

あもんノート

ユークリッド幾何学、ニュートン力学から、相対論、宇宙論、量子論、場の量子論、素粒子論、そして超ひも理論まで、理論物理学を簡潔にかつ幅広く網羅したノートです。TOP へは下の URL をクリックして行けます。専用の画像掲示板で、ご意見、ご質問等も受け付けております。

<http://amonphys.web.fc2.com/>

目次

第 20 章 素粒子論の計算	3
20.1 クリフォード代数とトレース公式	3
20.2 μ 粒子の対生成	4
20.3 メラー散乱	6
20.4 バーバー散乱	8
20.5 コンプトン散乱	10
20.6 実験室系におけるコンプトン散乱	13
20.7 対消滅	14
20.8 荷電 粒子の寿命	16
20.9 レプトン対のヘリシティ	17
20.10 μ 粒子の寿命	19
20.11 中性子の寿命	21
20.12 中性 粒子の寿命	22
20.13 ファインマングラフの数値計算	24

第20章 素粒子論の計算

ファインマングラフに基づく素粒子論の解析的計算は、特にフェルミオンが絡む現実的な問題においては、ガンマ行列の存在のため複雑かつトリッキーで、間違えやすいです。そこでここではいくつか代表的な計算例を紹介します。量子電磁気学(QED)と素粒子論は既知とします。

20.1 クリフォード代数とトレース公式

ガンマ行列のクリフォード代数は、

$$\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = 2g^{\mu\nu}$$

でした。これに注意すると、

$$\{\gamma^\mu, \gamma_\mu\} = 2\delta_\mu^\mu = 8 \quad \therefore \gamma^\mu \gamma_\mu = 4.$$

また、

$$\gamma^\mu \gamma^\alpha \gamma_\mu = (2g^{\mu\alpha} - \gamma^\alpha \gamma^\mu) \gamma_\mu = 2\gamma^\alpha - 4\gamma^\alpha = -2\gamma^\alpha.$$

同様にやって、

$$\gamma^\mu \gamma^\alpha \gamma^\beta \gamma_\mu = 4g^{\alpha\beta}, \quad \gamma^\mu \gamma^\alpha \gamma^\beta \gamma^\gamma \gamma_\mu = -2\gamma^\gamma \gamma^\beta \gamma^\alpha$$

を得るでしょう。

一方、ガンマ行列 n 個の積のトレース： $\text{tr}(\gamma^{\mu_1} \gamma^{\mu_2} \dots \gamma^{\mu_n})$ については、ガンマ行列の成分のあり方から n が奇数のときは 0 で、 $n = 2$ のときは $\text{tr}(AB) = \text{tr}(BA)$ に注意して、

$$\text{tr}(\gamma^\mu \gamma^\nu) = \frac{1}{2} \text{tr}(\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\}) = g^{\mu\nu} \text{tr} 1 = 4g^{\mu\nu}.$$

$n = 4$ のときは、

$$\begin{aligned} \text{tr}(\gamma^\mu \gamma^\nu \gamma^\rho \gamma^\sigma) &= (1/2) \text{tr}(\{\gamma^\mu, \gamma^\nu \gamma^\rho \gamma^\sigma\}) \\ &= (1/2) \text{tr}(\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} \gamma^\rho \gamma^\sigma - \gamma^\nu \{\gamma^\mu, \gamma^\rho\} \gamma^\sigma + \gamma^\nu \gamma^\rho \{\gamma^\mu, \gamma^\sigma\}) \\ &= g^{\mu\nu} \text{tr}(\gamma^\rho \gamma^\sigma) - g^{\mu\rho} \text{tr}(\gamma^\nu \gamma^\sigma) + g^{\mu\sigma} \text{tr}(\gamma^\nu \gamma^\rho) \\ &= 4g^{\mu\nu} g^{\rho\sigma} - 4g^{\mu\rho} g^{\nu\sigma} + 4g^{\mu\sigma} g^{\nu\rho} \end{aligned}$$

と計算されます。これらをガンマ行列のトレース公式といいます。

トレースに γ_5 が含まれる場合、すなわち $\text{tr}(\gamma_5 \gamma^{\mu_1} \gamma^{\mu_2} \dots \gamma^{\mu_n})$ は、 n が奇数のときはやはり成分のあり方から 0 で、また、

$$\text{tr} \gamma_5 = 0, \quad \text{tr}(\gamma_5 \gamma^\mu \gamma^\nu) = 0$$

も直接的に確かめられるでしょう。一方、 $\text{tr}(\gamma_5 \gamma^\mu \gamma^\nu \gamma^\rho \gamma^\sigma)$ については、これが4つの添字について完全反対称であることがわかるので、 $\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma}$ を4元レビ・チビタとして、

$$\text{tr}(\gamma_5 \gamma^\mu \gamma^\nu \gamma^\rho \gamma^\sigma) = \epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} \text{tr}(\gamma_5 \gamma^0 \gamma^1 \gamma^2 \gamma^3) = -i \epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} \text{tr}(\gamma_5 \gamma_5) = -4i \epsilon^{\mu\nu\rho\sigma}$$

となります。

これら公式はディラック場を含むファインマングラフの計算で頻繁に用いられるので、少なくともここに示したものは全て暗記してしまった方がよいでしょう。また、ディラック場の平面波振幅の性質、

$$\begin{aligned} (\not{p} - m)u_s(\mathbf{p}) &= 0, & (\not{p} + m)v_s(\mathbf{p}) &= 0, \\ \sum_s u_s(\mathbf{p})\bar{u}_s(\mathbf{p}) &= \not{p} + m, & \sum_s v_s(\mathbf{p})\bar{v}_s(\mathbf{p}) &= \not{p} - m \end{aligned}$$

も思い出しておくべきでしょう。ここで \not{p} は $\gamma \cdot p$ の略記です。

20.2 μ 粒子の対生成

まずは、電子と陽電子の衝突による μ 粒子の対生成：

$$e\bar{e} \rightarrow \mu\bar{\mu}$$

の断面積を求めてみましょう。これは QED におけるもっともやさしい計算問題といえます。

グラフは素電荷 e の最低次で図 20.1 だけであり、よって散乱振幅は、

$$\mathfrak{M} = \frac{-ig^{\mu\nu}}{(k_1+k_2)^2} \bar{v}_2(ie\gamma_\mu)u_1 \bar{u}_3(ie\gamma_\nu)v_4 = \frac{ie^2}{(k_1+k_2)^2} (\bar{v}_2\gamma_\mu u_1)(\bar{u}_3\gamma^\mu v_4)$$

