あもんノート

ユークリッド幾何学、ニュートン力学から、相対論、宇宙論、量子論、場の量子論、素粒子論、そして超ひも理論まで、理論物理学を簡潔にかつ幅広く網羅したノートです。TOP へは下の URL をクリックして行けます。専用の画像掲示板で、ご意見、ご質問等も受け付けております。

http://amonphys.web.fc2.com/

目 次

第27章　フェルミオン

実スカラー場や実ベクトル場の成分は古典論において実数に値を取るのでした。一方、フェルミオンを生成するディラック場の成分は古典論においては複素グラスマン数と呼ばれる代数に値を取ると考えます。この章ではまずグラスマン数の数理について紹介し、その後、ディラック場を含む理論の経路積分表式、および伝播関数展開表式を得ることにします。

27.1　グラスマン数

反可換な数 (代数) を一般に**グラスマン数**といいます。すなわち ξ, η をグラスマン数とすると、

$$\xi\eta = -\eta\xi, \quad \xi^2 = 0, \quad \eta^2 = 0$$

です。グラスマン数偶数個の積でできた数を**グラスマン偶**、奇数個の積でできた数を**グラスマン奇**といいます。実数や複素数はグラスマン偶、グラスマン数自体はグラスマン奇です。また、グラスマン奇とグラスマン奇は反可換、グラスマン偶とグラスマン奇は可換、グラスマン偶とグラスマン偶も可換になることがわかるでしょう。

グラスマン数 ξ の関数 $f(\xi)$ をマクローリン展開すると、$\xi^2 = 0$ に注意して、

$$f(\xi) = f_0 + f_1\xi$$

です。すなわちグラスマン数の関数は高々1次関数です。よって一般に、

$$\frac{\partial^2}{\partial\xi^2} f(\xi) = 0$$

がいえます。これはグラスマン数による微分演算子 $\partial/\partial\xi$ がグラスマン奇であるからとして理解することもできます。

グラスマン数の微分演算子は次のライプニッツ則を持つものとします :

$$\frac{\partial}{\partial\xi}(AB) = \frac{\partial A}{\partial\xi} B + \|A\| A \frac{\partial B}{\partial\xi.}$$

ここで $\|A\|$ は、A がグラスマン偶のとき $+1$, グラスマン奇のとき -1 を与える符号因子です。この微分を特に**左微分**といいます。一方、

$$\frac{\bar{\partial}}{\partial\xi} AB = A \frac{\bar{\partial} B}{\partial\xi} + \|B\| \frac{\bar{\partial} A}{\partial\xi} B$$

でライプニッツ則を定義することもでき、この場合の微分を**右微分**といいます。グラスマン数による微分はこのように2通り存在するわけです。

27.2 グラスマン数による積分

グラスマン数による積分は、部分積分可能性：

$$\int d\xi \, \frac{\partial}{\partial \xi} f(\xi) = 0$$

が成り立つように、左微分と同義であるとします：

$$\int d\xi \; = \frac{\partial}{\partial \xi.}$$

そうすると、N 個のグラスマン数 $\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_N$ による重積分は、

$$\int d^N\xi = \int d\xi_1 \cdots \int d\xi_N = \frac{\partial}{\partial \xi_1} \cdots \frac{\partial}{\partial \xi_N}$$

ですが、線形変換: $\xi_i \to \xi'_i$ を考えると、$\partial/\partial\xi_i$ が互いに反可換であることに注意して、

$$\begin{aligned}
\int d^N\xi &= \frac{\partial}{\partial \xi_1} \cdots \frac{\partial}{\partial \xi_N} = \frac{\partial \xi'_{i_1}}{\partial \xi_1} \cdots \frac{\partial \xi'_{i_N}}{\partial \xi_N} \, \frac{\partial}{\partial \xi'_{i_1}} \cdots \frac{\partial}{\partial \xi'_{i_N}} \\
&= \frac{\partial \xi'_{i_1}}{\partial \xi_1} \cdots \frac{\partial \xi'_{i_N}}{\partial \xi_N} \; \epsilon_{i_1 \cdots i_N} \, \frac{\partial}{\partial \xi'_1} \cdots \frac{\partial}{\partial \xi'_N} \\
&= \det \frac{\partial \xi'}{\partial \xi} \int d^N\xi'.
\end{aligned}$$

