あもんノート

ユークリッド幾何学、ニュートン力学から、相対論、量子論、素粒子論、宇宙論、そして超ひも理論まで、理論物理学を簡潔にかつ幅広く網羅したノートです。TOP へは下の URL をクリックして行けます。専用の画像掲示板で、ご意見、ご質問等も受け付けております。

http://amonphys.web.fc2.com/

目 次

第21章　数学基礎論入門

数学基礎論についてはあまり詳しくありませんが、入門書やネットを通じて学んだことをここにまとめておきます。論理学、ZFC 集合論、一般連続体仮説、不完全性定理などについて記しています。科学の言葉である数学の基礎がどのようになっているかは、多くの人が気になるところだと思われます。特に理系の人は教養としてここに記した概要だけでもきちんと知っておくべきでしょう。

21.1　論理式と推論規則

まずは**論理学**についてです。論理学の記述にはいくつかの方法がありますが、ここではゲンツェンの**自然推論**を紹介します。(他にはヒルベルト・アッカーマンの公理系などが有名です。)

論理的あるいは数学的な命題 (主張、陳述) は一般に記号の列で表されます。これを**論理式**といいます。主張の一部を未定にしておく場合はその部分を A, B などのアルファベットで書きます。これを**命題変数**といいます。

証明において、A の仮定のもとで B, C, $\cdots$ などが証明される場合、

$$[A]\{B, C, \cdots\}$$

のように書きます。また A, B, $\cdots$ から C が証明されることを、

$$A, B, \cdots \vdash C$$

と書きます。

そうすると、$\Rightarrow$ (**論理包含**, ならば) に関する**推論規則** (公理) は次のように与えられます。

$$\begin{cases} [A]\{B\} \ \vdash \ A \Rightarrow B & 【\Rightarrow \text{導入}】 \\ A,\ A \Rightarrow B \ \vdash \ B. & 【\Rightarrow \text{除去}】 \end{cases}$$

$\Rightarrow$ 導入の規則は、「A の仮定のもとで B が証明される。よって $A \Rightarrow B$ が証明される」という意味になります。また、$\Rightarrow$ 除去の規則は、「A が証明され $A \Rightarrow B$ が証明される。よって B が証明される」という意味です。

この推論規則を用いると、例えば $A \Rightarrow A$ は次のように証明されます。

$$
\begin{array}{ll}
[A]\{ & (A\text{を仮定する}) \\
\quad A & (\text{仮定はその仮定内でいえる}) \\
\}, & (\text{仮定}\ A\ \text{の終了}) \\
A \Rightarrow A. & (\Rightarrow \text{導入規則より})
\end{array}
$$

$A \Rightarrow A$ は A の内容と関係なく当たり前に正しい論理式ですが、このような当たり前を逐一証明できるようにすることが、論理学、さらには数学の基礎を築くことになるわけです。そして公理や証明されたことだけを “正しい” と考えていきます。

一方、$\wedge$ (**論理積**, かつ) の推論規則はこうです。

$$
\begin{cases}
A,\ B\ \vdash\ A \wedge B & 【\wedge\ \text{導入}】\\
A \wedge B\ \vdash\ A & 【\wedge\ \text{除去}\,1】\\
A \wedge B\ \vdash\ B. & 【\wedge\ \text{除去}\,2】
\end{cases}
$$

これを用いると、例えば**三段論法** $((A \Rightarrow B) \wedge (B \Rightarrow C)) \Rightarrow (A \Rightarrow C)$ の証明は次のようになります。

$$
\begin{array}{ll}
[(A \Rightarrow B) \wedge (B \Rightarrow C)]\{ & \\
\quad A \Rightarrow B,\ B \Rightarrow C, & (\wedge\text{除去}\,1,2\,\text{を用いた}) \\
\quad [A]\{\ A,\ A \Rightarrow B,\ B,\ B \Rightarrow C,\ C\}, & (\Rightarrow \text{除去を用いた}) \\
\quad A \Rightarrow C & (\Rightarrow \text{導入を用いた}) \\
\}, ((A \Rightarrow B) \wedge (B \Rightarrow C)) \Rightarrow (A \Rightarrow C). &
\end{array}
$$

また、$\vee$ (**論理和**, または) の推論規則はこうです。

$$
\begin{cases}
A\ \vdash\ A \vee B & 【\vee\ \text{導入}\,1】\\
B\ \vdash\ A \vee B & 【\vee\ \text{導入}\,2】\\
A \vee B,\ [A]\{C\},\ [B]\{C\}\ \vdash\ C. & 【\vee\ \text{除去}】
\end{cases}
$$

これを用いると、例えば、$((A \vee B) \wedge C) \Rightarrow ((A \wedge C) \vee (B \wedge C))$ が次のように証明されます。

$$
\begin{array}{ll}
[(A \vee B) \wedge C]\{ & \\
\quad A \vee B,\ C, & \\
\quad [A]\{\ A,\ C,\ A \wedge C,\ (A \wedge C) \vee (B \wedge C)\}, & (\vee\text{導入}\,1\,\text{を用いた}) \\
\quad [B]\{\ B,\ C,\ B \wedge C,\ (A \wedge C) \vee (B \wedge C)\}, & (\vee\text{導入}\,2\,\text{を用いた}) \\
\quad (A \wedge C) \vee (B \wedge C) & (\vee\text{除去を用いた}) \\
\}, ((A \vee B) \wedge C) \Rightarrow ((A \wedge C) \vee (B \wedge C)). &
\end{array}
$$

一般に $(A \Rightarrow B) \wedge (B \Rightarrow A)$ を $A \Leftrightarrow B$ と書いて、A と B は**同値**といいます。例えば上の定理は逆も証明できるので、$((A \vee B) \wedge C) \Leftrightarrow ((A \wedge C) \vee (B \wedge C))$ ということになります。同値な 2 つの論理式は主張の内容が同じであるため、代入操作ができることになります。

21.2 矛盾と否定

$\perp$ (**矛盾**) に関する公理として、

$$\perp \Rightarrow A \qquad \text{【}\perp\text{公理】}$$

を導入します。これは「矛盾からは何でも証明される」ということをいっています。一方、$\neg$ (**否定**) は、

$$\neg A \Leftrightarrow (A \Rightarrow \perp) \qquad \text{【}\neg\text{定義】}$$

により定義されます。すなわち、“A でない” ということは “A ならば矛盾する” ということと同値です。このとき、

$$(A \wedge \neg A) \Rightarrow \perp$$

が次のように証明されるでしょう。

$$[A \wedge \neg A]\{\, A,\ A \Rightarrow \perp,\ \perp\},\ (A \wedge \neg A) \Rightarrow \perp.$$

