d^4x \sqrt{g} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu}$$

の計量に関する変分は、エネルギー運動量テンソルを $T^{\mu\nu}$ として、

$$\delta S_{sr} = -\frac{1}{2} \int d^4x \sqrt{g} T^{\mu\nu} \delta g_{\mu\nu}$$

でした(特殊相対論の章参照)。よって、計量に関する作用原理から、

$$G^{\mu\nu} = 8\pi G T^{\mu\nu}$$

を得ます。これをアインシュタイン方程式といいます。時空にエネルギー運動量テンソルが存在すれば、それに応じて時空が曲がり、ローレンツ座標はとれなくなります。この時空の曲がりか重力の正体であると考えられるわけです。アインシュタインテンソルに関するビアンキ恒等式： $\nabla_\mu G^{\mu\nu} = 0$ から、

$$\nabla_\mu T^{\mu\nu} = 0$$

がわかります。

一方、アインシュタイン・ヒルベルト作用は粒子の座標や4元ポテンシャルを含まないため、粒子の運動方程式とマックスウェル方程式に変更はありません：

$$m_n \left(\frac{du_n^\lambda}{d\tau_n} + \Gamma^\lambda_{\mu\nu} u_n^\mu u_n^\nu \right) = q_n F^\lambda_{\mu} u_n^\mu, \quad \nabla_\mu F^{\mu\nu} = j^\nu.$$

粒子の運動方程式の $\Gamma^\lambda_{\mu\nu}$ を含む項は、ここでは一般に慣性力を含む重力を意味することになります。時空はリーマン空間であると考えているため、この項は座標を上手く選ぶことで局所的に0にできることに注意して下さい。その座標とは、すなわち自由落下系のことです。要するに、重力は加速系において生じる慣性力といつても相殺できるということです。重力が持つこの性質は等価原理と呼ばれます。

(余談) ニュートン理論においては、運動方程式に現れる質量と万有引力の法則に現れる質量が等価(常に同じ)であることが等価原理に対応し、これは等価原理の名前の由来でもあります。ラグランジュ形式においては、運動項 $(1/2) \sum m_n |\dot{x}_n|^2$ と相互作用項 $-\sum m_n \phi(x_n)$ の m_n が同じであることに対応します。このようにニュートン理論においては等価原理は人為的に仮定されているわけですが、一般相対論では自動的に成り立つというわけです。

9.2 宇宙項

一般相対論の作用に、さらに、

$$S_c = -\frac{\lambda}{8\pi G} \int d^4x \sqrt{g}$$

を加えても、作用全体の座標不変性は保たれ、共変性は保持されます。 λ は定数で、宇宙定数と呼ばれます。一般相対論において宇宙全体を考えると、一般にこの作用があるものとし、 S_c は計量だけの汎関数であるため、変更される方程式はアインシュタイン方程式だけであり、それは、

$$G^{\mu\nu} - \lambda g^{\mu\nu} = 8\pi G T^{\mu\nu}$$

となります。 $-\lambda g^{\mu\nu}$ は宇宙項と呼ばれます。計量条件： $\nabla_\mu g^{\mu\nu} = 0$ に注意すると、いぜんとして $\nabla_\mu T^{\mu\nu} = 0$ が成り立つことがわかります。

しかし少なくとも太陽系のスケールにおいては宇宙項なしで一般相対論がよく成り立っていることがわかっているため、宇宙定数 λ はそのようなスケールにおいては無視できる程度と考えられます。実際、宇宙論における考察によれば、 $\lambda \sim (100 \text{ 億光年})^{-2}$ です。

結局、一般相対論の作用は、

$$\begin{aligned} S_{gr} &= S_{sr} + S_g + S_c \\ &= -\sum_n \int d\tau_n \left(m_n + q_n u_n^\mu A_\mu(x_n) \right) \\ &\quad - \frac{1}{4} \int d^4x \sqrt{g} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} - \frac{1}{16\pi G} \int d^4x \sqrt{g} (R + 2\lambda) \end{aligned}$$

ということになります。これだけで古典論の全てを記述しています。よくできた理論は葉書一枚に書けると言われます。特に電磁場を無視できる場合は、

$$S_{gr} = -\sum_n m_n \int d\tau_n - \frac{1}{16\pi G} \int d^4x \sqrt{g} (R + 2\lambda)$$

です。一般相対論の美しさがよくわかるでしょう(*)。

以下しばらくは宇宙項は小さいとして無視することにします。

(*注) $16\pi G$ はただの定数です。作用汎関数や場の方程式に π が現れることを嫌う有理系の立場を重視し、 $\kappa = 8\pi G \sim 1.686 \times 10^{-55} \text{ eV}^{-2}$ でアインシュタインの重力定数を定義することも多いです。ちなみに自然単位系においてさらに $\kappa = 1$ とすれば全ての物理量は無次元になりますが、これは普通しません。重力が電磁力などの他の相互作用と比べて少し異質であり、量子論的にきちんと説明されていないことが理由の一つとして考えられます。

9.3 弱い重力場

アインシュタイン方程式は非線形であるため解くことが困難です。ここでは物質が十分希薄であると仮定し、線形近似を行うことにします。このとき、計量 $g_{\mu\nu}$ の、ローレンツ計量 $\eta_{\mu\nu}$ からのずれはわずかであると考えられるので、

$$g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + \phi_{\mu\nu}$$

で摂動 $\phi_{\mu\nu}$ ($\ll 1$) を定義します。計量が2つの添字について対称だから、 $\phi_{\mu\nu}$ も2つの添字について対称です。また、 $\phi_{\mu\nu}$ の2次の項は無視されるので、その添字の上げ下げはローレンツ計量で行ってよいこととなります。さらに便宜上、

$$\psi_{\mu\nu} = \phi_{\mu\nu} - \frac{1}{2} \eta_{\mu\nu} \phi^\lambda{}_\lambda$$

で $\psi_{\mu\nu}$ を定義します。両辺に $\eta^{\mu\nu}$ をかければ $\psi^\lambda{}_\lambda = -\phi^\lambda{}_\lambda$ が得られることに注意して、逆に解いた式は、

$$\phi_{\mu\nu} = \psi_{\mu\nu} - \frac{1}{2} \eta_{\mu\nu} \psi^\lambda{}_\lambda$$

となります。

曲率テンソルを考えると、 Γ の2次の項は無視できることになり、

$$R_{\rho\sigma\mu\nu} = -\frac{1}{2} \partial_\mu \partial_\rho \phi_{\sigma\nu} + \frac{1}{2} \partial_\mu \partial_\sigma \phi_{\rho\nu} - (\mu\nu \text{ 交換}).$$

ここから丁寧に計算し、アインシュタイン方程式 $G^{\mu\nu} = 8\pi GT^{\mu\nu}$ は、

$$\psi^{\mu\nu} - \partial^\mu \partial_\lambda \psi^{\lambda\nu} - \partial^\nu \partial_\lambda \psi^{\lambda\mu} + \eta^{\mu\nu} \partial_\rho \partial_\sigma \psi^{\rho\sigma} = -16\pi GT^{\mu\nu}$$

となります。これをアインシュタインの線形近似式といいます。

アインシュタイン方程式は座標変換に対し不変だから、我々は座標を適当に選ぶ任意性を持っています。いま、

$$x'^\mu = x^\mu + \xi^\mu(x)$$

という座標変換を考え、 ξ^μ は $\phi_{\mu\nu}$ 程度の小さい量とし、その2次以上は無視できるとします。この座標変換により計量は、

$$g'_{\mu\nu} = g_{\mu\nu} - \partial_\mu \xi^\lambda g_{\lambda\nu} - \partial_\nu \xi^\lambda g_{\lambda\mu} - \xi^\lambda \partial_\lambda g_{\mu\nu}$$

と変換されます。よって $\phi_{\mu\nu}$, $\psi_{\mu\nu}$ の変換式は、順に、

$$\phi'_{\mu\nu} = \phi_{\mu\nu} - \partial_\mu \xi_\nu - \partial_\nu \xi_\mu, \quad \psi'_{\mu\nu} = \psi_{\mu\nu} - \partial_\mu \xi_\nu - \partial_\nu \xi_\mu + \eta_{\mu\nu} \partial \cdot \xi$$

となることがわかります。このとき、 $\partial_\mu \psi'^{\mu\nu} = \partial_\mu \psi^{\mu\nu} - \xi^\nu$ ですから、これが0になるように ξ^ν を選ぶことで $\partial_\mu \psi'^{\mu\nu} = 0$ を実現できます。つまり適当に座標を選ぶことで、

$$\partial_\mu \psi'^{\mu\nu} = 0$$

を実現できるわけです。この座標条件のもとでは、いまだ $\xi^\mu = 0$ を満たす ξ^μ を用いた変換が許されることに注意して下さい。

この座標条件により、アインシュタインの線形近似式は、

$$\psi^{\mu\nu} = -16\pi G T^{\mu\nu}$$

と極めて簡単になります。マックスウェル方程式の場合と同様、ダランベルシアンの逆を用いれば、解は、

$$\psi^{\mu\nu}(t, \mathbf{r}) = -4G \int d^3\mathbf{r}' \frac{T^{\mu\nu}(t - |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|, \mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}$$

であり、これが重力の遅延ポテンシャルです。この解が座標条件を満たすことは、今の近似では $\partial_\mu T^{\mu\nu} = \nabla_\mu T^{\mu\nu} = 0$ がいえることに注意すれば、マックスウェル方程式のときと同様な方法でわかります。