となります。 $u_i = u_{s_i}(\mathbf{k}_i)$, $v_i = v_{s_i}(\mathbf{k}_i)$ という略記を用いました。よって、

$$\begin{aligned} \sum_{s_1 \sim s_4} |\mathfrak{M}|^2 &= \frac{e^4}{(k_1+k_2)^4} \sum_{s_1 \sim s_4} (\bar{v}_2\gamma_\mu u_1)(\bar{u}_3\gamma^\mu v_4)(\bar{u}_1\gamma_\nu v_2)(\bar{v}_4\gamma^\nu u_3) \\ &= \frac{e^4}{(k_1+k_2)^4} \sum_{s_1 \sim s_4} \text{tr}(\gamma_\mu u_1 \bar{u}_1 \gamma_\nu v_2 \bar{v}_2) \text{tr}(\gamma^\mu v_4 \bar{v}_4 \gamma^\nu u_3 \bar{u}_3) \\ &= \frac{e^4}{(k_1+k_2)^4} \text{tr}(\gamma_\mu \not{k}_1 \gamma_\nu \not{k}_2) \text{tr}(\gamma^\mu (\not{k}_4 - m) \gamma^\nu (\not{k}_3 + m)). \end{aligned}$$

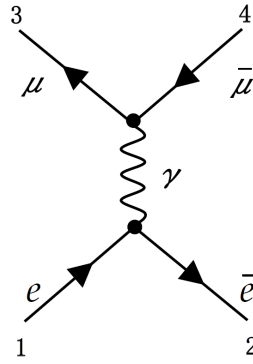


図 20.1: μ 粒子の対生成

$m \sim 106 \text{ MeV}$ は μ 粒子の質量で、電子の質量 ($\sim 0.5 \text{ MeV}$) はこれと比べてずっと小さいので無視しました。系のエネルギーが $2m$ より大きくないとこの反応は生じず、反応が生じる場合、電子は重心系において常に超相対論的 (エネルギー \gg 質量) であることに注意してください。よってこの近似は妥当なわけです。

トレース公式で展開すると、

$$\begin{aligned} \sum_{s_1 \sim s_4} |\mathfrak{M}|^2 &= \frac{e^4}{(k_1 + k_2)^4} (4k_{1\mu}k_{2\nu} + 4k_{1\nu}k_{2\mu} - 4g_{\mu\nu}k_1 \cdot k_2) \\ &\quad \times (4k_3^\mu k_4^\nu + 4k_3^\nu k_4^\mu - 4g^{\mu\nu}k_3 \cdot k_4 - 4g^{\mu\nu}m^2) \\ &= \frac{32e^4}{(k_1 + k_2)^4} (k_1 \cdot k_3 k_2 \cdot k_4 + k_1 \cdot k_4 k_2 \cdot k_3 + m^2 k_1 \cdot k_2). \end{aligned}$$

重心系においては、エネルギーの保存に注意して、

$$k_1^\mu = (|\mathbf{k}|, \mathbf{k}), \quad k_2^\mu = (|\mathbf{k}|, -\mathbf{k}), \quad k_3^\mu = (|\mathbf{k}|, \mathbf{k}'), \quad k_4^\mu = (|\mathbf{k}|, -\mathbf{k}')$$

とおけるので、散乱角 (\mathbf{k} と \mathbf{k}' の成す角) を θ として、

$$\begin{aligned} \sum_{s_1 \sim s_4} |\mathfrak{M}|^2 &= \frac{32e^4}{(2|\mathbf{k}|)^4} \left((|\mathbf{k}|^2 - |\mathbf{k}||\mathbf{k}'| \cos \theta)^2 + (|\mathbf{k}|^2 + |\mathbf{k}||\mathbf{k}'| \cos \theta)^2 + 2m^2|\mathbf{k}|^2 \right) \\ &= \frac{4e^4}{|\mathbf{k}|^2} (|\mathbf{k}|^2 + |\mathbf{k}'|^2 \cos^2 \theta + m^2) \end{aligned}$$

となります。

スピンを観測しないものとする、始状態においては平均をとり、終状態においては和をとることになるので、微分断面積は、

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{1}{64\pi^2(2|\mathbf{k}|)^2} \frac{|\mathbf{k}'|}{|\mathbf{k}|} \frac{1}{4} \sum_{s_1 \sim s_4} |\mathfrak{M}|^2 = \frac{e^4 |\mathbf{k}'|}{256\pi^2 |\mathbf{k}|^5} (|\mathbf{k}|^2 + m^2 + |\mathbf{k}'|^2 \cos^2 \theta)$$

と評価され、またエネルギー保存から $|k'| = \sqrt{|k|^2 - m^2}$ です。断面積は、

$$\sigma = 2\pi \int_0^\pi d\theta \sin\theta \frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{e^4 \sqrt{|k|^2 - m^2} (2|k|^2 + m^2)}{96\pi |k|^5}$$

となります。

20.3 メラー散乱

電子の2体弾性散乱：

$$ee \rightarrow ee$$

をメラー散乱といいます。グラフは摂動の最低次で図 20.2 の2つです。

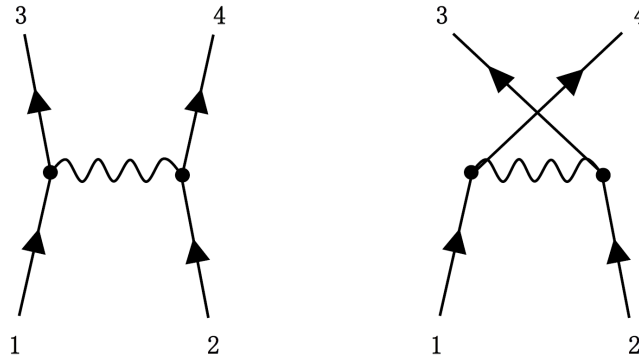


図 20.2: メラー散乱

これらを A, B とすると、

$$A = \frac{ie^2}{(k_1 - k_3)^2} (\bar{u}_3 \gamma_\mu u_1) (\bar{u}_4 \gamma^\mu u_2), \quad B = \frac{-ie^2}{(k_1 - k_4)^2} (\bar{u}_4 \gamma_\mu u_1) (\bar{u}_3 \gamma^\mu u_2).$$