ヤコビアン $\det(\partial\xi'/\partial\xi)$ の出方が実数の場合と逆であることに注意してください。

グラスマン数のデルタ関数は、極めて単純に、

$$\delta(\xi) = \xi$$

で定義されます。実際このとき、グラスマン数 $\xi, \eta,$ グラスマン偶に値をとる関数 $f(\xi)$ に対して、

$$\begin{aligned}
\int d\xi \, f(\xi)\delta(\xi - \eta) &= \frac{\partial}{\partial \xi} (f_0 + f_1\xi)(\xi - \eta) = \frac{\partial}{\partial \xi} (f_0\xi - f_0\eta - f_1\xi\eta) \\
&= f_0 + f_1\eta = f(\eta).
\end{aligned}$$

$f(\xi)$ がグラスマン偶であることから、f_0 はグラスマン偶、f_1 はグラスマン奇であることに注意してください。次の積分表示があります：

$$\delta(\xi) = \int d\eta \; e^{\eta\xi}.$$

これは $e^{\eta\xi}=1+\eta\xi$ に注意すれば簡単に確かめられるでしょう。

次の公式は特に特異系の量子論において重要になります：

$$\int d^N\xi\, d^N\eta\ e^{\eta_i A_{ij}\xi_j}=\det A.$$

ただし A_{ij} はグラスマン偶で、$d^N\xi\, d^N\eta=d\xi_1 d\eta_1\cdots d\xi_N d\eta_N$ です。

[証明] $\xi_i'=A_{ij}\xi_j$ で変数変換すると、左辺 $=\det(\partial\xi'/\partial\xi)\int d^N\xi'\, d^N\eta\ e^{\eta_i\xi_i'}$ ですが、$\det(\partial\xi'/\partial\xi)=\det A$. また、続く積分部が、

$$\begin{aligned}\int d\xi_1' d\eta_1\cdots d\xi_N' d\eta_N\, e^{\eta_1\xi_1'}\cdots e^{\eta_N\xi_N'} &= \int d\xi_1' d\eta_1\, e^{\eta_1\xi_1'}\cdots\int d\xi_N' d\eta_N\, e^{\eta_N\xi_N'}\\ &= \int d\xi_1'\,\delta(\xi_1')\cdots\int d\xi_N'\,\delta(\xi_N')=1\end{aligned}$$

となるので与題が得られます。[証明終]

27.3 フェルミオンの量子力学

ただ１つの複素グラスマン数 $\Psi=\Psi(t)$ を力学変数とする簡単な力学系、

$$S[\Psi,\Psi^*]=\int dt\, L,\quad L=i\Psi^*\dot\Psi-V\Psi^*\Psi$$

を考えてみましょう。ここで V は実数で、$V>0$ を仮定します。グラスマン数の積の複素共役が、

$$(\xi\eta)^*=\eta^*\xi^*$$

で定義されることに注意すると、$\Psi^*\Psi$ は実の (複素共役不変な) グラスマン偶と考えられますが、$i\Psi^*\dot\Psi$ は実ではありません。しかしその時間積分は、

$$\left(\int dt\, i\Psi^*\dot\Psi\right)^*=\int dt\,(-i)\dot\Psi^*\Psi=\int dt\, i\Psi^*\dot\Psi$$

なので実です。よって作用汎関数は実のグラスマン偶と考えられます。

正準共役変数は右微分により定義され、$(\bar\partial/\partial\dot\Psi)\, L=i\Psi^*$ となることに注意すると、正準反交換関係は、

$$\{\Psi(t),\Psi^*(t)\}=1,\quad\{\Psi(t),\Psi(t)\}=0\quad(\forall t)$$

で与えられます。ここで $\{A,B\}=AB+BA$ は反交換子です。Ψ の正準共役として Ψ^* が現れたので、Ψ^* の正準共役についてはもはや問わないことにします。このような量子化は**簡便量子化**と呼ばれます。

ハミルトニアンは、

$$H = i\Psi^*\dot{\Psi} - L = V\Psi^*\Psi$$

となるので、基底状態 $|0>$ を、

$$\Psi(t)|0>= 0, \quad <0|0>= 1$$

で定義すると、$H|0>= 0$ ですから、$|0>$ は時間に依存しません。一方、

$$|1>= \Psi^*(t)|0>$$

で励起状態を定義すると、そのエネルギー固有値は V になります。エネルギーの固有ベクトルはこれだけで、よってこの量子力学系の状態空間は2次元ということになります。状態空間が有限次元になるのはこのようなフェルミオンの系に限られます。