この定理から、矛盾が、ある命題とその否定命題が同時に証明されることにより生じるものであることがわかります。これはどちらかというと矛盾の第一義的なイメージに近いでしょう。

21.3 直観主義論理と排中律

ここまでの推論規則と公理で、$A \Rightarrow \neg\neg A$ が次のように証明されます。

$$[A]\Big\{\ [\neg A]\{\ A \Rightarrow \perp,\ A,\ \perp\},\ \neg A \Rightarrow \perp,\ \neg\neg A\Big\},\ A \Rightarrow \neg\neg A.$$

しかしその逆である $\neg\neg A \Rightarrow A$ (**二重否定除去**) は、実は証明できません。このような論理体系を**直観主義論理**といいます。

直観主義論理に、**排中律**、

$$A \vee \neg A \qquad \text{【排中律】}$$

を公理として加えた論理体系を**古典論理**といいます。古典論理では二重否定除去が以下のように証明されます。

$$[\neg\neg A]\{\ \neg A \Rightarrow \bot,\ \bot \Rightarrow A,\ \neg A \Rightarrow A,\ A \Rightarrow A,\ A \vee \neg A,\ A\},\ \neg\neg A \Rightarrow A.$$

途中、三段論法、$A \Rightarrow A$, そして排中律を用いました。また、排中律の代わりに、二重否定除去を公理とすると、以下のように排中律を証明できます。

$$\begin{aligned}&[\neg(A \vee \neg A)]\{\ [A]\{\ A,\ A \vee \neg A,\ \neg(A \vee \neg A),\ \bot\},\\ &\qquad\qquad\qquad A \Rightarrow \bot,\ \neg A,\ A \vee \neg A,\ \neg(A \vee \neg A),\ \bot\\ &\},\ \neg(A \vee \neg A) \Rightarrow \bot,\ \neg\neg(A \vee \neg A),\ A \vee \neg A.\end{aligned}$$

すなわち直観主義論理の上では排中律と二重否定除去が同値なのです。どちらを公理として追加しても、それは古典論理になります。

ところで、$(A \Rightarrow \bot) \Rightarrow \neg A$ という論理式は、いわゆる**背理法**と考えられますが、これは否定の定義から自明で、直観主義論理でもいえることに注意してください。直観主義論理で証明できないのは、$(\neg A \Rightarrow \bot) \Rightarrow A$ であり、これが本当の背理法であり、前者は背理法でないとする用語法があります。無理数の定義が、「有理数でない」すなわち「既約分数で表せない」であることに注意すると、例えば「$\sqrt{2}$ が無理数であること」の証明は $(A \Rightarrow \bot) \Rightarrow \neg A$ によるもので、すなわち直観主義論理でも証明できるわけです。

以下、古典論理で考えていきます。

(余談) 排中律は無限集合を考える場合には自然な論理でないとする主義があり、これを**直観主義**といいます。直観主義はブロウウェルにより頑強に主張され、排中律を死守しようとするヒルベルトと激しく対立しました。無限集合における排中律の不自然さは、例えば、「円周率の 10 進数表示に 9 の数字が 100 個連続して並ぶことがあるか、それともないか?」という問いを考えてみると垣間見えます。あるかないか現時点ではわからないし、有限回のステップにおいて知ることができる保証もないというのに、あるかないか、そのどちらか一方であると決めつけるのは乱暴だというわけです。「仮にある数が存在しないと仮定したときに矛盾を示せたとしても、それは、よって存在する、ということにはならない。存在するというなら現物を見せろ。少なくとも有限回のステップでそれに到達できる保障を示せ」というわけです。ヒルベルトはしかし、数学者から排中律を奪うのは、ボクサーから拳を奪うことに等しいとして、直観主義を非難し、無視し続けました。現在では、排中律を用いない直観主義に基づく数学を**構成的数学**と呼び、通常の数学より厳密な (矛盾を生じにくい) ものであると考え、区別しています。

21.4 真理値と恒真論理式

論理式に含まれる命題変数 $(A, B, \cdots)$ のそれぞれに T(**真**) か F(**偽**) かどちらか一方の値を対応させることを考えます。これを**真理値**といいます。$\Rightarrow$, $\wedge$, $\vee$ の演算によりできる論理式の真理値は次の表で定義されます。

A	B	$A \Rightarrow B$	$A \wedge B$	$A \vee B$
T	T	T	T	T
T	F	F	F	T
F	T	T	F	T
F	F	T	F	F

これを**真理値表**といいます$^{(*)}$。

$\perp$ の真理値は F であるとします：

$$\perp \equiv F.$$

そうすると $\neg A$ は、その定義が $A \Rightarrow \perp$ であることに注意して、

$$A \equiv T \text{ のとき } \neg A \equiv F, \quad A \equiv F \text{ のとき } \neg A \equiv T$$

となることがわかります。すなわち $\neg$ は真理値を逆にするわけです。

以上のように真理値を定義すると、$A \Rightarrow A$ や $A \vee \neg A$ や $(A \wedge (A \Rightarrow B)) \Rightarrow B$ などの論理式は命題変数の真理値によらず必ず T を与えます。このような論理式を**恒真論理式** (**トートロジー**) といいます。

古典論理で証明できる論理式は恒真論理式であることが知られています。これを**健全性**といいます。また、その逆、つまり恒真論理式は古典論理で証明できるということも知られています。これを (論理学における) **完全性**といいます。

(*注) A が偽ならば B がなんであれ $A \Rightarrow B$ は真と定義されていることに注意。すなわち前提が偽ならば結論がなんであれその命題は真なのです。これは理系でない人がよく勘違いしているところであり、それゆえ一般社会においてはこれに反した論理がまかり通っていたりするので注意が必要です。

21.5 述語論理

変数 x を含む論理式を考えることができ、これを $A(x)$ などと表します。これは "**条件**" を意味することになります。対して変数を持たないこれまでの論理式は**閉論理式**と呼ばれます。特に数学基礎論では変数に相当するものをより一般的に**項** (こう) と言ったりします。