B の式のマイナス因子はフェルミオンの統計符号因子です。

$$\sum_{s_1 \sim s_4} |\mathfrak{M}|^2 = \sum_{s_1 \sim s_4} |A + B|^2 = \sum_{s_1 \sim s_4} |A|^2 + \sum_{s_1 \sim s_4} |B|^2 + \sum_{s_1 \sim s_4} AB^* + \sum_{s_1 \sim s_4} A^*B$$

と展開し、各項を計算していきましょう。

$$\begin{aligned} \sum |A|^2 &= \frac{e^4}{(k_1 - k_3)^4} \sum (\bar{u}_3 \gamma_\mu u_1) (\bar{u}_4 \gamma^\mu u_2) (\bar{u}_1 \gamma_\nu u_3) (\bar{u}_2 \gamma^\nu u_4) \\ &= \frac{e^4}{(k_1 - k_3)^4} \text{tr}(\gamma_\mu (\not{k}_1 + m) \gamma_\nu (\not{k}_3 + m)) \text{tr}(\gamma^\mu (\not{k}_2 + m) \gamma^\nu (\not{k}_4 + m)) \\ &= \frac{e^4}{(k_1 - k_3)^4} (4k_{1\mu} k_{3\nu} + 4k_{1\nu} k_{3\mu} - 4g_{\mu\nu} k_1 \cdot k_3 + 4m^2 g_{\mu\nu}) \\ &\quad \times (4k_2^\mu k_4^\nu + 4k_2^\nu k_4^\mu - 4g^{\mu\nu} k_2 \cdot k_4 + 4m^2 g^{\mu\nu}) \end{aligned}$$

$$\therefore \sum |A|^2 = \frac{32e^4}{(k_1 - k_3)^4} (k_1 \cdot k_2 k_3 \cdot k_4 + k_1 \cdot k_4 k_2 \cdot k_3 - m^2 k_1 \cdot k_3 - m^2 k_2 \cdot k_4 + 2m^4).$$

m は電子の質量です。 $\sum |B|^2$ はこの式の k_3^μ と k_4^μ を入れ換えた式なので、

$$\sum |B|^2 = \frac{32e^4}{(k_1 - k_4)^4} (k_1 \cdot k_2 k_3 \cdot k_4 + k_1 \cdot k_3 k_2 \cdot k_4 - m^2 k_1 \cdot k_4 - m^2 k_2 \cdot k_3 + 2m^4).$$

また、

$$\begin{aligned} \sum AB^* &= \frac{-e^4}{(k_1 - k_3)^2 (k_1 - k_4)^2} \sum (\bar{u}_3 \gamma_\mu u_1) (\bar{u}_4 \gamma^\mu u_2) (\bar{u}_1 \gamma_\nu u_4) (\bar{u}_2 \gamma^\nu u_3) \\ &= \frac{-e^4}{(k_1 - k_3)^2 (k_1 - k_4)^2} \text{tr}(\gamma_\mu (\not{k}_1 + m) \gamma_\nu (\not{k}_4 + m) \gamma^\mu (\not{k}_2 + m) \gamma^\nu (\not{k}_3 + m)) \end{aligned}$$

ですが、この式のトレース部は、クリフォード代数の公式に注意して、

$$\text{tr}((-2\not{k}_4 \gamma_\nu \not{k}_1 + 4m(k_{1\nu} + k_{4\nu}) - 2m^2 \gamma_\nu) (\not{k}_2 + m) \gamma^\nu (\not{k}_3 + m))$$

と変形され、これを展開してできる3つのトレース部は、順に、

$$\begin{aligned} -32 k_1 \cdot k_2 k_3 \cdot k_4 + 16m^2 k_1 \cdot k_4, \quad & 16m^2 (k_1 \cdot k_2 + k_1 \cdot k_3 + k_2 \cdot k_4 + k_3 \cdot k_4), \\ & 16m^2 k_2 \cdot k_3 - 32m^4 \end{aligned}$$

を与えるので、

$$\begin{aligned} \sum AB^* &= \frac{16e^4}{(k_1 - k_3)^2 (k_1 - k_4)^2} \left(2k_1 \cdot k_2 k_3 \cdot k_4 + 2m^4 \right. \\ &\quad \left. - m^2 (k_1 \cdot k_2 + k_1 \cdot k_3 + k_1 \cdot k_4 + k_2 \cdot k_3 + k_2 \cdot k_4 + k_3 \cdot k_4) \right). \end{aligned}$$

これは実数ですから、 $\sum A^*B$ も同じ式になります。

重心系をとり、入射運動量を k 、散乱角を θ とすれば、

$$\begin{aligned} k_1 \cdot k_2 &= k_3 \cdot k_4 = 2|\mathbf{k}|^2 + m^2, \\ k_1 \cdot k_3 &= k_2 \cdot k_4 = |\mathbf{k}|^2 (1 - \cos \theta) + m^2, \\ k_1 \cdot k_4 &= k_2 \cdot k_3 = |\mathbf{k}|^2 (1 + \cos \theta) + m^2 \end{aligned}$$

に注意して、

$$\begin{aligned} \sum |A|^2 &= 8e^4 \frac{(2|\mathbf{k}|^2 + m^2)^2 + |\mathbf{k}|^4 (1 + \cos \theta)^2 + 4m^2 |\mathbf{k}|^2 \cos \theta + m^4}{|\mathbf{k}|^4 (1 - \cos \theta)^2}, \\ \sum |B|^2 &= 8e^4 \frac{(2|\mathbf{k}|^2 + m^2)^2 + |\mathbf{k}|^4 (1 - \cos \theta)^2 - 4m^2 |\mathbf{k}|^2 \cos \theta + m^4}{|\mathbf{k}|^4 (1 + \cos \theta)^2}, \\ \sum AB^* &= \sum A^*B = 8e^4 \frac{4|\mathbf{k}|^4 - m^4}{|\mathbf{k}|^4 \sin^2 \theta} \end{aligned}$$

となります。これらを加えて整理すれば、

$$\begin{aligned} \sum |\mathfrak{M}|^2 &= \frac{16e^4}{|\mathbf{k}|^4 \sin^4 \theta} \left(9|\mathbf{k}|^4 + 6|\mathbf{k}|^4 \cos^2 \theta + |\mathbf{k}|^4 \cos^4 \theta \right. \\ &\quad \left. + 4m^2|\mathbf{k}|^2 + 12m^2|\mathbf{k}|^2 \cos^2 \theta + m^4 + 3m^4 \cos^2 \theta \right) \\ &= \frac{16e^4}{\sin^4 \theta} \left((4 - \sin^2 \theta)^2 + \frac{m^2(m^2 + 4|\mathbf{k}|^2)}{|\mathbf{k}|^4} (4 - 3 \sin^2 \theta) \right). \end{aligned}$$