9.4 ニュートン近似

上の近似で、さらに電磁場は十分弱いものとし(あるいは粒子にくりこまれていたものとし)、粒子の速さが光速 1 より十分小さい場合を考えます。この近似をニュートン近似といいます。太陽系の惑星の運動においては、およそこの近似が当てはまります。

このときエネルギー運動量テンソル、

$$T^{\mu\nu}(t, \mathbf{r}) = \sqrt{-1} \sum_n m_n v_n^\mu u_n^\nu \delta^3(\mathbf{r} - \mathbf{r}_n) \Big|_{t_n=t}$$

は、00 成分：

$$T^{00}(t, \mathbf{r}) = \sum_n m_n \delta^3(\mathbf{r} - \mathbf{r}_n) \Big|_{t_n=t}$$

が質量密度を意味し、これ以外の成分は全て 0 と近似できるので、重力の遅延ポテンシャルの式から、

$$\psi^{00} = 4\phi, \quad \phi(t, \mathbf{r}) = -G \sum_n \frac{m_n}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_n|} \Big|_{t_n=t}$$

で、他の成分は 0 です。 ϕ はニュートンの重力ポテンシャルを意味しています(解析力学の章参照)。またこのとき $\phi_{\mu\nu} = \psi_{\mu\nu} - (1/2)\eta_{\mu\nu}\psi^\lambda{}_\lambda$ は対角成分が全て 2ϕ で、非対角成分は 0 になります。すなわち、

$$\phi_{\mu\nu} = 2\phi \delta_\nu^\mu \quad \therefore g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + 2\phi \delta_\nu^\mu.$$

一方、粒子の運動方程式は、いまの近似のもとで、

$$\ddot{x}_n^i + \Gamma^i_{00} = 0$$

となりますが、

$$\Gamma^i_{00} = g^{ij} \frac{-1}{2} \partial_j g_{00} = -\frac{1}{2} \eta^{ij} \partial_j (2\phi) = \partial_i \phi$$

ですから、

$$\ddot{x}_n^i + \partial_i \phi = 0.$$

これはニュートンの運動方程式に他なりません。

すなわち一般相対論は、ニュートン近似のもとでニュートンの重力理論に帰着するわけです。これによりニュートン理論の成功は、そのまま一般相対論の成功と考えることができます。

(余談) 太陽の表面における重力ポテンシャルは、 $G \sim 6.67 \times 10^{-11} \text{ m}^3/\text{kg s}^2$, $M \sim 2.0 \times 10^{30} \text{ kg}$, $R \sim 70 \text{ 万 km}$ より、 $|\phi| = GM/R \sim 1.9 \times 10^{11} \text{ m}^2/\text{s}^2 \sim 2.1 \times 10^{-6} \ll 1$ です。当然、惑星や衛星の太陽に対する相対速度は光速よりずっと小さいので、太陽系においてはニュートン理論で十分なわけです。

9.5 弱い重力場のローレンツ変換

定常的な弱い重力場があったとき、これに対し運動する系において重力場がどのようになるか考えてみましょう。

重力場が定常的になる系を x^μ とし、これに対し x^1 の方向に速さ v で運動する系を x'^μ とします。このとき、

$$\Lambda_{\nu}^{\mu} := \frac{\partial x^{\mu}}{\partial x'^{\nu}} = \begin{pmatrix} \gamma & \gamma v & 0 & 0 \\ \gamma v & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}_{\mu\nu}, \quad \gamma = \frac{1}{\sqrt{1-v^2}}$$

ですが、接続係数 $\Gamma_{\lambda\mu\nu}$ が線形変換に対してはテンソルと振舞うこと、および対称性 $\Gamma_{\lambda\mu\nu} = \Gamma_{\lambda\nu\mu}$ に注意すると、

$$\begin{aligned} \Gamma'_{100} = & \Lambda_1^0 \Lambda_0^0 \Lambda_0^0 \Gamma_{000} + 2\Lambda_1^0 \Lambda_0^0 \Lambda_0^1 \Gamma_{001} + \Lambda_1^0 \Lambda_0^1 \Lambda_0^1 \Gamma_{011} \\ & + \Lambda_1^1 \Lambda_0^0 \Lambda_0^0 \Gamma_{100} + 2\Lambda_1^1 \Lambda_0^0 \Lambda_0^1 \Gamma_{101} + \Lambda_1^1 \Lambda_0^1 \Lambda_0^1 \Gamma_{111}. \end{aligned}$$

ここでさらに、 $\Gamma_{\lambda\mu\nu} = (1/2)(-\partial_\lambda g_{\mu\nu} + \partial_\nu g_{\lambda\mu} + \partial_\mu g_{\nu\lambda})$, $g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + 2\phi \delta_\nu^\mu$ に注意すると、

$$\Gamma_{000} = \Gamma_{011} = \Gamma_{101} = 0, \quad \Gamma_{100} = -\Gamma_{001} = -\Gamma_{111} (= -\partial_1 \phi)$$

がわかるので、

$$\Gamma'_{100} = (-2\Lambda_1^0 \Lambda_0^0 \Lambda_0^1 + \Lambda_1^1 \Lambda_0^0 \Lambda_0^0 - \Lambda_1^1 \Lambda_0^1 \Lambda_0^1) \Gamma_{100} = \gamma^3(1 - 3v^2)\Gamma_{100}.$$

同様に考えて、

$$\begin{aligned} \Gamma'_{200} &= \Lambda_2^2 \Lambda_0^0 \Lambda_0^0 \Gamma_{200} + 2\Lambda_2^2 \Lambda_0^0 \Lambda_0^1 \Gamma_{201} + \Lambda_2^2 \Lambda_0^1 \Lambda_0^1 \Gamma_{211} \\ &= (\Lambda_2^2 \Lambda_0^0 \Lambda_0^0 + \Lambda_2^2 \Lambda_0^1 \Lambda_0^1) \Gamma_{200} = \gamma^2(1 + v^2)\Gamma_{200}, \\ \Gamma'_{300} &= \gamma^2(1 + v^2)\Gamma_{300} \end{aligned}$$

です。すなわち運動する系において重力場は、運動の水平方向の成分が $\gamma^3(1 - 3v^2)$ 倍、垂直方向の成分が $\gamma^2(1 + v^2)$ 倍されるわけです。

例えばある物体が $1/\sqrt{3}$ より大きな速度で我々に接近あるいは遠ざかっている場合、我々はその物体から斥力の重力を受けることとなります (図9.1)。万有が引力を生じるというのは、相対速度が光速に比べて十分に小さい場合の常識であり、一般相対論ではこれは成り立たないわけです。

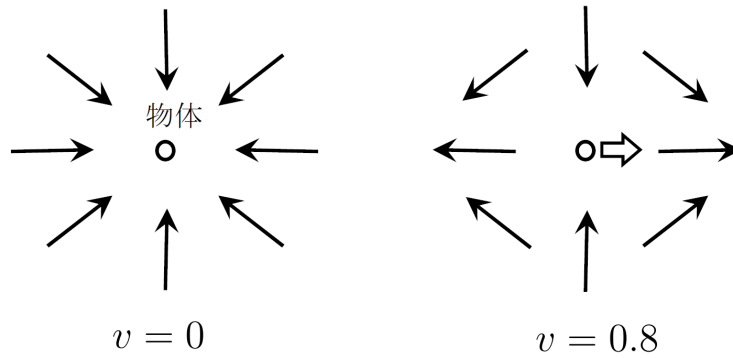


図 9.1: 運動する物体が作る重力場の向き

9.6 重力赤方偏移

次に、定常的な時空における光の通信を考えてみましょう。

送信者を A, 受信者を B とします。ある瞬間に A を出発した光の世界線と、その 1 周期後に出発した光の世界線は、計量が定常的であることから時間方向に並進することで重なるはずですが、そうすると光の周期は、時間座標 x^0 においては場所に依らず一定と考えられます。このことは取りも直さず、光の周期は、固有時間においては一般に場所に依るということを意味します。

いま、A における光の周期を T_A , B における周期を T_B , 時間座標における周期を T とすると、A, B は座標に静止しているとして、

$$T_A^2 = g_{00}(\mathbf{r}_A)T^2, \quad T_B^2 = g_{00}(\mathbf{r}_B)T^2.$$

r_A, r_B はそれぞれ A, B の空間座標です。よって、

$$\frac{T_A}{T_B} = \sqrt{\frac{g_{00}(\mathbf{r}_A)}{g_{00}(\mathbf{r}_B)}}.$$

あるいは光の振動数をそれぞれ ν_A, ν_B として、

$$\frac{\nu_B}{\nu_A} = \sqrt{\frac{g_{00}(\mathbf{r}_A)}{g_{00}(\mathbf{r}_B)}} \sim 1 + \phi(\mathbf{r}_A) - \phi(\mathbf{r}_B)$$

と近似されます。 ϕ はニュートンの重力ポテンシャルです。

重力ポテンシャルの違いにより、光の振動数が変化するこの現象は、重力赤方偏移と呼ばれます。例えば送信者 A の方が低い位置にあり、 $\phi(\mathbf{r}_A) < \phi(\mathbf{r}_B)$ とすると、 $\nu_B/\nu_A < 1$ がわかるので、光は低振動数側、すなわち赤方側にずれるわけです。これはメスバウアー効果を利用した塔における精密実験や人工衛星における実験です。すでに確認されている現象で、カーナビ等で利用されている GPS もこの効果を補正として取り入れています。