$\forall x A(x)$ は「すべての x に対して $A(x)$ である」という意味です。また、$\exists x A(x)$ は「ある x に対して $A(x)$ である」すなわち「 $A(x)$ を満たす x が少なくとも 1 つ存在する」という意味です。$\forall$ を**全称**、$\exists$ を**存在**といいます。

これまでの $\Rightarrow$, $\wedge$, $\vee$, $\neg$ で作られる論理を**命題論理**といい、これに $\forall$, $\exists$ が加えられた論理を**述語論理**といいます。変数 x の取り得る値が有限個で、$x_1, x_2, \cdots x_n$

のときは、

$$\forall x A(x) \Leftrightarrow A(x_1) \wedge A(x_2) \wedge \cdots \wedge A(x_n),$$
$$\exists x A(x) \Leftrightarrow A(x_1) \vee A(x_2) \vee \cdots \vee A(x_n)$$

という定義により命題論理に還元されますが、x の取り得る値が有限個とは限らないので∀ と ∃ の推論規則を用意しておきます。

まず $\forall x A(x)$ は、証明の中で変数 x は任意であると考えるので $A(x)$ と同値とみなします。このような x を証明における**固有変数**といいます。よって ∀ の推論規則は、

$$\begin{cases} A(x) \ \vdash \ \forall x A(x) & 【\forall 導入】\\ \forall x A(x) \ \vdash \ A(x) & 【\forall 除去】\end{cases}$$

です。また、∃ の推論規則は次の通りです。

$$\begin{cases} A(a) \ \vdash \ \exists x A(x) & 【\exists 導入】\\ \exists x A(x),\ [A(x)]\{B\} \ \vdash \ B. & 【\exists 除去】\end{cases}$$

ここで a は定数です。これら推論規則を用いれば、例えば $\exists x \neg A(x) \Rightarrow \neg \forall x A(x)$ という述語論理式が次のように証明されます。

$$\begin{aligned}
&[\exists x \neg A(x)]\{\\
&\quad [\forall x A(x)]\{\\
&\quad\quad \exists x \neg A(x),\ A(x),\\
&\quad\quad [\neg A(x)]\{\ A(x) \Rightarrow \perp,\ A(x),\ \perp\},\\
&\quad\quad \perp\\
&\quad \},\ \neg \forall x A(x)\\
&\},\ \exists x \neg A(x) \Rightarrow \neg \forall x A(x).
\end{aligned}$$

21.6 素朴集合論とラッセルのパラドックス

論理学が整理されたので次は**集合**についてです。集合は素朴には次のように定義されます。

明確でかつ互いによく区別された対象 (**元**) をまとめたものを集合と呼ぶ

集合はその元を並べて $\{a, b, \cdots\}$ と表したり、あるいは条件 $A(x)$ を満たす x の集まりという意味で $\{x \,|\, A(x)\}$ と表したりします。また、a が集合 b の元であることを $a \in b$ と書きます。よって、

$$a \in \{x \,|\, A(x)\} \Leftrightarrow A(a).$$

この性質を**集合の基本原則**と呼びます。

しかしこのような**素朴集合論**は実は矛盾を生じてしまいます。このことは、例えば、

$$r = \{x \,|\, \neg\, x \in x\}$$

という集合を考えると簡単に確かめられます。この集合は「自分自身を元に持たない集合を全て集めた集合」という意味になります。この集合 r に集合の基本原則を適用すると、$a \in r \Leftrightarrow \neg\, a \in a$ ですが、このとき a はどんな集合でも良いので特に r とすると、

$$r \in r \Leftrightarrow \neg\, r \in r$$

を得ます。しかし一般に $A \Leftrightarrow \neg\, A$ という論理式は、

$$A \Leftrightarrow \neg\, A,\ [A]\{\, A,\ \neg\, A,\ \perp\},\ \neg\, A,\ A,\ \perp$$

というように矛盾を証明してしまうわけです。矛盾からは何でも証明できるので、矛盾を証明できる理論はナンセンスです。これを**ラッセルのパラドックス**といいます。

結局、素朴集合論の集合の定義は曖昧すぎて、それゆえ得られる集合が広大すぎ、矛盾を生じてしまうというわけです。もっと厳密な定義を集合に課する必要があるわけです。そのような集合論の 1 つがツェルメロ・フレンケルの集合論 (**ZF 集合論**) です。

以下、ZF 集合論の内容を紹介していきます。

(余談) すなわちラッセルのパラドックスは、「自分自身を元に持たない集合を全て集めた集合 r は r 自身を元に持ちますか? 持ちませんか?」という問いに対して、どちらを仮定しても矛盾するというものです。なぜなら $r \in r$ だとすると、r は自分自身を元に持たない集合を全て集めた集合だったので r はこの条件を満たさなければいけません。すなわち $\neg r \in r$ となって矛盾。一方、$\neg r \in r$ だとすると、r は自分自身を元に持たない集合という条件を満たしているので r に含まれるはずです。すなわち $r \in r$ となって矛盾です。記号論理では明確なことが、言葉にするとこのようにややこしくなります。しかし言葉にすることで、ラッセルのパラドックスがいわゆる「うそつきのパラドックス」と似た構造を持ったパラドックスであることがわかります。

21.7 部分集合と等号

$\in$ は無定義語とします。これはこれから述べる公理群によって「元である」という意味が与えられると考えます。

$$a \subset b \Leftrightarrow \forall x(x \in a \Rightarrow x \in b) \qquad 【\subset 定義】$$

で記号 $\subset$ を定義します。このとき a は b の**部分集合**であるといいます。

正確には上の論理式の全体において $\forall a \forall b$ です。論理式全体に対する $\forall$ は以後省略することがあります。束縛されていない変数があった場合はこういう省略がなされていると考えてください。

一方、

$$a = b \Leftrightarrow \forall x(x \in a \Leftrightarrow x \in b) \qquad 【= 定義】$$

で**等号** $=$ を定義します。これは**外延性公理**とも呼ばれます。数学で対象となるものは数でも写像でも全て集合なので、ここで定義された等号は普通に数学で用いる等号のことです。

また、

$$a \notin b \Leftrightarrow \neg\, a \in b, \quad a \neq b \Leftrightarrow \neg\, a = b$$

で「元でない」と「等しくない」の記号を導入します。さらに、

$$\forall x \in a\, A(x) \Leftrightarrow \forall x(x \in a \Rightarrow A(x)),$$
$$\exists x \in a\, A(x) \Leftrightarrow \exists x(x \in a \wedge A(x))$$