よって微分断面積は、

$$\begin{aligned} \frac{d\sigma}{d\Omega} &= \frac{1}{64\pi^2 (2\sqrt{|\mathbf{k}|^2 + m^2})^2} \frac{1}{4} \sum |\mathfrak{M}|^2 \\ &= \frac{e^4}{64\pi^2 (|\mathbf{k}|^2 + m^2) \sin^4 \theta} \left((4 - \sin^2 \theta)^2 + \frac{m^2(m^2 + 4|\mathbf{k}|^2)}{|\mathbf{k}|^4} (4 - 3 \sin^2 \theta) \right) \end{aligned}$$

となります。

20.4 バーバー散乱

電子と陽電子の弾性散乱：

$$e\bar{e} \rightarrow e\bar{e}$$

をバーバー散乱といいます。グラフは摂動の最低次で図 20.3 の 2 つです。

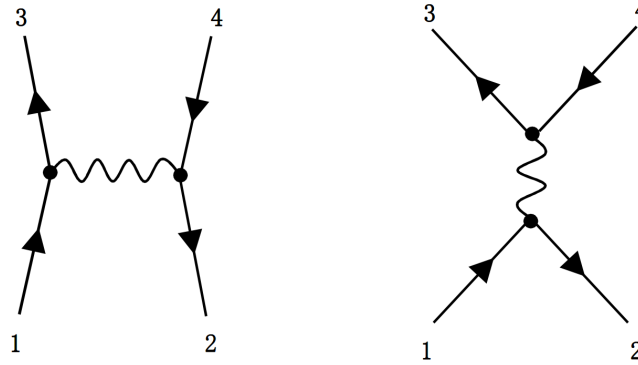


図 20.3: バーバー散乱

これらを A, B とすると、

$$A = \frac{ie^2}{(k_1 - k_3)^2} (\bar{u}_3 \gamma_\mu u_1) (\bar{v}_2 \gamma^\mu v_4), \quad B = \frac{-ie^2}{(k_1 + k_2)^2} (\bar{v}_2 \gamma_\mu u_1) (\bar{u}_3 \gamma^\mu v_4).$$

B の式のマイナス因子はフェルミオンの統計符号因子です。

ここでは簡単のため高エネルギー極限 ($|\mathbf{k}_i| \gg m$) において考えましょう。このとき電子の質量 m を無視できて、

$$\begin{aligned} \sum_{\text{spins}} |A|^2 &= \frac{e^4}{(k_1 - k_3)^4} \text{tr}(\gamma_\mu \not{k}_1 \gamma_\nu \not{k}_3) \text{tr}(\gamma^\mu \not{k}_4 \gamma^\nu \not{k}_2) \\ &= \frac{32e^4}{(k_1 - k_3)^4} (k_1 \cdot k_2 k_3 \cdot k_4 + k_1 \cdot k_4 k_2 \cdot k_3), \\ \sum_{\text{spins}} |B|^2 &= \frac{e^4}{(k_1 + k_2)^4} \text{tr}(\gamma_\mu \not{k}_1 \gamma_\nu \not{k}_2) \text{tr}(\gamma^\mu \not{k}_4 \gamma^\nu \not{k}_3) \\ &= \frac{32e^4}{(k_1 + k_2)^4} (k_1 \cdot k_3 k_2 \cdot k_4 + k_1 \cdot k_4 k_2 \cdot k_3), \\ \sum_{\text{spins}} AB^* &= \frac{-e^4}{(k_1 - k_3)^2 (k_1 + k_2)^2} \text{tr}(\gamma_\mu \not{k}_1 \gamma_\nu \not{k}_2 \gamma^\mu \not{k}_4 \gamma^\nu \not{k}_3) \\ &= \frac{32e^4}{(k_1 - k_3)^2 (k_1 + k_2)^2} k_1 \cdot k_4 k_2 \cdot k_3. \end{aligned}$$

重心系をとり、入射運動量を \mathbf{k} , 散乱角を θ とすれば、

$$\begin{aligned} k_1 \cdot k_2 &= k_3 \cdot k_4 = 2|\mathbf{k}|^2, \\ k_1 \cdot k_3 &= k_2 \cdot k_4 = 2|\mathbf{k}|^2 \sin^2(\theta/2), \\ k_1 \cdot k_4 &= k_2 \cdot k_3 = 2|\mathbf{k}|^2 \cos^2(\theta/2) \end{aligned}$$

となることに注意して、

$$\begin{aligned} \sum |A|^2 &= 8e^4 \frac{1 + \cos^4(\theta/2)}{\sin^4(\theta/2)}, & \sum |B|^2 &= 4e^4(1 + \cos^2 \theta), \\ \sum (AB^* + A^*B) &= 2 \sum AB^* = -16e^4 \frac{\cos^4(\theta/2)}{\sin^2(\theta/2)}. \end{aligned}$$

よって、高エネルギー極限での微分断面積は、

$$\begin{aligned} \frac{d\sigma}{d\Omega} &= \frac{1}{64\pi^2 (2|\mathbf{k}|)^2} \frac{1}{4} \sum (|A|^2 + |B|^2 + AB^* + A^*B) \\ &= \frac{e^4}{128\pi^2 |\mathbf{k}|^2} \left(\frac{1 + \cos^4(\theta/2)}{\sin^4(\theta/2)} - \frac{2 \cos^4(\theta/2)}{\sin^2(\theta/2)} + \frac{1 + \cos^2 \theta}{2} \right) \end{aligned}$$