27.4 フェルミオンの経路積分

力学変数 $\Psi(t)$ の複素グラスマン固有値 ψ の固有ベクトルを $|\psi, t>$ とすると、

$$\Psi(t)|\psi, t>= \psi|\psi, t>$$

ですが、その解は、

$$|\psi, t>= (1 - \psi\Psi^*(t))\,|0>$$

と書けます。実際、このベクトルに $\Psi(t)$ を乗じても ψ を乗じても、どちらも $\psi|0>$ となることがわかるでしょう。固有ベクトル $|\psi, t>$ は、文献によってはフェルミオンの**コヒーレント状態**などと呼ばれます。

固有ベクトルの内積は、

$$\begin{aligned}<\psi, t|\psi', t> &= <0|(1 - \Psi(t)\psi^*)(1 - \psi'\Psi^*(t))|0> \\ &= <0|0> + \psi^*\psi' <0|\Psi(t)\Psi^*(t)|0> \\ &= 1 + \psi^*\psi' = e^{\psi^*\psi'}\end{aligned}$$

となるので、これに対応して、完全性の式は、

$$\int d\psi^* d\psi \; |\psi, t> e^{\psi\psi^*} <\psi, t| = 1$$

となります。実際このとき、

$$\begin{aligned}\text{左辺} \times |\psi', t> &= \int d\psi^* d\psi \; |\psi, t> e^{\psi\psi^*} e^{\psi^*\psi'} = -\int d\psi d\psi^* \, |\psi, t> \; e^{\psi^*(\psi' - \psi)} \\ &= -\int d\psi \, |\psi, t> \delta(\psi' - \psi) = \int d\psi \, |\psi, t> \delta(\psi - \psi') = |\psi', t> .\end{aligned}$$

そうすると、異なる時刻 t_F, t_I における力学変数の固有ベクトルの内積は、2つの時刻の間を、

$$t_F = t_N > t_{N-1} > \cdots > t_1 > t_0 = t_I, \quad t_{i+1} - t_i = \Delta t = \frac{t_F - t_I}{N}$$

のように Δt 間隔で N 等分し、各時刻における完全系の式を挟んで、

$$\begin{aligned} <\psi_F, t_F|\psi_I, t_I> = \int d\psi_1^* d\psi_1 \cdots d\psi_{N-1}^* d\psi_{N-1} \\ e^{-\psi_F \psi_F^*} \prod_{i=0}^{N-1} e^{\psi_{i+1}\psi_{i+1}^*} <\psi_{i+1}, t_{i+1}|\psi_i, t_i> \end{aligned}$$

と書けるでしょう。分割数 N が大きく、Δt が十分小さいとすると、

$$\begin{aligned} e^{\psi_{i+1}\psi_{i+1}^*} <\psi_{i+1}, t_{i+1}|\psi_i, t_i> &= e^{\psi_{i+1}\psi_{i+1}^*} <\psi_{i+1}, t_i|\, e^{-i\Delta t H}|\psi_i, t_i> \\ &= e^{\psi_{i+1}\psi_{i+1}^*} <\psi_{i+1}, t_i|\, e^{-i\Delta t V \Psi^*(t)\Psi(t)}|\psi_i, t_i> \\ &= e^{-\psi_{i+1}^*\psi_{i+1}}\, e^{-i\Delta t V \psi_{i+1}^*\psi_i}\, e^{\psi_{i+1}^*\psi_i} = e^{-\psi_{i+1}^*(\psi_{i+1}-\psi_i) - i\Delta t V \psi_{i+1}^*\psi_i} \\ &= e^{i\Delta t(\, i\psi_{i+1}^*\dot{\psi}_i - V\psi_{i+1}^*\psi_i\,)}, \quad \dot{\psi}_i = \frac{\psi_{i+1} - \psi_i}{\Delta t} \end{aligned}$$

であり、$N \to \infty$ の連続極限を取ることで、

$$<\psi_F, t_F|\psi_I, t_I> = e^{-\psi_F\psi_F^*} \int_{\substack{\psi(t_F) = \psi_F \\ \psi(t_I) = \psi_I}} \mathcal{D}\psi^* \mathcal{D}\psi \;\; \exp\left(i \int_{t_I}^{t_F} dt\, L \right)$$

を得ます。

上式を用いると、$t_1 > t_2$ のとき、

$$<0|\,\Psi(t_1)\Psi(t_2)|0> = \int d\psi_-^* d\psi_-\, e^{\psi_-\psi_-^*} \int_{\psi(-\infty)=\psi_-} \mathcal{D}\psi^* \mathcal{D}\psi\, \psi(t_1)\psi(t_2)\, e^{iS[\psi,\psi^*]}$$