という記述法を使うことがあります。上は「 a の全ての元 x に対して $A(x)$ が成り立つ」、下は「 a の元で $A(x)$ を満たす x が存在する」という意味になります。

21.8 集合の基本公理

まず次の公理をおきます。

$$\exists a \forall x(x \notin a). \qquad 【空集合の公理】$$

すなわち元を持たない集合 a が存在するとします。この a を 0, あるいは $\{\}$ と書き、**空集合**といいます。

次に集合から集合を作るための公理群です。

$$\exists c \forall x(x \in c \Leftrightarrow (x = a \vee x = b)). \qquad 【対集合の公理】$$

すなわち、2つの集合 a と b だけを元に持つ集合 (**対集合**) c が存在するということです。この c を $\{a, b\}$ あるいは $\{b, a\}$ と書きます。特に $a = b$ のときは $\{a\}$ と書きます。ここまでで元を2つまで持つ集合が定義されました。例えば、

$$0, \quad \{0\}, \quad \{0, \{0\}\}, \quad \{\{0, \{0\}\}, \{\{\{0\}\}\}\}$$

などは集合です。これらはすでに無限にあります。

さらに、

$$\exists b \forall x(x \in b \Leftrightarrow \exists y \in a(x \in y)). \qquad 【和集合の公理】$$

この集合 b を$\cup a$ と書いて a の**和集合**といいます。これは“ a の元の元” を全て集めた集合になっています。(この論理式の解読は少し難しいです。この段階で時間をかけてでも意味を読み取れるようにしてください。) また、

$$a \cup b = \cup\{a, b\}$$

で集合の**結び**を定義します。対集合と和集合の公理によって、

$$\{a, b, c\} = \{a, b\} \cup \{c\}, \quad \{a, b, c, d\} = \{a, b, c\} \cup \{d\}, \quad \cdots$$

のようにして、任意の個数の元を持つ集合を作れることになります。

さらに、

$$\exists b \forall x (x \in b \Leftrightarrow x \subset a). \qquad 【べき集合の公理】$$

この集合 b を $\mathrm{Pow}(a)$ と書いて、集合 a の**べき集合**といいます。これは a の全ての部分集合 (空集合や a 自身も含む) を元とする集合を意味します。例えば、

$$\mathrm{Pow}(\{a, b\}) = \{0, \{a\}, \{b\}, \{a, b\}\}$$

ということです。

21.9 自然数と無限公理

これまでの公理により、

$$0, \quad 1 = \{0\}, \quad 2 = \{0, 1\}, \quad 3 = \{0, 1, 2\}, \quad \cdots$$

という集合を順に作ることができ、これらを**自然数**といいます。ある自然数 n の次の自然数は、

$$n' = n \cup \{n\}$$

ですが、これを n の**後者**といいます。

しかしこれまでの公理では、無限にある自然数を全て集めたものが集合であるとはいえません。これまでの公理で作れる集合は有限個の元しか持ち得ないことに注意して下さい。そこで、無限にある自然数を全て含むような集合の存在を公理としてかかげます。

$$\exists a \big(0 \in a \wedge \forall x \in a (x' \in a) \big). \qquad 【無限公理】$$

これを**無限公理**といい、ここで存在が宣言された集合を $\bar{\omega}$ と書きます。

$\bar{\omega}$ は全ての自然数を元とする集合ですが、自然数以外の元が含まれている可能性もあります。例えば、$\xi = \{1\}$ およびその後者として順に作られる集合、$\xi' = \{1, \xi\}$, $\xi'' = \{1, \xi, \xi'\}$, $\cdots$ などが含まれているかもしれません。しかし $\bar{\omega}$ の元からこれ

らを除き、自然数だけを全て集めた集合を構成することが可能です。それについては後で説明します。

(余談) ちなみに加法 (足し算) は、

$$n+0=n, \quad n+m'=(n+m)'$$

を満たす 2 項演算として定義されます。

$$1+1=1+0'=(1+0)'=1'=2$$

のように $1+1=2$ が証明されます。0 と後者の概念が自然数の本質であることがわかるでしょう。一方、整数や有理数は同値類や商集合を用いて構成されますが、分量が多くなりすぎるのでここでは触れません。

21.10 分出公理と置換公理

集合 a の元 x で特に条件 $A(x)$ を満たすものを集めたものは集合であるとします。これを**分出公理**といい、次のように書かれます。

$$\exists b \forall x (x \in b \Leftrightarrow (x \in a \wedge A(x))). \qquad \text{【分出公理】}$$

この集合 b を $\{x \in a \,|\, A(x)\}$ と書きます。分出公理には $A(x)$ という任意の論理式が含まれているため、無数にある公理をまとめたものと考えられます。このようなものは**公理図式**と呼ばれることがあります。

$$a \cap b = \{x \in a \,|\, x \in b\}$$

で集合の**交わり** (共通部分) を定義します。交わりは分出公理があって初めて集合として定義できることに注意してください。

ところでツェルメロが集合の公理系を提示した後、フレンケルとスコーレムが独立にツェルメロの公理系からでは得られる集合が小さすぎることを指摘し、分出公理の代わりに次の**置換公理**を導入しました。

$$\begin{aligned}&\forall \alpha\beta\gamma(A(\alpha,\beta) \wedge A(\alpha,\gamma) \Rightarrow \beta=\gamma) \\ &\Rightarrow \exists b \forall y \big(y \in b \Leftrightarrow \exists x \in a\, A(x,y)\big). \qquad \text{【置換公理】}\end{aligned}$$

長い公理ですが、2 行になっているのでそれぞれの意味を考えれば簡単です。

1 行目は、任意の α に対して $A(\alpha,\beta)$ と $A(\alpha,\gamma)$ が両方成り立つなら $\beta=\gamma$, すなわち各々の α に対して $A(\alpha,\beta)$ を満たす β はあったとしても 1 つだけということです (なくても構わない)。2 行目はわかりやすく書けば、

$$b=\{y \,|\, x \in a \wedge A(x,y)\}$$

という集合があるということです。b の元は集合 a の元より多くなることはないから、b を集合として認めましょうということです。

特に $A(x, y) \Leftrightarrow ((x = y) \wedge A(y))$ のときは、

$$b = \{y \,|\, x \in a \wedge (x = y) \wedge A(y)\} = \{y \,|\, y \in a \wedge A(y)\} = \{y \in a \,|\, A(y)\}$$