となります。

20.5 コンプトン散乱

電子と光子の弾性散乱：

$$e\gamma \rightarrow e\gamma$$

はコンプトン散乱と呼ばれます。ファインマングラフは摂動の最低次で図 20.4 の 2 つです。

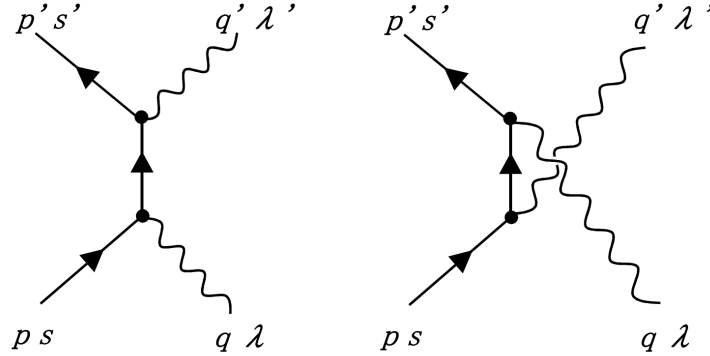


図 20.4: コンプトン散乱

まとめて式にすると、

$$\mathfrak{M} = -ie^2 \varepsilon_{\lambda'}^\mu(\mathbf{q}') \varepsilon_\lambda^\nu(\mathbf{q}) \bar{u}_{s'}(\mathbf{p}') \left(\gamma_\mu \frac{1}{\not{p} + \not{q} - m} \gamma_\nu + \gamma_\nu \frac{1}{\not{p} - \not{q}' - m} \gamma_\mu \right) u_s(\mathbf{p})$$

です。電子の 4 元運動量を始状態と終状態においてそれぞれ p^μ, p'^μ とし、光子のそれらを q^μ, q'^μ としました。

光子が始状態や終状態にあると、スカラーモードと縦波モードについて少し考えてやる必要があります。

$$\varepsilon_0^\mu(\mathbf{q}) + \varepsilon_3^\mu(\mathbf{q}) = q^\mu / |\mathbf{q}|$$

および、簡単に確かめられる等式：

$$\frac{1}{\not{p} + \not{q} - m} \not{q} u_s(\mathbf{p}) = u_s(\mathbf{p}), \quad \bar{u}_{s'}(\mathbf{p}') \not{q}' \frac{1}{\not{p}' - \not{q}' - m} = -\bar{u}_{s'}(\mathbf{p}')$$

に注意すると、任意のスカラーモードを縦波モードに入れ換えたとき、散乱振幅 \mathfrak{M} は符号を変えるだけであることがわかるでしょう。すなわち、

$$\mathfrak{M} |_{\lambda=0} + \mathfrak{M} |_{\lambda=3} = 0, \quad \mathfrak{M} |_{\lambda'=0} + \mathfrak{M} |_{\lambda'=3} = 0.$$

このような等式はワード・高橋恒等式と総称されます。これにより、

$$\sum_{\lambda, \lambda'} d_\lambda d_{\lambda'} |\mathfrak{M}|^2 = \sum_{\lambda=1,2} \sum_{\lambda'=1,2} |\mathfrak{M}|^2$$

が成り立ちます。ここで d_λ は $\lambda = 0$ のとき -1 , 他るとき $+1$ を与える因子です。そうすると、

$$\begin{aligned} \sum_{\text{phys}} |\mathfrak{M}|^2 &:= \sum_{s,s'} \sum_{\lambda=1,2} \sum_{\lambda'=1,2} |\mathfrak{M}|^2 = \sum_{s,s',\lambda,\lambda'} d_\lambda d_{\lambda'} |\mathfrak{M}|^2 \\ &= e^4 \sum_{s,s',\lambda,\lambda'} d_\lambda d_{\lambda'} \varepsilon_{\lambda'}^\mu(\mathbf{q}') \varepsilon_\lambda^\nu(\mathbf{q}) \varepsilon_{\lambda'}^\rho(\mathbf{q}') \varepsilon_\lambda^\sigma(\mathbf{q}) \\ &\quad \times \bar{u}_{s'}(\mathbf{p}') \left(\gamma_\mu \frac{1}{\not{p} + \not{q} - m} \gamma_\nu + \gamma_\nu \frac{1}{\not{p} - \not{q}' - m} \gamma_\mu \right) u_s(\mathbf{p}) \\ &\quad \times \bar{u}_s(\mathbf{p}) \left(\gamma_\sigma \frac{1}{\not{p} + \not{q} - m} \gamma_\rho + \gamma_\rho \frac{1}{\not{p} - \not{q}' - m} \gamma_\sigma \right) u_{s'}(\mathbf{p}') \end{aligned}$$

ですが、

$$\sum_{\lambda} d_\lambda \varepsilon_\lambda^\mu(\mathbf{q}) \varepsilon_\lambda^\nu(\mathbf{q}) = \sum_{\lambda,\lambda'} (-g^{\lambda\lambda'}) \varepsilon_\lambda^\mu(\mathbf{q}) \varepsilon_{\lambda'}^\nu(\mathbf{q}) = -g^{\mu\nu}$$

および $\frac{1}{\not{p} + \not{q} - m} = \frac{\not{p} + \not{q} + m}{2p \cdot q}$, $\frac{1}{\not{p} - \not{q}' - m} = -\frac{\not{p} - \not{q}' + m}{2p \cdot q'}$ に注意すると、

$$\begin{aligned} \sum_{\text{phys}} |\mathfrak{M}|^2 &= \frac{e^4}{4(p \cdot q)^2} \text{tr}((\not{p}' + m) \gamma_\mu (\not{p} + \not{q} + m) \gamma_\nu (\not{p} + m) \gamma^\nu (\not{p} + \not{q} + m) \gamma^\mu) \\ &\quad + \frac{e^4}{4(p \cdot q')^2} \text{tr}((\not{p}' + m) \gamma_\nu (\not{p} - \not{q}' + m) \gamma_\mu (\not{p} + m) \gamma^\mu (\not{p} - \not{q}' + m) \gamma^\nu) \\ &\quad - \frac{e^4}{4p \cdot q p \cdot q'} \text{tr}((\not{p}' + m) \gamma_\mu (\not{p} + \not{q} + m) \gamma_\nu (\not{p} + m) \gamma^\mu (\not{p} - \not{q}' + m) \gamma^\nu) \\ &\quad - \frac{e^4}{4p \cdot q p \cdot q'} \text{tr}((\not{p}' + m) \gamma_\nu (\not{p} - \not{q}' + m) \gamma_\mu (\not{p} + m) \gamma^\nu (\not{p} + \not{q} + m) \gamma^\mu) \end{aligned}$$

と展開されるでしょう。最初のトレース部は、クリフォード代数の公式により、

$$4 \text{tr}((\not{p}' - 2m)(\not{p} + \not{q} + m)(\not{p} - 2m)(\not{p} + \not{q} + m))$$