(余談) 重力赤方偏移は計量型の相対論的重力理論でないと説明ができないもので、重力の正体を時空の曲がりとしない非計量型重力理論はこれにより全て排除されます。例えば時空をミンコフスキー空間とし、重力場をスカラー場やテンソル場として導入しても駄目なわけです。重力は時空の構造と密接なわけで、このことを等価原理の視点から早々と見抜いたアインシュタインの洞察力は類い稀と言えるでしょう。特殊相対論はアインシュタインがいなくても 10 年と遅れることなく誰かが発見していただろうと考えられますが、一般相対論の発見は、リーマン幾何学を用いていることから想像されるように、アインシュタインの天才 (およびグロスマンの助言) に依るところが大きいわけです。

9.7 重力波

真空、すなわちエネルギー運動量テンソル $T^{\mu\nu}$ が 0 の場合、アインシュタインの線形近似式、および座標条件は、

$$\psi^{\mu\nu} = 0, \quad \partial_\mu \psi^{\mu\nu} = 0.$$

これは波動解、

$$\psi^{\mu\nu} = a^{\mu\nu} e^{-ik \cdot x} + \text{c.c.}, \quad k^0 = |\mathbf{k}|, \quad k_\mu a^{\mu\nu} = 0$$

を持ち、重力波と呼ばれます。振幅 $a^{\mu\nu}$ は 2 つの添字について対称だからその独立な成分は本来 10 個ですが、 $k_\mu a^{\mu\nu} = 0$ により 4 個減り、6 個になります。しかしさらに $\xi^\mu = 0$ を満たす $\xi^\mu = c^\mu e^{-ik \cdot x} + \text{c.c.}$ という座標変換が許されます。このとき $a^{\mu\nu}$ は、

$$a'^{\mu\nu} = a^{\mu\nu} + i(k^\mu c^\nu + k^\nu c^\mu - \eta^{\mu\nu} k \cdot c)$$

と変換され、その独立な成分は c^μ の自由度である 4 個分減り、結果、2 個になるはずですが。

このことを具体的に見るために、 x^3 の正の方向に進む重力波を考え、

$$k^\mu = (\kappa, 0, 0, \kappa)_\mu$$

としてみましょう。このとき条件式 $k_\mu a^{\mu\nu} = 0$ から、 $a^{0\nu} = a^{3\nu}$ を得るので、 $a^{\mu\nu}$ の添字の 3 は 0 に取り替えることができます。よって $a^{\mu\nu}$ の独立な成分は、 $a^{00}, a^{01}, a^{02}, a^{11}, a^{12}, a^{22}$ の 6 個ですが、座標変換により、

$$\begin{aligned} a'^{00} &= a^{00} + i\kappa(c^0 + c^3), & a'^{01} &= a^{01} + i\kappa c^1, \\ a'^{02} &= a^{02} + i\kappa c^2, & a'^{12} &= a^{12}, \\ a'^{11} &= a^{11} + i\kappa(c^0 - c^3), & a'^{22} &= a^{22} + i\kappa(c^0 - c^3) \end{aligned}$$

となるので、 c^μ を適当に選ぶことで $a'^{00} = a'^{01} = a'^{02} = a'^{22} = 0$ とできます。このとき 0 でない独立な成分は a'^{11} と a'^{12} の 2 個になるわけです。重力波は、電磁波同様、自由度 2 の波動であることがわかりました。

9.8 シュヴァルツシルト解とブラックホール

次に、真空におけるアインシュタイン方程式の厳密解を求めてみましょう。

真空 ($T^{\mu\nu} = 0$) において、アインシュタイン方程式は、

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R = 0$$

ですが、この式に $g^{\mu\nu}$ をかけると $R - 2R = 0 \therefore R = 0$ を得るので、

$$R_{\mu\nu} = 0$$

となります。いま、静的であることと空間の等方性を仮定し、

$$x^0 = t, \quad x^1 = r, \quad x^2 = \theta, \quad x^3 = \phi$$

$$d\tau^2 = f(r)dt^2 - g(r)dr^2 - r^2d\theta^2 - r^2\sin^2\theta d\phi^2$$

という座標および計量を考えます。 $f(r)$ と $g(r)$ は未定関数です。このとき接続係数は、

$$\begin{aligned} \Gamma^0_{01} &= \Gamma^0_{10} = \frac{f'}{2f}, & \Gamma^1_{00} &= \frac{f'}{2g}, & \Gamma^1_{11} &= \frac{g'}{2g}, & \Gamma^1_{22} &= -\frac{r}{g}, \\ \Gamma^1_{33} &= -\frac{r\sin^2\theta}{g}, & \Gamma^2_{12} &= \Gamma^2_{21} = \frac{1}{r}, & \Gamma^2_{33} &= -\sin\theta\cos\theta, \\ \Gamma^3_{13} &= \Gamma^3_{31} = \frac{1}{r}, & \Gamma^3_{23} &= \Gamma^3_{32} = \frac{\cos\theta}{\sin\theta} & & & & (\text{他の成分は } 0). \end{aligned}$$

また、 $\Gamma_\mu = \Gamma^\rho_{\rho\mu}$ を定義すると、

$$\Gamma_1 = \frac{f'}{2f} + \frac{g'}{2g} + \frac{2}{r}, \quad \Gamma_2 = \frac{\cos\theta}{\sin\theta}, \quad \Gamma_0 = \Gamma_3 = 0.$$

ここからリッチテンソル： $R_{\mu\nu} = R^\rho_{\mu\rho\nu} = \partial_\rho\Gamma^\rho_{\mu\nu} - \partial_\nu\Gamma_\mu + \Gamma_\rho\Gamma^\rho_{\mu\nu} - \Gamma^\rho_{\mu\sigma}\Gamma^\sigma_{\nu\rho}$ は、

$$\begin{aligned} R_{00} &= \frac{f''}{2g} - \frac{f'^2}{4fg} - \frac{f'g'}{4g^2} + \frac{f'}{rg}, & R_{11} &= -\frac{f''}{2f} + \frac{f'^2}{4f^2} + \frac{f'g'}{4fg} + \frac{g'}{rg}, \\ R_{22} &= -\frac{rf'}{2fg} + \frac{rg'}{2g^2} - \frac{1}{g} + 1, & R_{33} &= \sin^2\theta R_{22} \quad (\text{非対角成分は0}) \end{aligned}$$

と計算されます(*)。

真空のアインシュタイン方程式は $R_{\mu\nu} = 0$ でしたが、特に $R_{00} = R_{11} = 0$ から $f'g + fg' = 0$ が導かれます。すなわち $fg = \text{一定}$ 。空間の遠方でミンコフスキー空間に漸近していると仮定し、 $f(\infty) = g(\infty) = 1$ とすれば、

$$fg = 1$$

です。そうすると $R_{22} = 0$ から $rf' + f = 1$ が得られ、これは、

$$f(r) = 1 - \frac{a}{r}$$

と解けます。ここで a は積分定数。

よって結局、

$$d\tau^2 = \left(1 - \frac{a}{r}\right) dt^2 - \left(1 - \frac{a}{r}\right)^{-1} dr^2 - r^2 d\theta^2 - r^2 \sin^2\theta d\phi^2$$

が真空のアインシュタイン方程式の厳密解で、シュヴァルツシルト解と呼ばれます。この解は $r = a$ の球面に特異性を持ち、そこでは $g_{00} = 0$ です。これは固有時間の凍結を意味します。 a をシュヴァルツシルト半径といいます。

粒子や光がシュヴァルツシルト半径より内部に入ったら、もはや外部に戻ることはできません。なぜなら粒子や光の世界線においては $d\tau^2 \geq 0$ ですが、これが回歸するならば $dr = 0$ となる点が存在し、その点において、

$$1 - \frac{a}{r} \geq r^2 \left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 + r^2 \sin^2\theta \left(\frac{d\phi}{dt}\right)^2$$

です。 $r < a$ においては左辺が負になるため、そのような解はあり得ません。いったん中に入ったら光さえ外に出られないため、シュヴァルツシルト半径より内部の領域はブラックホールと呼ばれ、境界面 $r = a$ は事象の地平面と呼ばれます。ただし地平面の時間凍結性のため、ブラックホールに近づく物質の運動は緩慢になり、外部の時間においては地平面に到達するまでに無限の時間を要します。

(*注) $\mu \neq \nu$ のとき、 $\Gamma^1_{\mu\nu} = 0$, $\partial_\rho \Gamma^\rho_{\mu\nu} = 0$, $\partial_\nu \Gamma_\mu = 0$ が簡単にわかるので、このときは特に、 $R_{\mu\nu} = \Gamma_2 \Gamma^2_{\mu\nu} - \Gamma^\rho_{\mu\sigma} \Gamma^\sigma_{\nu\rho}$ ですが、 μ, ν の一方だけが 0、もしくは 3 のときはこの式の 2 項は共に 0 とわかります。よって $R_{\mu\nu}$ の非対角成分で 0 でない可能性があるのは $R_{12} = R_{21}$ だけですが、

$$R_{12} = R_{21} = \Gamma_2 \Gamma^2_{12} - \Gamma^\rho_{1\sigma} \Gamma^\sigma_{2\rho} = \Gamma_2 \Gamma^2_{12} - \Gamma^3_{13} \Gamma^3_{23} = \frac{\cos \theta}{\sin \theta} \frac{1}{r} - \frac{1}{r} \frac{\cos \theta}{\sin \theta} = 0.$$