が集合ということになって、これは分出公理に他なりません。すなわち分出公理は置換公理から導かれるので、置換公理があれば分出公理はいらないことになります。しかし実用上よく用いられるのは分出公理なので、分出公理は重要な定理と考えます。

21.11 正則性公理

任意の集合 a に対し、その元である集合を1つ選び、その集合からまたその元である集合を1つ選び…、という操作を繰り返していくと、必ず有限回のステップで空集合0が現れて終わる、というのがフォン・ノイマンの**正則性公理**です。すなわち、$a \ni a_1 \ni a_2 \ni \cdots$ が無限列になることはありません。言い換えると、全ての集合は、0 や $\bar{\omega}$ から出発して、すでに作られた集合から有限回のステップで作られたものであり、まだ作られていない集合を先取りして使っていたり (循環)、また、得体の知れないものが混入していることはないということです。

このことは次のように公理化されます。

$$a \neq 0 \Rightarrow \exists b \in a(a \cap b = 0). \qquad 【正則性公理】$$

すなわち、空集合でない全ての集合 a について、その元で $a \cap b = 0$ となるような b が存在するということです。この公理の主張が上で述べた無限列が存在しないという主張と同値であることはあまり簡単ではありません。以下その証明です。少し難しいのでゆっくりと読んで考えてください。

[証明] まず、上の無限列が存在しないことを仮定します。任意の集合を a とします。a が空集合なら公理が成立します。そうでないときは a の元を1つ選び、それを a_1 とします。$a \cap a_1 = 0$ のときは $b = a_1$ として公理が成立します。そうでないときは $a \cap a_1$ の元を1つ選び、それを a_2 とします。以下同様。仮定からこの操作はどこかで止まるはずです。a_n において止まるとすれば、$a_n \in a \cap a_{n-1}$ かつ $a \cap a_n = 0$ なので、$b = a_n$ として公理が成立します。よっていずれにしても公理が成立します。

次に公理を仮定します。また、$a_1 \ni a_2 \ni a_3 \ni \cdots$ という無限列が存在すると仮定します。このとき、$a = \{a_1, a_2, a_3, \cdots\}$ という集合を作ると、公理から $a \cap b = 0$ を満たす b が $a_1, a_2, a_3, \cdots$ の中にあるはずです。それを $b = a_n$ とすると、a_{n+1}

は a と b の両方の元になって $a \cap b = 0$ と矛盾します。よってこのような無限列は存在しません。[証明終]

以下の 2 つの問いは重要です。

[問] 集合を全て集めたものを考えると、これは集合でしょうか?

[答] 集合を全て集めたものを集合だと仮定し a とします。a は集合なので a の元のはずです。すなわち $a \in a$. このとき $a \ni a \ni a \ni \cdots$ という無限列が存在し、正則性公理と矛盾します。よって集合を全て集めたものは集合ではありません。

[問] 自分自身を元に持たない集合を全て集めたもの (ラッセルの r) を考えると、これは集合でしょうか?

[答] 正則性公理から集合は自分自身を元に持ちません。よって自分自身を元に持たない集合は単に集合のことです。よって上の結果からそのような集まりは集合ではありません。すなわちラッセルの r は ZF 集合論の立場においては存在できないものと認定されます。また、r を論理式で記述することもできません。$\{x \,|\, x \notin x\}$ は ZF 集合論においては文法エラーです。ZF 集合論で定義されているのは分出公理の $\{x \in a \,|\, A(x)\}$ もしくは置換公理の $\{y \,|\, x \in a \,\wedge\, A(x, y)\}$ であったことに注意してください。

ちなみに、集合とならない巨大な集まりは、多くの場合**クラス**と呼ばれます。クラスを扱う理論では、クラスは集合のようには扱えないことになっているので、やはりラッセルのパラドックスのようなことは起こりません。

(余談) 正則性公理 $a \neq 0 \Rightarrow \exists b(b \in a \,\wedge\, a \cap b = 0)$ の対偶をとると、

$$\forall b(b \notin a \,\vee\, a \cap b \neq 0) \Rightarrow a = 0$$

ですが、この論理式の前提部分は $(\neg A \vee B) \Leftrightarrow (A \Rightarrow B)$ に注意して、$b \in a \Rightarrow \exists c(c \in b \wedge c \in a)$. さらに対偶をとって $\forall c(c \notin b \vee c \notin a) \Rightarrow b \notin a$ となります。一方 $a = 0$ は $\forall d(d \notin a)$ と書けるので、正則性公理は、

$$\forall b(\forall c(c \in b \Rightarrow c \notin a) \Rightarrow b \notin a) \Rightarrow \forall d(d \notin a)$$

となるでしょう。ここでさらに $A(x) \Leftrightarrow x \notin a$ とすれば、分出公理があるのでこれは任意の論理式で、

$$\forall b(\forall c \in b\, A(c) \Rightarrow A(b)) \Rightarrow \forall d\, A(d)$$

を得ます。すなわち正則性公理はこのような**集合の帰納法**と同値です。集合の帰納法を正則性公理として紹介する文献もあるので注意してください。

21.12 選択公理

ZF 集合論の公理はここまでで全て書いたわけですが、これだけだと数学の定理のいくつかが証明できないことがわかっています。何か公理を付け加えて公理系

の主張を強くする必要があります。そのような公理の中で一番自然だと考えられるものがツェルメロ本人による**選択公理**です。

選択公理は、空集合でない**互いに素**な (交わりが空集合となる) 集合が多数あった場合に、それら集合から 1 つずつ元を選び出し集めたものが集合であるとするものです。

有限集合においては自明に思える命題ですが、無限集合を内包する ZF 集合論においては、ZF が無矛盾である限りは、この命題を証明も反証もできないことがわかっています。**無矛盾**というのは矛盾を証明できないことです。**反証**というのは否定の証明のことです。反証できないので、ZF 集合論にこの公理を追加しても、ZF が無矛盾な限りは矛盾を生じません。

選択公理を論理式で表すと、

$$\begin{aligned}&\big(0 \notin a \wedge \forall xy \in a(x \neq y \Rightarrow x \cap y = 0)\big)\\ &\qquad \Rightarrow \exists b \forall c \in a\, \exists d(b \cap c = \{d\}). \qquad \text{【選択公理】}\end{aligned}$$