となりませんが、4元運動量保存則 $p'^\mu = p^\mu + q^\mu - q'^\mu$ および $p'^2 = m^2$ からわかる $q \cdot q' = p \cdot q - p \cdot q'$ という等式に注意すると、ガンマ行列4つの積から来る寄与、2つの積から来る寄与、ガンマ行列を含まない項から来る寄与は、順に、

$$16m^4 + 16m^2 p \cdot q + 16m^2 p \cdot q' + 32 p \cdot q p \cdot q', \quad -48m^4 + 16m^2 p \cdot q - 16m^2 p \cdot q', \quad 64m^4$$

となるでしょう。よって、

$$\text{最初のトレース部} = 32m^4 + 32m^2 p \cdot q + 32 p \cdot q p \cdot q'.$$

また、2番目のトレース部は、最初のトレース部を $q \rightarrow -q'$, $q' \rightarrow -q$ と置換したもののなので、

$$2 \text{番目のトレース部} = 32m^4 - 32m^2 p \cdot q' + 32 p \cdot q p \cdot q'.$$

一方、3番目のトレース部は、やはりクリフォード代数の公式により、

$$\text{tr}((\not{p}' + m)(-2\not{p}\gamma_\nu(\not{p} + \not{q}) + 4m(2p_\nu + q_\nu) - 2m^2\gamma_\nu)(\not{p} - \not{q}' + m)\gamma^\nu)$$

となりますが、展開して得られる3つのトレース部は、順に、

$$-16m^4 - 16m^2p \cdot q + 32m^2p \cdot q', \quad 64m^4 + 32m^2p \cdot q - 32m^2p \cdot q', \quad -16m^4 - 16m^2p \cdot q'$$

を与えるので、

$$3\text{番目のトレース部} = 32m^4 + 16m^2p \cdot q - 16m^2p \cdot q'.$$

再び置換 $q \rightarrow -q'$, $q' \rightarrow -q$ により、

$$4\text{番目のトレース部} = 32m^4 + 16m^2p \cdot q - 16m^2p \cdot q'.$$

よって結局、

$$\sum_{\text{phys}} |\mathfrak{M}|^2 = 8e^4 \left(\frac{p \cdot q}{p \cdot q'} + \frac{p \cdot q'}{p \cdot q} - 2m^2 \left(\frac{1}{p \cdot q'} - \frac{1}{p \cdot q} \right) + m^4 \left(\frac{1}{p \cdot q'} - \frac{1}{p \cdot q} \right)^2 \right)$$

を得ます。

特に重心系においては、

$$p^\mu = (E, \mathbf{p}), \quad q^\mu = (|\mathbf{p}|, -\mathbf{p}), \quad p'^\mu = (E, \mathbf{p}'), \quad q'^\mu = (|\mathbf{p}'|, -\mathbf{p}')$$

とおけて、ここで $E = \sqrt{|\mathbf{p}|^2 + m^2}$ です。散乱角を θ とすれば、

$$\sum_{\text{phys}} |\mathfrak{M}|^2 = 8e^4 \left(\frac{E + |\mathbf{p}| \cos \theta}{E + |\mathbf{p}|} + \frac{E + |\mathbf{p}|}{E + |\mathbf{p}| \cos \theta} - \left(\frac{m \sin \theta}{E + |\mathbf{p}| \cos \theta} \right)^2 \right)$$

と整理されます。よって微分断面積は、

$$\begin{aligned} \frac{d\sigma}{d\Omega} &= \frac{1}{64\pi^2(E + |\mathbf{p}|)^2} \frac{1}{4} \sum_{\text{phys}} |\mathfrak{M}|^2 \\ &= \frac{e^4}{32\pi^2(E + |\mathbf{p}|)^2} \left(\frac{E + |\mathbf{p}| \cos \theta}{E + |\mathbf{p}|} + \frac{E + |\mathbf{p}|}{E + |\mathbf{p}| \cos \theta} - \left(\frac{m \sin \theta}{E + |\mathbf{p}| \cos \theta} \right)^2 \right) \end{aligned}$$

となり、これはクライン・仁科の公式(重心系版)と呼ばれます。断面積は、

$$\sigma = \frac{e^4}{16\pi(E + |\mathbf{p}|)^2} \left(\frac{2E}{E + |\mathbf{p}|} + \frac{4m^2}{|\mathbf{p}|^2} + \left(1 + \frac{E}{|\mathbf{p}|} - \frac{2m^2E}{|\mathbf{p}|^3} \right) \log \frac{E + |\mathbf{p}|}{E - |\mathbf{p}|} \right)$$

と計算されます。

非相対論的極限 ($m \gg |\mathbf{p}|$) におけるコンプトン散乱はトムソン散乱と呼ばれますが、その微分断面積、および断面積は、

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{e^4}{32\pi^2 m^2} (2 - \sin^2 \theta), \quad \sigma = \frac{e^4}{6\pi m^2}$$

となることがわかります。

(余談) コンプトン散乱の計算は、丁寧に導出が書かれている文献が見つからず、ほとんど独自に行ったのですが、ワード・高橋恒等式や $q \cdot q' = p \cdot q - p \cdot q'$ の存在になかなか気付かず、1ヶ月ほど悩み苦しみました。ここでは読者が同じ苦しみを味わわなくて済むよう、計算の過程を比較的丁寧に書きました。

20.6 実験室系におけるコンプトン散乱

コンプトン散乱において、始状態で電子が静止している系を実験室系といいます。重心系に対する実験室系の速さは、重心系における電子の速さ $v = |\mathbf{p}|/E$ であり、実験室系における始状態の光子の角振動数 (= エネルギー) を ω 、終状態のそれを ω' とすると、光のドップラー効果に注意して(電磁気学の章参照)、

$$\omega = \frac{1+v}{\sqrt{1-v^2}} |\mathbf{p}| = \frac{|\mathbf{p}|}{m} (E + |\mathbf{p}|),$$

$$\omega' = \frac{1+v \cos \theta}{\sqrt{1-v^2}} |\mathbf{p}| = \frac{|\mathbf{p}|}{m} (E + |\mathbf{p}| \cos \theta)$$

です(図 20.5)。また、実験室系における散乱角を Θ とすれば、光行差により、

$$\cos \Theta = \frac{\cos \theta + v}{1 + v \cos \theta} = \frac{E \cos \theta + |\mathbf{p}|}{E + |\mathbf{p}| \cos \theta}$$