よって非対角成分は全て 0 です。

9.9 等方座標と重力質量

シュヴァルツシルト解の動径座標を $r = f(\bar{r})$ とおくと、シュヴァルツシルト解の空間的線素の式は、

$$dl^2 = \frac{dr^2}{1 - a/r} + r^2(d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2) = \frac{f'(\bar{r})^2 d\bar{r}^2}{1 - a/f(\bar{r})} + f(\bar{r})^2(d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2)$$

ですが、これが $(d\bar{r}^2 + \bar{r}^2 d\theta^2 + \bar{r}^2 \sin^2 \theta d\phi^2)$ でくくられるとすると、

$$\frac{f'(\bar{r})^2}{1 - a/f(\bar{r})} = \frac{f(\bar{r})^2}{\bar{r}^2} \quad \therefore \frac{df}{d\bar{r}} = \frac{\sqrt{f(f-a)}}{\bar{r}}.$$

この微分方程式は変数分離形で、積分公式：

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x(x-a)}} = \operatorname{arccosh} \left(\frac{2x}{a} - 1 \right) + C$$

に注意すれば、

$$f(\bar{r}) = \frac{Ca\bar{r}}{4} \left(1 + \frac{1}{C\bar{r}} \right)^2$$

と解けます。 C は積分定数ですが、 $C = 4/a$ と選ぶと、

$$r = f(\bar{r}) = \bar{r} \left(1 + \frac{a}{4\bar{r}} \right)^2.$$

そうすると、シュヴァルツシルト解は、

$$d\tau^2 = \left(\frac{\bar{r} - a/4}{\bar{r} + a/4} \right)^2 dt^2 - \left(1 + \frac{a}{4\bar{r}} \right)^4 (d\bar{r}^2 + \bar{r}^2 d\theta^2 + \bar{r}^2 \sin^2 \theta d\phi^2)$$

となりますが、ここでさらに、

$$x^1 = \bar{r} \sin \theta \cos \phi, \quad x^2 = \bar{r} \sin \theta \sin \phi, \quad x^3 = \bar{r} \cos \theta$$

を定義すれば、

$$d\tau^2 = \left(\frac{\bar{r} - a/4}{\bar{r} + a/4} \right)^2 dt^2 - \left(1 + \frac{a}{4\bar{r}} \right)^4 dx^i dx^i, \quad \bar{r} = \sqrt{x^i x^i}$$

となります。\$(t, x^1, x^2, x^3)\$ は等方座標と呼ばれます。

等方座標は遠方でローレンツ座標に漸近し、その摂動は、

$$\phi_{\mu\nu} = -\frac{a}{\bar{r}} \delta_{\nu}^{\mu}$$

です。これをニュートン近似における質量 \$M\$ の球対称物体周囲の重力ポテンシャル：\$\phi_{\mu\nu} = 2\phi \delta_{\nu}^{\mu} = -(2GM/\bar{r}) \delta_{\nu}^{\mu}\$ と比較すると、

$$a = 2GM$$

を得ます。遠方の重力ポテンシャルで推察される質量 \$M\$ を、一般に系の重力質量といいます。シュヴァルツシルト解の重力質量は \$M = a/2G\$ ということとなります。

9.10 シュヴァルツシルト時空における粒子の軌道

ここで、シュヴァルツシルト時空における粒子の軌道を考えてみましょう。

シュヴァルツシルト解の計量 \$g_{\mu\nu}(x)\$ は \$x^0 = t\$ と \$x^3 = \phi\$ を含まず、すなわちこれらは循環座標なので、粒子のラグランジアン \$L = -m (g_{\mu\nu}(x) \dot{x}^{\mu} \dot{x}^{\nu})^{1/2}\$ に対し、

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{x}^0} = -m f(r) \frac{dt}{d\tau}, \quad \frac{\partial L}{\partial \dot{x}^3} = m r^2 \sin^2 \theta \frac{d\phi}{d\tau}$$

が保存量になります (特殊相対論の章参照)。よって、粒子の軌道が平面 \$\theta = \pi/2\$ にあると仮定すると、

$$A = f(r) \frac{dt}{d\tau}, \quad B = r^2 \frac{d\phi}{d\tau}$$

は共に運動の定数です。一方、シュヴァルツシルト時空の線素の式を \$(d\phi)^2\$ で割れば、

$$\left(\frac{d\tau}{d\phi}\right)^2 = f(r) \left(\frac{dt}{d\phi}\right)^2 - \frac{1}{f(r)} \left(\frac{dr}{d\phi}\right)^2 - r^2$$

ですから、これらより、

$$\left(\frac{dr}{d\phi}\right)^2 = \frac{(A^2 - f(r)) r^4}{B^2} - f(r) r^2.$$

\$f(r) = 1 - a/r\$ だったので、

$$\left(\frac{dr}{d\phi}\right)^2 = Cr^4 + Dr^3 - r^2 + ar$$

となります。ここで、 $C = (A^2 - 1)/B^2$, $D = a/B^2$ はやはり運動の定数です。 $u = 1/r$ で変数変換すれば、

$$\left(\frac{du}{d\phi}\right)^2 = C + Du - u^2 + au^3.$$

あるいは両辺を ϕ で微分して、

$$\frac{d^2u}{d\phi^2} = \frac{D}{2} - u + \frac{3a}{2}u^2$$

を得ます。これが粒子の軌道を与える微分方程式です。

右辺の u^2 の項 (非線形項) が、いわば一般相対論的な効果であり、もしこの項がなければ、ニュートン理論同様、解は2次曲線 $u = (1 + \epsilon \sin \phi)/l$ で与えられます。しかし実際にはこの項があるので軌道はより複雑になります。

9.11 惑星の近日点移動

粒子の軌道の近似解として、離心率 ϵ , 半直弦 l の近日点移動する楕円軌道、

$$u = \frac{1 + \epsilon \sin(\eta\phi)}{l} \quad (\epsilon, l, \eta \text{ は定数})$$

を考え (図 9.2)、これを軌道の微分方程式に代入します。ただし離心率 ϵ は十分小さいものとし、その2次を無視するものとします。

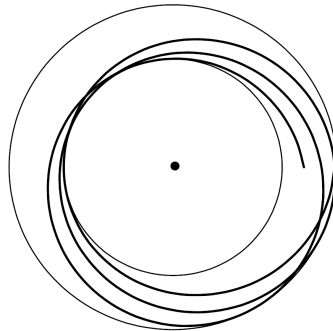


図 9.2: 近日点移動する楕円軌道

そうすると、 $\sin(\eta\phi)$ に関する係数比較から、

$$\eta = \sqrt{1 - \frac{3a}{l}}$$

を得るでしょう。よって、一周における近日点移動は、その角度において、

$$\Delta\phi = \frac{2\pi}{\eta} - 2\pi = 2\pi \left(\frac{1}{\sqrt{1 - 3a/l}} - 1 \right)$$

です。特に太陽系のように重力が弱く、 $a/l \ll 1$ のときは、

$$\Delta\phi \sim \frac{3\pi a}{l} = \frac{6\pi GM}{l}$$

と評価されます。この効果は太陽系第一惑星である水星の近日点移動の誤差を上手く説明することが知られています^(*)。

(*注) 水星の近日点移動の主原因は他の惑星の存在ですが、これら他の惑星の効果を丁寧に取り入れても観測値と一致せず、一般相対論以前、その原因は謎とされていました。水星の内側に未知の天体があるのではないかと等という説も真面目に検討されていたくらいです。しかしここで述べた一般相対論的效果を取り入れるとよく合うというわけです。

9.12 光の湾曲

光は高エネルギー極限の粒子(ほぼ光の速さで進む粒子)と等価のはずですから、シュヴァルツシルト時空内における光の軌道は、同時空内の粒子の軌道において $d\tau/dt \rightarrow 0$ という極限により与えられます。このとき A, B は共に無限大になり、 $D = a/B^2 \rightarrow 0$ です。よって光の軌道を与える微分方程式は、

$$\frac{d^2u}{d\phi^2} = -u + \frac{3a}{2} u^2$$

となります。

$u = 2/(3a)$ すなわち $r = 3a/2$ が解になっていることに注意。ブラックホールの近傍では強力な重力場により光の軌道が曲げられ、シュヴァルツシルト半径のちょうど1.5倍の座標半径の円周上を光が周回できるというわけです。また、重力がなく $a = 0$ のときは、直線 $u = \sin\phi/l$ が解になることに注意。このとき l は原点と直線の距離を意味します。

いま、重力が非常に弱い場合を考え、 a を小さな摂動とみなします。このとき、

$$u = \frac{\sin\phi}{l} + \alpha + \beta \sin^2\phi$$

という軌道を考え、上の微分方程式に代入します。ただし a, α, β の2次以上は無視します。そうすると、 $\sin\phi$ に関する係数比較から、 $\alpha = a/l^2, \beta = -a/(2l^2)$ を得るので、近似解として、

$$u = \frac{\sin\phi}{l} + \frac{a}{l^2} \left(1 - \frac{1}{2} \sin^2\phi \right)$$