一行目が、a が空集合 0 を元に持たず、かつ互いに素な集合の集合という意味になっていることに注意してください。

ZF 集合論の公理系に選択公理を追加した系を **ZFC 集合論**といいます。ZFC 集合論は数学の土台であり、それゆえ数学で正しいとされている定理は全て ZFC 集合論から証明されたものと考えることができます。

(余談) 選択公理は「バナッハ・タルスキーのパラドックス」を生じるためその妥当性を疑問視する立場があるようです。私はまだ勉強不足で、このパラドックスの詳しい検討をしていません。

21.13 自然数全体の集合とペアノ公理

無限公理における述語論理式を $\Phi(a)$ と書きます：

$$\Phi(a) \Leftrightarrow \big(0 \in a \wedge \forall x \in a\,(x' \in a)\big). \tag{α}$$

$\bar{\omega}$ は無限公理を満たす集合の 1 つなので、$\Phi(\bar{\omega})$ がいえます。一方、ω は、無限公理を満たす全ての集合の共通部分として定義されます：

$$x \in \omega \Leftrightarrow \forall a(\Phi(a) \Rightarrow x \in a). \tag{β}$$

このとき $\Phi(\bar{\omega})$ と (β) から $x \in \omega \Rightarrow x \in \bar{\omega}$ を得ます。よって ω は $\bar{\omega}$ の部分集合で、

$$\omega = \{x \in \bar{\omega} \,|\, \forall a(\Phi(a) \Rightarrow x \in a)\}$$

と表すことができ、分出公理から ω は集合です。これを**自然数全体の集合**といいます。

また、以下の命題を証明できます(*)。

$$
\begin{array}{ll}
(1) & 0 \in \omega \\
(2) & \forall n \in \omega\,(n' \in \omega) \\
(3) & \forall n \in \omega\,(n' \neq 0) \\
(4) & \forall nm \in \omega\,(n' = m' \Rightarrow n = m) \\
(5) & \bigl(A(0) \wedge \forall n \in \omega\,(A(n) \Rightarrow A(n'))\bigr) \Rightarrow \forall n \in \omega\, A(n)
\end{array}
$$

これを**ペアノ公理**といいます。特に (5) は**数学的帰納法**を意味しています。ペアノ公理は ZF 集合論以前に自然数の特徴を与える公理として知られていたものですが、ZF 集合論の立場では定理ということになります。

いま、$A(n) \Leftrightarrow \bigl(n = 0 \vee \exists m \in \omega\,(n = m')\bigr)$ で $A(n)$ を定義すると、$A(0)$ および $\forall n \in \omega\, A(n')$ が簡単に確かめられるので、数学的帰納法から $\forall n \in \omega\, A(n)$ を得ます。すなわち、

$$\forall n \in \omega\bigl(n = 0 \vee \exists m \in \omega\,(n = m')\bigr).$$

よって、ω の元で ω の元の後者でないものは 0 だけであり、このことは ω の元が自然数のみであることを保障しています：

$$\omega = \{0, 1, 2, 3, \cdots\}.$$

(*注) ペアノ公理の証明は以下の通りです。
(1) の証明：(α) から $\Phi(a) \Rightarrow 0 \in a$. よって (β) から $0 \in \omega$.
(2) の証明：(α) から $\Phi(a) \Rightarrow \forall x \in a(x' \in a)$. よって $\Phi(a) \Rightarrow n \in a$ という仮定の元では $\Phi(a) \Rightarrow \bigl(n \in a \wedge \forall x \in a(x' \in a)\bigr) \therefore \Phi(a) \Rightarrow n' \in a$. すなわち $\forall a\bigl(\Phi(a) \Rightarrow n \in a\bigr) \Rightarrow \forall a\bigl(\Phi(a) \Rightarrow n' \in a\bigr)$. (β) を用いればこれは $n \in \omega \Rightarrow n' \in \omega \therefore \forall n \in \omega\,(n' \in \omega)$.
(3) の証明：$n' = n \cup \{n\}$ は元として n を持つので $n' \neq 0\ \therefore \forall n \in \omega\,(n' \neq 0)$.
(4) の証明：$n \cup \{n\} = m \cup \{m\}$ でかつ $n \neq m$ を仮定すると、$\{n\} \neq \{m\}$ に注意して、n の元に m があるはずで、同様に m の元に n があるはずです。よって $n \ni m \ni n$ となって正則性公理と矛盾。すなわち $\forall nm \in \omega\,(n' = m' \Rightarrow n = m)$.
(5) の証明：(β) から $x \in \omega \Rightarrow (\Phi(a) \Rightarrow x \in a) \therefore \bigl(x \in \omega \wedge \Phi(a)\bigr) \Rightarrow x \in a \therefore \Phi(a) \Rightarrow \forall x \in \omega\,(x \in a)$. (α) を用いればこれは $\bigl(0 \in a \wedge \forall x(x \in a \Rightarrow x' \in a)\bigr) \Rightarrow \forall x \in \omega\,(x \in a)$ と書かれ、ここで特に $a = \{x \in \omega \mid A(x)\}$ に選べば (5) が得られます。

21.14 無限集合と有限集合

ところでこれまで「無限」という言葉を経験的なイメージで何気なく使ってきましたが、**無限集合**は実は次のように定義されます。

$$\exists b(a \sim b \wedge a \supset b \wedge a \neq b) \Leftrightarrow (\,a \text{ は無限集合}).$$

ここで $a \sim b$ は2つの集合 a と b の間に**1対1対応** (全単射, 双射) があるという意味で、このとき a と b は**対等**であるといいます。もちろん対応や写像も集合により表されます。ここでは詳しい説明はしませんが、少なくとも $a \sim b$ を論理式で表すことがそう難しくないことはわかるでしょう。

そうすると、a が無限集合であるということは、a とは異なる a の部分集合、すなわち a の**真部分集合**で、a と対等な集合 b があるということです。これは有限集合ではあり得ないことです。しかしよく考えてみると、有限であるということの方が論理式で素直に書けず、**有限集合**は「無限集合でない」と定義されます。すなわち有限集合は、どんなに工夫して頑張っても対等な真部分集合を作ることができない集合ということになります。

さて、自然数全体の集合 ω から 0 を除いた集合 b を考えると、これは ω の真部分集合で、しかも ω の元 n を b の元 n' に対応させればこれは1対1対応です。よって ω は無限集合であるというわけです。