であり、この式から、

$$\sin \Theta = \frac{m \sin \theta}{E + |\mathbf{p}| \cos \theta}, \quad \frac{\partial \cos \Theta}{\partial \cos \theta} = \left(\frac{m}{E + |\mathbf{p}| \cos \theta} \right)^2$$

が得られるでしょう。

以上の式から、実験室系におけるコンプトン散乱の微分断面積は、

$$\frac{d\sigma}{d(\cos \Theta) d\phi} = \left(\frac{\partial \cos \Theta}{\partial \cos \theta} \right)^{-1} \frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{e^4}{32\pi^2 m^2} \left(\frac{\omega'}{\omega} \right)^2 \left(\frac{\omega'}{\omega} + \frac{\omega}{\omega'} - \sin^2 \Theta \right)$$

となることがわかり、これがクライン・仁科の公式の実験室系版です。コンプトン散乱は素粒子論より物性論で扱われることが多いため、このような実験室系における式の方が広く知られているようです。

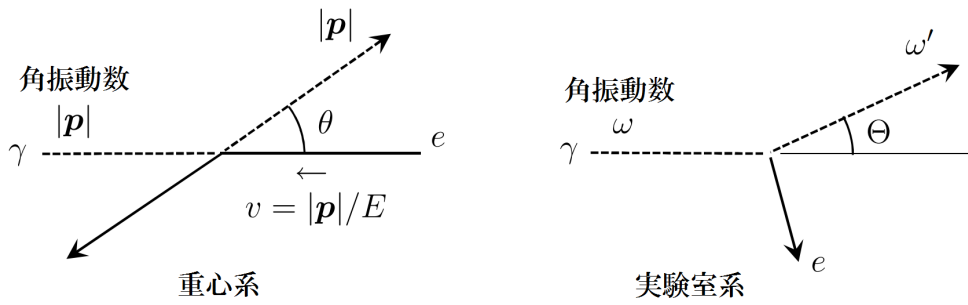


図 20.5: 重心系と実験室系

ω , $\cos \Theta$ の式を逆に解くと、

$$|\mathbf{p}| = \frac{\omega}{\sqrt{1 + (2\omega/m)}}, \quad E = \frac{m + \omega}{\sqrt{1 + (2\omega/m)}}, \quad \cos \theta = \frac{(m + \omega) \cos \Theta - \omega}{m + \omega(1 - \cos \Theta)}$$

となることに注意して、散乱後の光子の角振動数 ω' は、

$$\omega' = \frac{\omega}{1 + (\omega/m)(1 - \cos \Theta)}$$

で与えられることがわかります^(*)。

(*注) これは実験室系におけるエネルギー-運動量保存則からも簡単に導かれる関係式で、高校物理でも扱われます。波長で表せば $\lambda' = \lambda + (2\pi/m)(1 - \cos \Theta)$ となります。

20.7 対消滅

次に電子と陽電子の対消滅：

$$e\bar{e} \rightarrow \gamma\gamma$$

を考えましょう。グラフは摂動の最低次で図 20.6 の 2 つです。

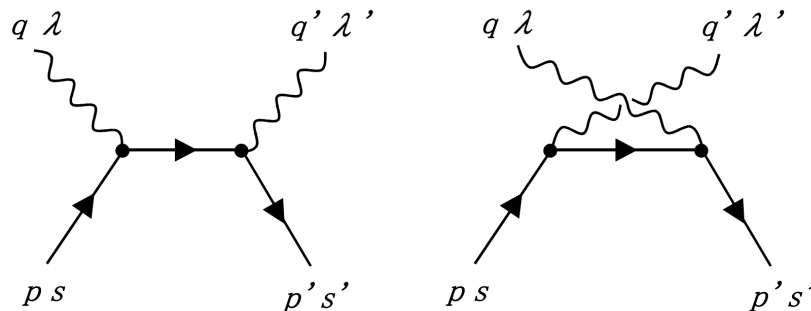


図 20.6: 対消滅

まとめて式にすると、

$$\mathfrak{M} = -ie^2 \varepsilon_{\lambda'}^{\mu}(\mathbf{q}') \varepsilon_{\lambda}^{\nu}(\mathbf{q}) \bar{v}_{s'}(\mathbf{p}') \left(\gamma_{\mu} \frac{1}{\not{p} - \not{q} - m} \gamma_{\nu} + \gamma_{\nu} \frac{1}{\not{p} - \not{q}' - m} \gamma_{\mu} \right) u_s(\mathbf{p}).$$

ここからコンプトン散乱と同様な計算により、

$$\begin{aligned} \sum_{\text{phys}} |\mathfrak{M}|^2 &= \frac{e^4}{4(p \cdot q)^2} \text{tr}((\not{p}' - m) \gamma_{\mu} (\not{p} - \not{q} + m) \gamma_{\nu} (\not{p} + m) \gamma^{\nu} (\not{p} - \not{q} + m) \gamma^{\mu}) \\ &+ \frac{e^4}{4(p \cdot q')^2} \text{tr}((\not{p}' - m) \gamma_{\nu} (\not{p} - \not{q}' + m) \gamma_{\mu} (\not{p} + m) \gamma^{\mu} (\not{p} - \not{q}' + m) \gamma^{\nu}) \\ &+ \frac{e^4}{4p \cdot q p \cdot q'} \text{tr}((\not{p}' - m) \gamma_{\mu} (\not{p} - \not{q} + m) \gamma_{\nu} (\not{p} + m) \gamma^{\mu} (\not{p} - \not{q}' + m) \gamma^{\nu}) \\ &+ \frac{e^4}{4p \cdot q p \cdot q'} \text{tr}((\not{p}' - m) \gamma_{\nu} (\not{p} - \not{q}' + m) \gamma_{\mu} (\not{p} + m) \gamma^{\nu} (\not{p} - \not{q} + m) \gamma^{\mu}) \end{aligned}$$

を得るでしょう。トレース部は、1番目が、

$$-32m^4 + 32m^2 p \cdot q + 32 p \cdot q p \cdot q'.$$

2番目が、

$$-32m^4 + 32m^2 p \cdot q' + 32 p \cdot q p \cdot q'.$$

3番目と4番目が、

$$-32m^4 + 16m^2 p \cdot q + 16m^2 p \cdot q'$$

となります。よって、

$$\sum_{\text{phys}} |\mathfrak{M}|^2 = 8e^4 \left(\frac{p \cdot q'}{p \cdot q} + \frac{p \cdot q}{p \cdot q'} + 2m^2 \left(\frac{1}{p \cdot q} + \frac{1}{p \cdot q'} \right) - m^4 \left(\frac{1}{p \cdot q} + \frac{1}{p \cdot q'} \right)^2 \right)$$