を得ます。これは原点付近でわずかに湾曲し、遠方で直線に漸近する軌道を意味しています(図9.3)。

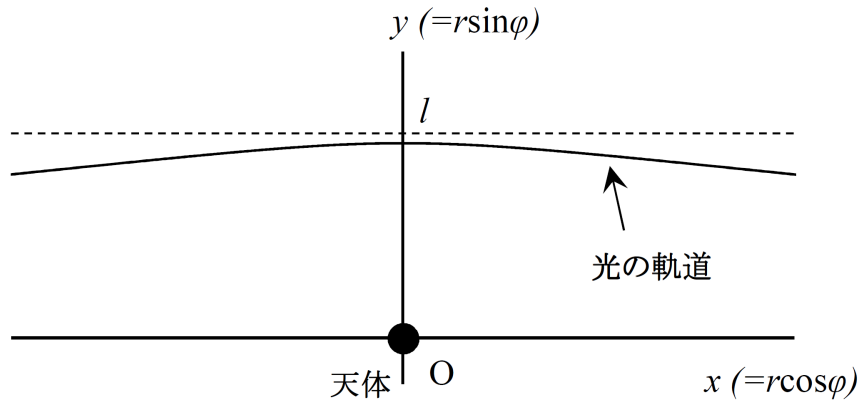


図 9.3: 光の湾曲

$u = 0$ ($r \rightarrow \infty$) とおくと、 $-1 \leq \sin \phi \leq 1$ に注意し、

$$\sin \phi = -a/l \quad \therefore \phi \sim -a/l, \pi + a/l$$

と解かれるので、これは弱い重力場の影響で、光の進む方向が、

$$\Delta \phi \sim \frac{2a}{l} = \frac{4GM}{l}$$

だけ曲がることを意味しています。この現象は重力レンズ効果と呼ばれ、観測的にも正しいことが確かめられています。

(余談) アインシュタインによる一般相対論の定式化は 1916 年ですが、1919 年に早くも皆既日食を利用した重力レンズ効果の検証が行われ、一般相対論の正しさが確認されました。「もし理論が間違いだと判明したらどうされましたか」という質問に、アインシュタインは「その時は神様のことを気の毒に思ったでしょう」と答えたそうです。一般相対論はとても美しいので、もし間違っていたなら、この理論を採用しなかった神様の美的センスのなさを哀れに思っただろう、ということです。

9.13 エネルギー運動量テンソルの巨視的表示

ここでエネルギー運動量テンソル $T^{\mu\nu}$ について少し整備しておきます。

いま、時空上のある 1 点 A と、その近傍の領域 V を考えます。そして、 V における $T^{\mu\nu}$ の平均値を A における $T^{\mu\nu}$ の値として採用するという、一種の巨視化を行います。このとき、 $T^{0i} = 0$ となるような A における局所ローレンツ座標 x^μ があるはずで、これを A の重心系と呼びます。 A の重心系においては V 内の物質の運動が平均として等方的になっているから、

$$T^{00} = \rho, \quad T^{ij} = P\delta_j^i$$

とおけます。このとき ρ は物質のエネルギー密度、 P は圧力を意味します。

一般座標 x'^{μ} に移ると、

$$T'^{\mu\nu} = \frac{\partial x'^{\mu}}{\partial x^0} \frac{\partial x'^{\nu}}{\partial x^0} \rho + \frac{\partial x'^{\mu}}{\partial x^i} \frac{\partial x'^{\nu}}{\partial x^j} P \delta_j^i.$$

一方、計量に関しては、

$$g'^{\mu\nu} = \frac{\partial x'^{\mu}}{\partial x^0} \frac{\partial x'^{\nu}}{\partial x^0} - \frac{\partial x'^{\mu}}{\partial x^i} \frac{\partial x'^{\nu}}{\partial x^j} \delta_j^i.$$

これから、

$$T'^{\mu\nu} = \frac{\partial x'^{\mu}}{\partial x^0} \frac{\partial x'^{\nu}}{\partial x^0} (\rho + P) - g'^{\mu\nu} P.$$

さらに $u^{\mu} := \partial x'^{\mu} / \partial x^0$ は一般座標系における重心系の固有速度とみなせます。プライムをはずして書けば、

$$T^{\mu\nu} = (\rho + P)u^{\mu}u^{\nu} - g^{\mu\nu} P$$

となります。これがエネルギー運動量テンソルの巨視的表示です。

9.14 トルマン方程式

シュヴァルツシルト解は真空におけるアインシュタイン方程式の解で、その中心付近には事象の地平面と呼ばれる特異面があります。すなわちブラックホールを表す解になっています。ここではその中心付近に有限の大きさの球体(星)があるとして、その内部においてアインシュタイン方程式を考えましょう。ただしいぜんとして静的であることと等方性を仮定します：

$$d\tau^2 = f(r)dt^2 - g(r)dr^2 - r^2 d\theta^2 - r^2 \sin^2 \theta d\phi^2.$$

リッチテンソルはシュヴァルツシルト解のところすでに求めました。添字を上げると、

$$R_0^0 = \frac{f''}{2fg} - \frac{f'^2}{4f^2g} - \frac{f'g'}{4fg^2} + \frac{f'}{rfg}, \quad R_1^1 = \frac{f''}{2fg} - \frac{f'^2}{4f^2g} - \frac{f'g'}{4fg^2} - \frac{g'}{rg^2},$$

$$R_2^2 = R_3^3 = \frac{f'}{2rfg} - \frac{g'}{2rg^2} + \frac{1}{r^2g} - \frac{1}{r^2} \quad (\text{非対角成分は } 0).$$

よってスカラー曲率は、

$$R = R_{\mu}^{\mu} = \frac{f''}{fg} - \frac{f'^2}{2f^2g} - \frac{f'g'}{2fg^2} + \frac{2f'}{rfg} - \frac{2g'}{rg^2} + \frac{2}{r^2g} - \frac{2}{r^2}$$

となり、アインシュタインテンソル： $G_\nu^\mu = R_\nu^\mu - (1/2)\delta_\nu^\mu R$ は、

$$G_0^0 = \frac{g'}{rg^2} - \frac{1}{r^2g} + \frac{1}{r^2}, \quad G_1^1 = -\frac{f'}{rfg} - \frac{1}{r^2g} + \frac{1}{r^2},$$

$$G_2^2 = G_3^3 = -\frac{f''}{2fg} + \frac{f'^2}{4f^2g} + \frac{f'g'}{4fg^2} - \frac{f'}{2rfg} + \frac{g'}{2rg^2} \quad (\text{非対角成分は0})$$

となります。一方、エネルギー運動量テンソルは、物質は巨視的には静止していると考え、

$$T_\nu^\mu = (\rho + P)u^\mu u_\nu - \delta_\nu^\mu P = \text{diag}(\rho, -P, -P, -P)_{\mu\nu}.$$

これらからアインシュタイン方程式： $G_\nu^\mu = 8\pi GT_\nu^\mu$ の $\mu = \nu = 0$, $\mu = \nu = 1$ の成分は、それぞれ、

$$\frac{g'}{rg^2} - \frac{1}{r^2g} + \frac{1}{r^2} = 8\pi G\rho \quad (1)$$

$$-\frac{f'}{rfg} - \frac{1}{r^2g} + \frac{1}{r^2} = -8\pi GP \quad (2)$$

となります。 $\mu = \nu = 2$ と $\mu = \nu = 3$ の成分は同じ方程式を与えますが、これは若干複雑なので、代わりに $\nabla_\mu T_\nu^\mu = 0$ の $\nu = 1$ 成分を用います。それは、 $\Gamma^0_{01} = f'/(2f)$ に注意して、

$$P' + \frac{f'}{2f}(\rho + P) = 0 \quad (3)$$

となります。結局、アインシュタイン方程式は (1)(2)(3) が満たされれば満たされます。これら方程式をもう少し解きやすい形にしましょう。

(1) は、

$$g = \left(1 - \frac{\alpha}{r}\right)^{-1} \quad (4)$$

で新しい変数 $\alpha = \alpha(r)$ を定義すれば、

$$\alpha' = 8\pi Gr^2\rho \quad (5)$$

という簡単な微分方程式になります。ただし (4) が特異点を持たないためには、 $\alpha(0) = 0$ という境界条件が必要です。また、(3) は、

$$\frac{f'}{f} = -\frac{2P'}{\rho + P} \quad (6)$$

と変形できますが、これを (2) に代入し、 P' について解けば、

$$P' = -\frac{(\rho + P)(\alpha + 8\pi Gr^3P)}{2r^2(1 - \alpha/r)} \quad (7)$$

となります。これをトルマン方程式(あるいはトルマン・オッペンハイマー・ヴォルコフ方程式、TOV方程式)といいます。

(5)(7) および物質の状態方程式から $\alpha(r), \rho(r), P(r)$ が定まり、このとき (4)(6) から関数 $f(r), g(r)$ が定まります。すなわち、(4) ~ (7) が球対称な星が作る重力場(計量場)についての基礎方程式になります。

9.15 シュヴァルツシルト内部解

星が作る重力場の簡単な例として、状態方程式が $\rho = \text{一定}$ の場合を紹介します。星の半径を R とします。

このとき (5) は、 $\alpha(0) = 0$ に注意して、

$$\alpha(r) = \frac{8}{3} \pi G \rho r^3$$

と解けます。トルマン方程式 (7) に代入すると、

$$P' = \frac{(P + \rho)(3P + \rho)}{4\rho} \frac{A'(r)}{A(r)}, \quad A(r) = 1 - \frac{8}{3} \pi G \rho r^2$$