(余談) 無限の定義をわかりやすく示した話に「**ヒルベルトの無限ホテル**」があります。満室になったホテルにある男が来て「なんとか泊めてくれないか？」と懇願します。満室なので、通常それは無理なのですが、もし無限に部屋があるホテルなら満室の状態から空室を作ることができるというのです。1号室の客を2号室に、2号室の客を3号室に、以下同様に客に移動してもらえば、1号室が空くことになるというわけです。

21.15 順序数と整列可能定理

自然数の生成は、

$$0, \quad 1=\{0\}, \quad 2=\{0,1\}, \quad 3=\{0,1,2\}, \quad \cdots$$

というものでした。ここでやや乱暴な考え方をして、この操作をずーっとやっていき、

$$\omega=\{0,1,2,\cdots\}$$

に到達したとしてみましょう。次の数は、$n'=n\cup\{n\}$ という規則により、

$$\omega+1=\{0,1,2,\cdots,\omega\}.$$

次は、$\omega+2=\{0,1,2,\cdots,\omega,\omega+1\}.$

再びずーっとやっていき、$\omega+\omega=\{0,1,2,\cdots,\omega,\omega+1,\omega+2,\cdots\}.$

これを 2ω と書きます。さらにどんどん続けます：

$$2\omega+1,\ 2\omega+2,\ \cdots,3\omega,\ \cdots,4\omega,\ \cdots,\ \omega^2,\ \cdots,\ \omega^3,\ \cdots,\ \omega^\omega,\ \cdots,\ \omega^{\omega^\omega},\ \cdots.$$

これらを**順序数**といいます。順序数は自然数の自然な拡張であることがわかるでしょう。そして自然数と同じく**順序関係** (生成された順番) を持っています。特に自

然数は**有限順序数**と呼ばれ、そうでない順序数は**超限順序数**と呼ばれます。ω は最小の超限順序数です。

置換公理のところでツェルメロの公理系では得られる集合が小さすぎると述べましたが、実は置換公理のない公理系では $\omega+\omega$ の時点ですでにこれが集合であることを証明できないのです。置換公理を入れれば全ての順序数は集合であることを証明できます。ただし全ての順序数の集まりは集合ではありません。実際、全ての順序数の集まりを集合だと仮定すると矛盾を証明できます (**ブラリ・フォルティのパラドックス**)。

ZFC 集合論から次の事柄を証明できます。

$$\forall a \exists \alpha \big((\alpha \text{ は順序数}) \wedge a \sim \alpha \big).$$

すなわちどんな集合もある順序数と対等で、その元を順序数のように並べることができるということです。これを**整列可能定理**といいます (ツェルメロ)。

ちなみに整列可能定理は ZF からは証明できず、証明には選択公理を用います。また、ZF に公理として整列可能定理を付け加えると選択公理を証明できます。すなわち ZF 上で選択公理と整列可能定理は同値です。

(余談) 整列可能定理によれば実数を整列させることも可能ということになりますが、一方で実際に実数を整列してみせることは不可能であることが証明されています。可能であることと実際にその手順が存在することとは別なようで、何とも気持ち悪い話なわけです。この気持ち悪さの元凶はやはり選択公理です。しかし無限集合においては有限集合の常識が通用しなくなることは、ヒルベルトの無限ホテルでも見た通りです。

21.16 集合の濃度と一般連続体仮説

2 つの集合 a, b に対し $a \sim b$ のとき、a と b は同じ個数の元を持つ集合と考えられます。特に無限集合の場合は、同じ**濃度**を持つといいます。

整数全体や有理数全体の集合を考えると、これらの元は工夫次第で一列に並べることができるため、自然数全体の集合 ω と同じ濃度を持ちます。自然数全体は有理数全体の真部分集合ですが、それでも同じ濃度です。無限集合なのでこういうことがあり得るわけです。

ω の濃度を**可算濃度**といい、ω と対等な集合は**可算集合**と呼ばれます。無限とはいえ一列に並べて数えていけるからです。もちろんこの数える操作は終わりませんが…。

それでは実数全体の集合 (**連続体**) はどうでしょうか？ 実数全体を開区間 $(0,1)$ の上に写像できること、およびこの区間の実数を 2 進数で少数表示すると一般に小数点以下で 0 と 1 の無限列になることに注意すると、実数全体の集合は $\mathrm{Pow}(\omega)$

と同じ濃度であることがわかります。ここで $\mathrm{Pow}(\omega)$ は ω の部分集合を全て集めた集合です。

ω と $\mathrm{Pow}(\omega)$ の濃度が異なることが次のようにして証明されます。

[証明] ω と $\mathrm{Pow}(\omega)$ が対等であると仮定します。仮定から $\mathrm{Pow}(\omega)$ の元を一列に並べることができるはずで、それを $a_0, a_1, a_2, \cdots$ とします。このとき次の規則で集合 b を作ります。

$$\forall n \in \omega\,(n \in a_n \Leftrightarrow n \notin b).$$

すなわち全ての自然数 n について、$n \in a_n$ なら $n \notin b$ とし、$n \notin a_n$ なら $n \in b$ とするわけです。($a_0, a_1, a_2, \cdots$ のそれぞれの元として $0, 1, 2, \cdots$ が存在するかしないか○×の表を作ったとき、その表の対角線に注目し、○×を逆にして集合 b を作ったことに注意してください。)

ところで b は自然数の集合であり、ω の部分集合の 1 つなので、$a_0, a_1, a_2, \cdots$ のどれかと等しいはずです。m 番目のものに等しいとして $b = a_m$ とすると、上式は $n \in a_n \Leftrightarrow n \notin a_m$ ですが、n は任意だったので $n = m$ とおくと、

$$m \in a_m \Leftrightarrow m \notin a_m$$

となって矛盾です。よって ω と $\mathrm{Pow}(\omega)$ は対等ではありません。[証明終]

このような証明を**対角線論法**といいます。自然数全体は実数全体の部分集合であることを加味すると、$\mathrm{Pow}(\omega)$ の濃度は ω のそれより真に大きいと考えられます。$\mathrm{Pow}(\omega)$ の濃度は**連続濃度**と呼ばれます (カントール)。

では、ω の濃度と $\mathrm{Pow}(\omega)$ の濃度の間の濃度を持つ集合は存在するでしょうか? これを否定し「存在しない」とした命題を**連続体仮説**といいます。