を示すことができます。$<0|\psi, t> = 1$ に注意。よって一般に、フェルミオンの系のグリーン関数の経路積分表式は、

$$\begin{aligned} &<0|\, T\Psi^{(*)}(t_1) \cdots \Psi^{(*)}(t_n)|0> \\ &\quad = \int d\psi_-^* d\psi_-\, e^{\psi_-\psi_-^*} \int_{\psi(-\infty)=\psi_-} \mathcal{D}\psi^* \mathcal{D}\psi\, \psi^{(*)}(t_1) \cdots \psi^{(*)}(t_n)\, e^{iS[\psi,\psi^*]} \end{aligned}$$

と書けることがわかります。無限過去において $e^{\psi\psi^*}$ の重みを付けて積分する経路積分を単に $\int \mathcal{D}\psi^* \mathcal{D}\psi$ と書けば、

$$<0|\, T\Psi^{(*)}(t_1) \cdots \Psi^{(*)}(t_n)|0> = \int \mathcal{D}\psi^* \mathcal{D}\psi\, \psi^{(*)}(t_1) \cdots \psi^{(*)}(t_n)\, e^{iS[\psi,\psi^*]}$$

です。

27.5　ディラック場の経路積分

一般に複数の実場 $\varphi_i(x)$ と複数のディラック場 $\psi_i(x)$ を含む相対論的場の理論を考え、作用汎関数を、

$$S[\,\varphi,\psi,\bar{\psi}\,]=\frac{i}{2}\,\varphi{\cdot}K{\cdot}\varphi+i\bar{\psi}{\cdot}K_D{\cdot}\psi+S_I[\,\varphi,\psi,\bar{\psi}\,]$$

としましょう。K は実場の自由項演算子、K_D はディラック場の自由項演算子で、

$$K_D^{ij}(x,y)=-i(i\partial\!\!\!/_x-m_i)\delta^i_j\delta^4(x-y)$$

です。$\partial\!\!\!/=\gamma^\mu\partial_\mu$ という略記を用いています。その逆である伝播関数は、

$$\Delta_D^{ij}(x,y)=\int\frac{d^4k}{(2\pi)^4}\,\frac{i\delta^i_j}{k\!\!\!/-m_i}\,e^{-ik\cdot(x-y)}=\int\frac{d^4k}{(2\pi)^4}\,\frac{i\delta^i_j(k\!\!\!/+m_i)}{k^2-m_i^2}\,e^{-ik\cdot(x-y)}$$

となるでしょう。ここで作用汎関数に正則化のための項：$i\epsilon\bar{\psi}{\cdot}\psi$ $(\epsilon\to+0)$ があると考えれば、それは $m_i\to m_i-i\epsilon$ $\therefore m_i^2\to m_i^2-i\epsilon'$ $(\epsilon'=2m_i\epsilon\to+0)$ という修正を生み、伝播関数の特異性が消えるのは実場 (ボゾン) の場合と同様です。すなわち、

$$\Delta_D^{ij}(x,y)=\int\frac{d^4k}{(2\pi)^4}\,\frac{i\delta^i_j(k\!\!\!/+m_i)}{k^2-m_i^2+i\epsilon}\,e^{-ik\cdot(x-y)}.$$

この場の理論を量子化し、グリーン関数の生成汎関数を、

$$Z[J,\bar{\eta},\eta]=<0|\,Te^{J\cdot\varphi+\bar{\eta}\cdot\psi+\bar{\psi}\cdot\eta}|0>$$

で定義します。$\psi_i(x)$ のソースを $\bar{\eta}_i(x)$, $\bar{\psi}_i(x)$ のソースを $\eta_i(x)$ としました。これらソースもグラスマン数であると考えます。生成汎関数の経路積分表式が、

$$Z[J,\bar{\eta},\eta]=\int\mathcal{D}\varphi\mathcal{D}\psi^*\mathcal{D}\psi\,e^{iS[\varphi,\psi,\bar{\psi}]+J\cdot\varphi+\bar{\eta}\cdot\psi+\bar{\psi}\cdot\eta}\Big/\int\mathcal{D}\varphi\mathcal{D}\psi^*\mathcal{D}\psi\,e^{iS[\varphi,\psi,\bar{\psi}]}$$