となり、これは変数分離形で、境界条件 $P(R) = 0$ に注意して、

$$P = \frac{\sqrt{A(r)} - \sqrt{A(R)}}{3\sqrt{A(R)} - \sqrt{A(r)}} \rho$$

と解かれます。圧力に特異性が生じないためには、 $3\sqrt{A(R)} - \sqrt{A(0)} > 0$, すなわち、

$$3\pi G \rho R^2 < 1$$

が満たされる必要があります。このとき (4)(6) は、

$$f(r) = C \left(3\sqrt{A(R)} - \sqrt{A(r)} \right)^2, \quad g(r) = \frac{1}{A(r)}$$

となり、これをシュヴァルツシルト内部解と呼びます。 C は積分定数です。

一方、シュヴァルツシルト(外部)解は、 $f(r) = 1 - a/r$, $g(r) = (1 - a/r)^{-1}$ でしたが、これらが $r = R$ で連結することから、

$$C = \frac{1}{4}, \quad a = \frac{8}{3} \pi G \rho R^3$$

です。 $a = 2GM$ でしたから、この星の重力質量は、

$$M = \frac{4}{3} \pi \rho R^3$$

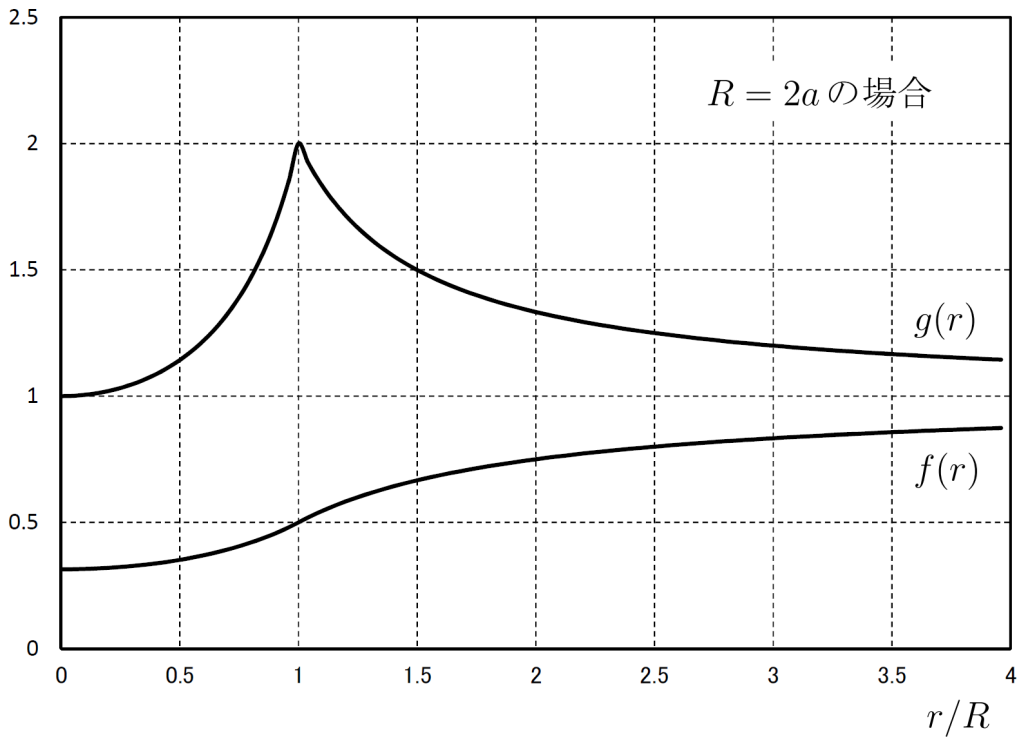


図 9.4: シュヴァルツシルト内部解と外部解

です。例として $R = 2a$ ($GM/R = 1/4$) の場合の $f(r)$ および $g(r)$ のグラフを図 9.4 に示します。

$M = (4/3)\pi\rho R^3$ という結果は、エネルギー密度が ρ である半径 R の星があるので当たり前と思われるかもしれませんが、実はそう単純ではありません。 ρ はあくまで局所ローレンツ系におけるエネルギー密度であり、いまの座標におけるそれとは違います。また、時空は曲がっているで星の体積は $(4/3)\pi R^3$ ではありません。しかし一方で、重力場のエネルギーまで考えると、実はこの星のエネルギーは $M = (4/3)\pi\rho R^3$ であるといえます。

以下では重力場のエネルギー運動量の定義を与え、この辺りの事情を一般的に見ていくことにします。

9.16 ヒルベルト作用の1階微分表現

ヒルベルト作用は、

$$S_g = -\frac{1}{16\pi G} \int d^4x \sqrt{R}$$

でした。ここで R はスカラー曲率で、それは計量の2階微分まで含みます。しかし2階微分の項は1次であるため、積分の中では部分積分により1階微分になおすことができます。これをやってみましょう。

まずスカラー曲率 R は、

$$R = A + B, \quad A = g^{\mu\nu} \partial_\lambda \Gamma^\lambda_{\mu\nu} - g^{\mu\nu} \partial_\mu \Gamma_\nu, \quad B = \Gamma_\mu \tilde{\Gamma}^\mu - \Gamma^\lambda_{\mu\nu} \Gamma^{\mu\nu}_\lambda$$

のように、計量の2階微分を含む部分 A と、含まない部分 B に分けることができます。ここで、

$$\Gamma_\mu = \Gamma^\nu_{\nu\mu}, \quad \tilde{\Gamma}^\mu = \Gamma^{\mu\nu}_\nu$$

です。そうすると、

$$\sqrt{A} = -\partial_\lambda(\sqrt{g^{\mu\nu}}) \Gamma^\lambda_{\mu\nu} + \partial_\mu(\sqrt{g^{\mu\nu}}) \Gamma_\nu + (\text{全微分項})$$

ですが、計量の微分公式や計量条件を用いると、

$$\partial_\lambda(\sqrt{g^{\mu\nu}}) = \sqrt{g^{\mu\nu}} (\Gamma^\mu_\lambda - \Gamma^{\mu\nu}_\lambda - \Gamma^{\nu\mu}_\lambda), \quad \partial_\mu(\sqrt{g^{\mu\nu}}) = -\sqrt{g^{\mu\nu}} \tilde{\Gamma}^\nu$$

と計算されるため、これらから、

$$\sqrt{A} = -2\sqrt{B} + (\text{全微分項})$$

を得ます。よってヒルベルト作用は、

$$S_g = \frac{1}{16\pi G} \int d^4x \sqrt{B}$$

と、計量の1階微分までの式 \sqrt{B} の積分で表すことができるわけです。

上式の変分を考えると、

$$\begin{aligned} \delta S_g &= \frac{1}{16\pi G} \int d^4x \left(\frac{\partial \sqrt{B}}{\partial g_{\mu\nu}} \delta g_{\mu\nu} + \frac{\partial \sqrt{B}}{\partial \partial_\lambda g_{\mu\nu}} \delta \partial_\lambda g_{\mu\nu} \right) \\ &= \frac{1}{16\pi G} \int d^4x \left(\frac{\partial \sqrt{B}}{\partial g_{\mu\nu}} - \partial_\lambda \frac{\partial \sqrt{B}}{\partial \partial_\lambda g_{\mu\nu}} \right) \delta g_{\mu\nu} \end{aligned}$$

ですが、一方、アインシュタイン方程式の導出で見たように、

$$\delta S_g = \frac{1}{16\pi G} \int d^4x \sqrt{G^{\mu\nu}} \delta g_{\mu\nu}$$

ですから ($G^{\mu\nu}$ はアインシュタインテンソル)、これらと比較して、

$$\left[\frac{\partial \sqrt{B}}{\partial g_{\mu\nu}} \right]_{\mu\nu} - \partial_\lambda \left[\frac{\partial \sqrt{B}}{\partial \partial_\lambda g_{\mu\nu}} \right]_{\mu\nu} = \sqrt{G^{\mu\nu}}$$

という恒等式を得ます。これを B に関する恒等式と呼びましょう。 $[\dots]_{\mu\nu}$ は添字 μ, ν についての対称化を意味し、

$$[\Phi_{\mu\nu}]_{\mu\nu} = \frac{1}{2} (\Phi_{\mu\nu} + \Phi_{\nu\mu})$$

で定義されます。

9.17 重力場のエネルギー擬テンソル

エネルギー運動量テンソル $T^{\mu\nu}$ に対して、 $\nabla_\mu T^{\mu\nu} = 0$ 、あるいはこれと等価ですが、

$$\partial_\mu(\sqrt{T^\mu_\nu}) = \frac{1}{2} \sqrt{\partial_\nu g_{\rho\sigma}} T^{\rho\sigma}$$

でした。右辺が0でないため、これは保存則を意味しません。しかしながら一方で、

$$t^\mu_\nu = \frac{1}{16\pi G} \left(\frac{\partial B}{\partial \partial_\mu g_{\rho\sigma}} \partial_\nu g_{\rho\sigma} - B \delta^\mu_\nu + 2\lambda \delta^\mu_\nu \right)$$

という量を定義すると (λ は宇宙定数)、 B に関する恒等式を用いて、

$$\partial_\mu(\sqrt{t^\mu_\nu}) = \frac{1}{16\pi G} \sqrt{\partial_\nu g_{\rho\sigma}} (-G^{\rho\sigma} + \lambda g^{\rho\sigma})$$