より一般化し、

「一般に集合 b の濃度が無限集合 a の濃度より大きいとき、
b の濃度は $\mathrm{Pow}(a)$ の濃度と等しいか、あるいは大きい」

という命題を作ります。これを**一般連続体仮説**といいます。実は一般連続体仮説は、ZF が無矛盾である限り、ZFC からは証明も反証もできないことがわかっています (ゲーデル, コーエン)。すなわち ZFC から**独立**な命題になっているのです。

とはいえ、一般連続体仮説、もしくはその否定を公理として追加するのは、あまりに体裁が悪いといえます。もっとシンプルな未知の公理があり、そこから一般連続体仮説もしくはその否定が証明されると考えたいところです。

21.17　不完全性定理

ある公理系において、文法的に正しい全ての閉論理式を決定できるとき、その公理系は**完全**であるといいます。ここで論理式を**決定**できるとは、その論理式の証明または反証ができることをいいます。

矛盾からは何でも証明できるので、無矛盾でない公理系、すなわち矛盾を導ける公理系は、完全であることに注意。そして同時にナンセンスということになります。

数学がナンセンスであっては困るので、数学の無矛盾性を証明したいと考えるのは自然です。また、矛盾を起こさない範囲で公理を増やし、すなわち公理系を強くしていき、できるだけ多くの問題に対して答えを出すことができれば理想的です。もしそうしてできた理論が完全であり、なおかつそのことを証明できればこの上ありません。

これはかつてヒルベルトが提唱した、数学の形式主義における1つの目標であり、**ヒルベルトプログラム**と呼ばれています。ところがゲーデル (とロッサー) によって次の定理が証明されてしまいます。

「算術を含む無矛盾な公理系 P は完全ではない。
また、P の無矛盾性は P においては証明できない」

前半を第一不完全性定理、後半を第二不完全性定理といいます。この定理は事実上、ヒルベルトプログラムが実現不可能であることを意味しています。

第一不完全性定理の証明の概略は次のようなものです。

[証明概略] まず全ての論理式や証明文を自然数に対応させます。これは**ゲーデル数**と呼ばれるコード化によって実際に可能です。論理式 A のゲーデル数を $g(A)$ としましょう。次に自然数1つを引数とする述語論理式 (単項述語論理式) $F(v)$ を、「v をゲーデル数とする論理式の証明文が存在する」という意味を持つように構成します。ゲーデルはこれを実際に構成してみせました。「少し面倒ではあるが大変やさしい」と論文の脚注で述べています。

結果、$F(g(A))$ は「論理式 A が証明可能である」という意味になります。これを $Bew[A]$ と書きます。この論理式は、いわば偶然に論理式の証明可能性を主張する、超数学的な命題になっています。論理式は対象であり、証明は手続きであるとするのが普通の数学であるのに対し、証明を対象とする数学は、階層が1つ上であるという意味で超越的であり、**超数学** (metamathematics) あるいは**証明論**と呼ばれます。

ところで単項述語論理式は可算ですから一列に並べることができます。m 番目のもので引数が n のものを $R_m(n)$ とします。そして自然数の集合 K を次のよう

に定義します。

$$n \in K \Leftrightarrow \neg\, Bew[R_n(n)].$$

一方、$n \in K$ は単項述語論理式の1つですから、ある自然数 q が存在して $R_q(n) \Leftrightarrow n \in K$ です。よって $R_q(n) \Leftrightarrow \neg\, Bew[R_n(n)]$ ですが、n は任意だったので、特に $n = q$ とすると、

$$R_q(q) \Leftrightarrow \neg\, Bew[R_q(q)]$$

を得ます。よってもし公理系 P から $R_q(q)$ を証明できるとすると、上から $R_q(q)$ を証明できないことがいえるので矛盾です。一方もし $\neg\, R_q(q)$ が証明できるとすると、やはり上から $R_q(q)$ が証明できることになるので矛盾です。よって $R_q(q)$ は P においては P が無矛盾である限りは証明も反証もできず、すなわち決定不可能な命題であることがわかります。[証明概略終]

証明の中で対角線論法を用いているのがわかるでしょう。そしてラッセルのパラドックスと類似した論理式を導いているわけですが、今度の場合は矛盾ではなく証明も反証もできないという意味になっています。

$R_q(q)$ は証明できないので、超数学的には $R_q(q)$ は正しい命題 (真) であることがわかります。超数学的な分析においてはこういった奇妙なことが起こるのです。「この奇妙な構造を詳しく分析すると驚くべき定理が得られる」とゲーデルは述べています。それが第二不完全性定理です。ただしその証明を完全なものとして示したのはロッサーでした。

重要なことは、算術を含む公理系が完全であり得ないことや無矛盾性を証明できないことは、公理系の強さの問題ではないということです。証明からもわかるように、不完全性定理は、公理系が無限集合である自然数全体の集合の存在を認めているために生じるわけです。しかし自然数全体の集合が許されない数学は、もはや数学とはいえないので、不完全性定理は数学そのものに対する定理だと考えられています。

いま一度、矛盾した公理系からは何でも証明できることに注意してください。すなわち矛盾した公理系からはその公理系の無矛盾性さえ証明できるのです。しかし一方、算術を含む無矛盾な公理系からは、その公理系の無矛盾性を証明できません。このことは、誠実でない人が平然と「自分は誠実だ」と主張するのに対し、知的で誠実な人はけっしてそのようなことは言わない、という世俗的な事情とよく似ています。

(余談) その後、ゲンツェンが自然数論の無矛盾性の証明に成功します。これは、集合論が無矛盾であるときに自然数論が無矛盾であるというものです。ゲンツェンは証明の中で超限帰納法を用いていますので。そして肝心の集合論の無矛盾性の方は、不完全性定理により証明不可能です。不完全性定理に対してゲンツェンの定理をあたかも反例であるかのように引き合いに出してくる人をみかけますので、念のため。また、「ヒルベルトプログラムは算術の無矛盾をうたったもので、

ここでいう算術は自然数論のことであり、集合論ではない。よってゲンツェンの証明によりヒルベルトプログラムの目的は果たされた」などと考える人もいるようですが、集合論の無矛盾性がわからない限り、本当の意味での自然数論の無矛盾性はわからないので、このような主張も的を得ていないでしょう。不完全性定理はヒルベルトプログラムを “否定的に解決した” と考えるのが素直な見方であり、広く認められた考え方です。

索 引

ま

や

ら

わ