となることはフェルミオンの量子力学における経路積分表式から類推できるかと思います。

上式に作用汎関数の式を代入し、相互作用部分を汎関数微分演算子として前に出せば、

$$Z[J,\bar{\eta},\eta]\propto\exp\left(iS_I\left[\frac{\delta}{\delta J,}\,\frac{\delta}{\delta\bar{\eta},}\,\frac{-\delta}{\delta\eta}\right]\right)$$
$$\int\mathcal{D}\varphi\,e^{-(1/2)\varphi\cdot K\cdot\varphi+J\cdot\varphi}\int\mathcal{D}\psi^*\mathcal{D}\psi\,e^{-\bar{\psi}\cdot K_D\cdot\psi+\bar{\eta}\cdot\psi+\bar{\psi}\cdot\eta}$$

となりますが、実場による経路積分が $\propto e^{(1/2)J\cdot\Delta\cdot J}$ となるのは経路積分の章においてすでに見ています。一方、ディラック場による経路積分は、

$$-\bar{\psi}{\cdot}K_D{\cdot}\psi+\bar{\eta}{\cdot}\psi+\bar{\psi}{\cdot}\eta=-(\bar{\psi}-\bar{\eta}\Delta_D){\cdot}K_D{\cdot}(\psi-\Delta_D\eta)+\bar{\eta}{\cdot}\Delta_D{\cdot}\eta$$

に注意して $\propto e^{\bar{\eta}\cdot\Delta_D\cdot\eta}$ となることがわかります。よって、

$$Z[J,\bar{\eta},\eta] \propto \exp\left(iS_I\left[\frac{\delta}{\delta J},\frac{\delta}{\delta\bar{\eta}},\frac{-\delta}{\delta\eta}\right]\right)e^{(1/2)J\cdot\Delta\cdot J+\bar{\eta}\cdot\Delta_D\cdot\eta}$$

を得ますが、この式の右辺は、

$$\begin{aligned}
&\exp\left(iS_I\left[\frac{\delta}{\delta J},\frac{\delta}{\delta\bar{\eta}},\frac{-\delta}{\delta\eta}\right]\right)\exp\left(\frac{1}{2}\frac{\delta}{\delta\varphi}\cdot\Delta\cdot\frac{\delta}{\delta\varphi}-\frac{\delta}{\delta\psi}\cdot\Delta_D\cdot\frac{\delta}{\delta\bar{\psi}}\right)e^{J\cdot\varphi+\bar{\eta}\cdot\psi+\bar{\psi}\cdot\eta}\Big|_{\varphi=\psi=\bar{\psi}=0}\\
&\qquad=\exp\left(\frac{1}{2}\frac{\delta}{\delta\varphi}\cdot\Delta\cdot\frac{\delta}{\delta\varphi}-\frac{\delta}{\delta\psi}\cdot\Delta_D\cdot\frac{\delta}{\delta\bar{\psi}}\right)e^{iS_I[\varphi,\psi,\bar{\psi}]+J\cdot\varphi+\bar{\eta}\cdot\psi+\bar{\psi}\cdot\eta}\Big|_{\varphi=\psi=\bar{\psi}=0}
\end{aligned}$$

と変形されるので、$Z[0,0,0]=1$ に注意して、結局、

$$Z[J,\bar{\eta},\eta]=\left\langle e^{iS_I[\varphi,\psi,\bar{\psi}]+J\cdot\varphi+\bar{\eta}\cdot\psi+\bar{\psi}\cdot\eta}\right\rangle_0\Big/\left\langle e^{iS_I[\varphi,\psi,\bar{\psi}]}\right\rangle_0$$

という伝播関数展開表式を得ます。ここで、

$$\left\langle\cdots\right\rangle_0=\exp\left(\frac{1}{2}\frac{\delta}{\delta\varphi}\cdot\Delta\cdot\frac{\delta}{\delta\varphi}-\frac{\delta}{\delta\psi}\cdot\Delta_D\cdot\frac{\delta}{\delta\bar{\psi}}\right)\cdots\Big|_{\varphi=\psi=\bar{\psi}=0}$$

です。

この伝播関数展開表式により、ディラック場が含まれている理論においても、グリーン関数の摂動論を行うことができます。また、かなり面倒なことになりますが、LSZ 簡約公式もディラック場が含まれている場合に拡張することができ、散乱問題を相互作用表示に頼らずともハイゼンベルグ表示のまま摂動計算できることになるわけです。

索 引

か

は

ま