が得られるので、アインシュタイン方程式： $G^{\mu\nu} - \lambda g^{\mu\nu} = 8\pi G T^{\mu\nu}$ に注意すると、

$$\partial_\mu(\sqrt{T^\mu_\nu} + \sqrt{t^\mu_\nu}) = 0$$

という保存則を得ます。すなわち空間の十分遠方で $\sqrt{T^i_\nu} + \sqrt{t^i_\nu} = 0$ ($i = 1, 2, 3$) ならば、

$$P_\nu = \int d^3x (\sqrt{T^0_\nu} + \sqrt{t^0_\nu})$$

で与えられる4元運動量 P_ν が保存するという事です。その密度のうち $\sqrt{T^0_\nu}$ は明らかに物質の寄与ですから、 $\sqrt{t^0_\nu}$ はそれ以外の寄与で、重力場の寄与と考えることができます。 t^μ_ν は重力場のエネルギー擬テンソルと呼ばれます。テンソルではないため擬テンソルと称されます。

(余談) エネルギー運動量密度 $\sqrt{T^0_\nu} + \sqrt{t^0_\nu}$ は座標に依存する量で、それゆえある3次元領域 V にどれだけのエネルギー運動量があるかは一般に座標に依存します。しかし空間遠方で計量が定数的になるという条件のもとで、系全体のエネルギー運動量 P_ν は座標に依存しない概念になります。なぜなら遠方で計量が定数的であることを保持しながら、ある時刻では座標 A 、別の時刻では座標 B となるようにできますが、このとき P_ν は保存するので、どちらの座標においても同じ値を与えるからです。

9.18 エネルギー運動量密度の全微分表示

ここではエネルギー運動量密度 $\sqrt{T^\mu_\nu} + \sqrt{t^\mu_\nu}$ が時空座標の全微分で与えられることを証明します。

まず線形座標変換 $x'^\mu = x^\mu + a^\mu_\nu x^\nu$ を考えます。ただし係数 a^μ_ν は無限小量とし、その高次項は無視します。このとき計量の変分は、

$$\delta g_{\mu\nu} = g'_{\mu\nu}(x') - g_{\mu\nu}(x) = -a^\rho_\mu g_{\rho\nu} - a^\rho_\nu g_{\rho\mu}.$$

ここでの変分は同じ時空点において差を取るもので、同じ座標値において差を取るリー微分とは異なります。同様に、計量の座標微分 $\partial_\lambda g_{\mu\nu}$ の変分は、これが線形変換に関してはテンソルとして振舞うことに注意して、

$$\delta\partial_\lambda g_{\mu\nu} = -a^\rho{}_\mu \partial_\lambda g_{\rho\nu} - a^\rho{}_\nu \partial_\lambda g_{\mu\rho} - a^\rho{}_\lambda \partial_\rho g_{\mu\nu}.$$

また、

$$\delta\sqrt{B} = \frac{1}{2} \sqrt{B} g^{\mu\nu} \delta g_{\mu\nu} = -a^\rho{}_\rho \sqrt{B}.$$

そうすると \sqrt{B} の変分は、線形変換に関して B がスカラーとして振舞うので、

$$\delta(\sqrt{B}) = -a^\rho{}_\rho \sqrt{B}.$$

一方、 \sqrt{B} は計量とその1階微分の関数ですから、

$$\begin{aligned} \delta(\sqrt{B}) &= \frac{\partial\sqrt{B}}{\partial g_{\mu\nu}} \delta g_{\mu\nu} + \frac{\partial\sqrt{B}}{\partial\partial_\lambda g_{\mu\nu}} \delta\partial_\lambda g_{\mu\nu} \\ &= -2 \left[\frac{\partial\sqrt{B}}{\partial g_{\mu\nu}} \right]_{\mu\nu} a^\rho{}_\mu g_{\rho\nu} - 2 \left[\frac{\partial\sqrt{B}}{\partial\partial_\lambda g_{\mu\nu}} \right]_{\mu\nu} a^\rho{}_\mu \partial_\lambda g_{\rho\nu} - \frac{\partial\sqrt{B}}{\partial\partial_\lambda g_{\mu\nu}} a^\rho{}_\lambda \partial_\rho g_{\mu\nu}. \end{aligned}$$

上2式を比較して、 $a^\rho{}_\mu$ が任意であることに注意すれば、

$$2 \left[\frac{\partial\sqrt{B}}{\partial g_{\mu\nu}} \right]_{\mu\nu} g_{\rho\nu} + 2 \left[\frac{\partial\sqrt{B}}{\partial\partial_\lambda g_{\mu\nu}} \right]_{\mu\nu} \partial_\lambda g_{\rho\nu} + \frac{\partial\sqrt{B}}{\partial\partial_\mu g_{\lambda\nu}} \partial_\rho g_{\lambda\nu} - \delta^\mu{}_\rho \sqrt{B} = 0$$

という恒等式を得ます。最初の2項は、部分積分して B に関する恒等式を用いると、 $2\sqrt{G}^\mu{}_\rho + 2\partial_\lambda F^{\lambda\mu}{}_\rho$ となります。ここで、

$$F^{\lambda\mu}{}_\rho = \left[\frac{\partial\sqrt{B}}{\partial\partial_\lambda g_{\mu\nu}} \right]_{\mu\nu} g_{\rho\nu}.$$

一方、後ろの2項は $t^\mu{}_\nu$ の定義から $16\pi G\sqrt{t}^\mu{}_\rho - 2\lambda\sqrt{\delta}^\mu{}_\rho$ であるとわかり、結果、アインシュタイン方程式： $G^\mu{}_\rho - \lambda\delta^\mu{}_\rho = 8\pi GT^\mu{}_\rho$ に注意して、

$$\sqrt{T}^\mu{}_\rho + \sqrt{t}^\mu{}_\rho = -\frac{1}{8\pi G} \partial_\lambda F^{\lambda\mu}{}_\rho$$

を得ます。これが証明したかった式です。

$F^{\lambda\mu}{}_\rho$ のあらわな式は、 B の定義式から丁寧に計算すれば、

$$F^{\lambda\mu}{}_\rho = \frac{1}{2} \sqrt{B} \left(\delta^\mu{}_\rho \tilde{\Gamma}^\lambda - \delta^\mu{}_\rho \Gamma^\lambda + g^{\lambda\mu} \Gamma_\rho + \delta^\lambda{}_\rho \Gamma^\mu - 2\Gamma^{\lambda\mu}{}_\rho \right)$$

となるでしょう。

9.19 星のエネルギー

一般に定常的で球対称な系を考えます。等方座標を採用し、計量を、

$$g_{00} = f(r), \quad g_{ij} = -g(r) \delta_j^i, \quad g_{0i} = g_{i0} = 0 \quad (r = \sqrt{x^i x^i})$$

とします。このとき接続係数は、

$$\Gamma_{00i} = \Gamma_{0i0} = -\Gamma_{i00} = \frac{f'(r)x^i}{2r}, \quad \Gamma_{ijk} = \frac{g'(r)}{2r} (x^i \delta_k^j - x^k \delta_j^i - x^j \delta_i^k)$$

で、他の成分は 0 になります。また、 $\sqrt{-g} = \sqrt{f(r)g(r)^3}$ 。これらから、

$$F^{00}_0 = 0, \quad F^{i0}_0 = \sqrt{\frac{f(r)}{g(r)}} \frac{g'(r)x^i}{r}$$

を得るでしょう。

シュヴァルツシルト解：

$$f(r) = \left(\frac{r-b}{r+b}\right)^2, \quad g(r) = \left(\frac{r+b}{r}\right)^4, \quad b = \frac{a}{4} = \frac{GM}{2}$$

においては、

$$F^{i0}_0 = \frac{4b(b-r)x^i}{r^4}$$

となります。よって、原点を中心とし、座標半径 r_0 の球内部の領域が持つエネルギーは、

$$\begin{aligned} E(r_0) &= \int_{r < r_0} d^3x (\sqrt{T^0_0} + \sqrt{t^0_0}) = \frac{-1}{8\pi G} \int_{r < r_0} d^3x \partial_i F^{i0}_0 \\ &= \frac{-1}{8\pi G} \int_{r=r_0} d^2x_i F^{i0}_0 = \frac{2b(r_0-b)}{Gr_0} = M \left(1 - \frac{GM}{2r_0}\right) \end{aligned}$$

と評価されます。ガウスの定理により、空間積分が $r = r_0$ の球面上の積分に帰着したことに注意してください。このためこの結果は、 $r = r_0$ でシュヴァルツシルト解になっている全ての系において正しいこととなります。

特に系全体のエネルギーは、

$$P_0 = E(\infty) = M$$

です。すなわち、遠方の重力ポテンシャルから推察される星の重力質量 M と、系全体のエネルギー P_0 は、正確に一致するわけです。また、 $E(GM/2) = 0$ がわかりますが、これはブラックホールの内部(事象の地平面の内部)のエネルギーが正

確に 0 であることを意味しています^(*)。シュヴァルツシルト解のエネルギー M は、地平面外部の重力場が全て担っているわけです。

一方、座標の中心に密度 ρ が一定の星がある場合を考えると、シュヴァルツシルト内部解：

$$d\tau^2 = \frac{1}{4} (3\sqrt{A(R)} - \sqrt{A(r)})^2 dt^2 - \frac{1}{A(r)} dr^2 - r^2 d\theta^2 - r^2 \sin^2 \theta d\phi^2,$$

$$A(r) = 1 - \frac{8}{3} \pi G \rho r^2, \quad M = \frac{4}{3} \pi \rho R^3$$

を用いて、物質のエネルギーは、

$$P_0^{\text{物質}} = \int d^3x \sqrt{T_0^0} = \int_0^R dr \int_0^\pi d\theta \int_0^{2\pi} d\phi \frac{3\sqrt{A(R)} - \sqrt{A(r)}}{2\sqrt{A(r)}} r^2 \sin \theta \rho$$

$$= \frac{3M}{2R^3} \int_0^R dr \left(3r^2 \sqrt{\frac{1 - 2GM/R}{1 - 2GM r^2/R^3}} - r^2 \right) = Mh \left(\frac{2GM}{R} \right)$$

と見積もられ、ここで、

$$h(x) = \frac{7}{4} - \frac{9}{4x} + \frac{9\sqrt{1-x} \arcsin \sqrt{x}}{4x\sqrt{x}}$$

です。 R は星の座標半径ですが、計量の式からわかるように、これは球面の面積が $4\pi R^2$ になるように定められた座標半径で、等方座標における半径や実際の動径距離とは異なることに注意してください。

関数 $h(x)$ を $x = 0$ の周りで展開すると、

$$h(x) = 1 - \frac{3x}{10} + O(x^2)$$

となることが確かめられるので、特に非相対論的な星 ($GM/R \ll 1$) においては、

$$P_0^{\text{物質}} \sim M - \frac{3GM^2}{5R}$$

と近似され、また、重力場のエネルギーは、

$$P_0^{\text{重力場}} = M - P_0^{\text{物質}} \sim \frac{3GM^2}{5R}$$

と近似されます。これはニュートン理論の結果と一致しています。

(*注) 星が重力崩壊してできるブラックホールは、ここで扱っているような物質のないものとは内部構造が異なり、地平面の球殻周囲に物質が寄り集まり、地平面の時間凍結効果により準定常的とみなされる矮小天体です。このようなブラックホールはその内部がフラットな真空となり、やはり内部のエネルギーは 0 になります。外部の世界から観測する限り、物質が降着するブラックホールも、そうでない真性のブラックホールも、まったく区別はつかないことに注意してください。

9.20 慣性系のひきずりとカー解

ここでは回転する天体を作る弱い重力場について考えてみましょう。

座標の中心に定常的に回転する軸対称な天体があるものとし、回転の方向を x^3 方向とします。天体のエネルギー運動量テンソルを $T^{\mu\nu}$ とすると、重力場の遅延ポテンシャルの式は、系の定常性から、

$$\psi^{\mu\nu}(\mathbf{r}) = -4G \int d^3\mathbf{r}' \frac{T^{\mu\nu}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}$$

ですが、 $1/|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|$ が、

$$\frac{1}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} = \frac{1}{r} + \frac{\mathbf{r}\cdot\mathbf{r}'}{r^3} + \dots$$

のように展開されることに注意すると、 $|\mathbf{r}| \gg$ 天体の大きさ という近似のもとで、

$$\psi^{\mu\nu}(\mathbf{r}) = -\frac{4G}{r} \int d^3\mathbf{r}' T^{\mu\nu}(\mathbf{r}') - \frac{4G}{r^3} \int d^3\mathbf{r}' \mathbf{r}\cdot\mathbf{r}' T^{\mu\nu}(\mathbf{r}').$$

ここで $r = |\mathbf{r}| = \sqrt{x^i x^i}$ です。系の軸対称性に注意すると、特に 00 成分は、

$$\psi^{00} = -\frac{4GM}{r}, \quad M = \int d^3\mathbf{r}' T^{00}(\mathbf{r}').$$

M は天体の質量を意味します。また、同じく軸対称性から、

$$\psi^{01} = \psi^{10} = -\frac{4Gx^2}{r^3} \int d^3\mathbf{r}' x'^2 T^{01}(\mathbf{r}'),$$

$$\psi^{02} = \psi^{20} = -\frac{4Gx^1}{r^3} \int d^3\mathbf{r}' x'^1 T^{02}(\mathbf{r}')$$

がわかるでしょうが、天体の角運動量第3成分が $J = \int d^3\mathbf{r} (x^1 T^{02}(\mathbf{r}) - x^2 T^{01}(\mathbf{r}))$ であり、軸対称性から $\int d^3\mathbf{r} x^1 T^{02}(\mathbf{r}) = -\int d^3\mathbf{r} x^2 T^{01}(\mathbf{r})$ がいえるので、この式の両辺は $J/2$ と評価されます。よって、

$$\psi^{01} = \psi^{10} = \frac{2GJx^2}{r^3}, \quad \psi^{02} = \psi^{20} = -\frac{2GJx^1}{r^3}.$$

さらに、 $T^{03} = 0$ および天体の回転が非相対論的であるとすれば、最低次の近似では $T^{ij} = 0$ と評価できるので、 $\psi^{03} = \psi^{30} = 0$, $\psi^{ij} = 0$ です。

そうすると、計量の摂動 $\phi_{\mu\nu} = \psi_{\mu\nu} - (1/2)\eta_{\mu\nu}\psi$ は、

$$\phi_{00} = \phi_{11} = \phi_{22} = \phi_{33} = -\frac{2GM}{r},$$

$$\phi_{01} = \phi_{10} = -\frac{2GJx^2}{r^3}, \quad \phi_{02} = \phi_{20} = \frac{2GJx^1}{r^3}$$

で、他の成分は 0 です。線素の式は、

$$\begin{aligned} d\tau^2 &= \left(1 - \frac{2GM}{r}\right) dt^2 - \left(1 + \frac{2GM}{r}\right) dx^i dx^i + \frac{4GJ}{r^3} dt(x^1 dx^2 - x^2 dx^1) \\ &= \left(1 - \frac{2GM}{r}\right) dt^2 - \left(1 + \frac{2GM}{r}\right) (dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2 \theta d\phi^2) \\ &\quad + \frac{4GJ \sin^2 \theta}{r} dt d\phi. \end{aligned}$$

ここで $x^1 = r \sin \theta \cos \phi$, $x^2 = r \sin \theta \sin \phi$, $x^3 = r \cos \theta$ で極座標を導入しました。 $dt d\phi$ の項があり、系が静的でないことがわかるでしょう。すなわちこの系は大域的に時計を同期できない系になっているのです。 $\phi' = \phi - \omega t$ により角速度 ω で回転する系に移れば、 J , ω の高次を無視して、

$$\begin{aligned} d\tau^2 &= \left(1 - \frac{2GM}{r}\right) dt^2 - \left(1 + \frac{2GM}{r}\right) (dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2 \theta d\phi'^2) \\ &\quad + 2 \left(\frac{2GJ}{r^3} - \omega\right) r^2 \sin^2 \theta dt d\phi' \end{aligned}$$

となります。天体からの座標距離が r の円周においては、角速度 $\omega = 2GJ/r^3$ で回転する系が、むしろ一周にわたって時計を同期できる系になっていることがわかります。天体の回転により、その周囲において静的な基準系がひきずられるこの一般相対論的效果は、慣性系のひきずりなどと呼ばれます。

ちなみに、真空において軸対称性を仮定した場合、アインシュタイン方程式は、

$$\begin{aligned} d\tau^2 &= \left(1 - \frac{ar}{r^2 + b^2 \cos^2 \theta}\right) dt^2 - \frac{r^2 + b^2 \cos^2 \theta}{r^2 - ar + b^2} dr^2 - (r^2 + b^2 \cos^2 \theta) d\theta^2 \\ &\quad - \left(r^2 + b^2 + \frac{ab^2 r \sin^2 \theta}{r^2 + b^2 \cos^2 \theta}\right) \sin^2 \theta d\phi^2 + \frac{2abr \sin^2 \theta}{r^2 + b^2 \cos^2 \theta} dt d\phi \end{aligned}$$

のように厳密に解かれますが、これをカー解といいます。 a , b は定数ですが、遠方における重力場から、

$$a = 2GM, \quad b = J/M.$$

ここで M は系のエネルギー (有効質量)、 J は角運動量です。すなわちこの解は、回転するブラックホール、あるいは回転する星の外部解になっていると考えられます。特に $b = 0$ でシュヴァルツシルト解になります。

索引

あ	
アインシュタインの重力定数	5
アインシュタインの線形近似式	6
アインシュタイン・ヒルベルト作用	3
アインシュタイン方程式	4
一般相対論	3
一般相対論の作用	5
宇宙項	5
宇宙定数	5
エネルギー運動量テンソルの巨視的表示	18
か	
カー解	28
慣性系のひきずり	28
巨視化	17
近日点移動	15
さ	
事象の地平面	12
重心系	17
自由落下系	4
重力質量	14
重力赤方偏移	10
重力の遅延ポテンシャル	7
重力波	10
重力場のエネルギー擬テンソル	23
重力レンズ効果	17
シュヴァルツシルト解	12
シュヴァルツシルト内部解	20
シュヴァルツシルト半径	12
た	
TOV 方程式	20
等価原理	4
等方座標	14
トルマン方程式	20
な	
ニュートン近似	7
は	
光の湾曲	16
ヒルベルト作用	3
ヒルベルト作用の 1 階微分表現	21
ブラックホール	12
星のエネルギー	25
や	
弱い重力場	6