と整理されます。重心系においては、

$$p^{\mu} = (E, \mathbf{p}), \quad q^{\mu} = (E, \mathbf{p}'), \quad q'^{\mu} = (E, -\mathbf{p}'), \quad E = |\mathbf{p}'| = \sqrt{|\mathbf{p}|^2 + m^2}$$

とおけて、散乱角を θ とすれば、

$$\begin{aligned} \sum_{\text{phys}} |\mathfrak{M}|^2 &= 8e^4 \left(\frac{E + |\mathbf{p}| \cos \theta}{E - |\mathbf{p}| \cos \theta} + \frac{E - |\mathbf{p}| \cos \theta}{E + |\mathbf{p}| \cos \theta} \right. \\ &+ \frac{2m^2}{E} \left(\frac{1}{E - |\mathbf{p}| \cos \theta} + \frac{1}{E + |\mathbf{p}| \cos \theta} \right) - \frac{m^4}{E^2} \left(\frac{1}{E - |\mathbf{p}| \cos \theta} + \frac{1}{E + |\mathbf{p}| \cos \theta} \right)^2 \left. \right) \\ &= 16e^4 \frac{E^4 - |\mathbf{p}|^4 \cos^4 \theta + 2m^2 |\mathbf{p}|^2 \sin^2 \theta}{(E^2 - |\mathbf{p}|^2 \cos^2 \theta)^2}. \end{aligned}$$

よって、微分断面積は、

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{1}{64\pi^2(2E)^2} \frac{E}{|\mathbf{p}|} \frac{1}{4} \sum_{\text{phys}} |\mathfrak{M}|^2 = \frac{e^4}{64\pi^2 E |\mathbf{p}|} \frac{E^4 - |\mathbf{p}|^4 \cos^4 \theta + 2m^2 |\mathbf{p}|^2 \sin^2 \theta}{(E^2 - |\mathbf{p}|^2 \cos^2 \theta)^2}.$$

また、断面積は、 θ の積分範囲が $0 \sim \pi/2$ であることに注意して、

$$\sigma = \frac{e^4}{32\pi E |\mathbf{p}|} \left(-1 - \frac{m^2}{E^2} + \left(\frac{E}{|\mathbf{p}|} + \frac{m^2}{E|\mathbf{p}|} - \frac{m^4}{2E^3 |\mathbf{p}|} \right) \log \frac{E + |\mathbf{p}|}{E - |\mathbf{p}|} \right)$$

となります。

20.8 荷電 粒子の寿命

荷電 粒子は、4 フェルミ型の弱い相互作用：

$$\mathcal{L}_I = -\frac{G_F}{\sqrt{2}} f_\pi \partial_\mu \pi^* \bar{l} \gamma^\mu (1 - \gamma_5) \nu$$

を通じてレプトン対に崩壊すると考えられます：

$$\pi^- \rightarrow l \bar{\nu}.$$

l は電子もしくは μ 粒子で、 ν はそれらと対を成すニュートリノです。 τ 粒子への崩壊は τ 粒子の質量が荷電 π 粒子のそれより大きいため有り得ません。 G_F はフェルミの結合定数、 f_π は π 粒子の崩壊定数です。

崩壊のファインマングラフは最低次で図 20.7 であり、 よって散乱振幅は、

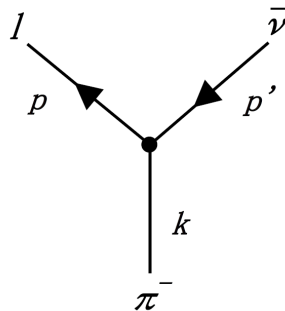


図 20.7: 荷電 粒子の崩壊

$$\begin{aligned} \mathfrak{M} &= -\frac{iG_F f_\pi}{\sqrt{2}} (-ik_\mu) \bar{u}_s(\mathbf{p}) \gamma^\mu (1 - \gamma_5) v_{s'}(\mathbf{p}') \\ &= -\frac{G_F f_\pi}{\sqrt{2}} \bar{u}_s(\mathbf{p}) (\not{p} + \not{p}') (1 - \gamma_5) v_{s'}(\mathbf{p}') \\ &= -\frac{G_F f_\pi m_l}{\sqrt{2}} \bar{u}_s(\mathbf{p}) (1 - \gamma_5) v_{s'}(\mathbf{p}'). \end{aligned}$$

ここで m_l は電子族のレプトンの質量です。ニュートリノ族の質量は0としました。よって、

$$\begin{aligned}\sum_{s,s'} |\mathfrak{M}|^2 &= \frac{(G_F f_\pi m_l)^2}{2} \sum_{s,s'} \bar{u}_s(\mathbf{p})(1-\gamma_5)v_{s'}(\mathbf{p}') \bar{v}_{s'}(\mathbf{p}')(1+\gamma_5)u_s(\mathbf{p}) \\ &= \frac{(G_F f_\pi m_l)^2}{2} \text{tr}((\not{p}+m_l)(1-\gamma_5)\not{p}'(1+\gamma_5)) \\ &= (G_F f_\pi m_l)^2 \text{tr}((\not{p}+m_l)\not{p}'(1+\gamma_5)) = 4(G_F f_\pi m_l)^2 p \cdot p'.\end{aligned}$$

重心系においては $p^\mu = (E, \mathbf{p})$, $p'^\mu = (|\mathbf{p}|, -\mathbf{p})$, $E = \sqrt{|\mathbf{p}|^2 + m_l^2}$ であり、

$$\sum_{s,s'} |\mathfrak{M}|^2 = 4(G_F f_\pi m_l)^2 |\mathbf{p}|(E + |\mathbf{p}|)$$

となります。よって崩壊幅は、

$$\frac{\Gamma}{T} = \frac{|\mathbf{p}|}{32\pi^2 m_\pi^2} \sum_{s,s'} |\mathfrak{M}|^2 \cdot 4\pi = \frac{(G_F f_\pi m_l)^2}{2\pi m_\pi^2} |\mathbf{p}|^2 (E + |\mathbf{p}|)$$

ですが、エネルギー保存から $m_\pi = E + |\mathbf{p}|$ で、これを $|\mathbf{p}|$ について解くと、 $|\mathbf{p}| = (m_\pi^2 - m_l^2)/(2m_\pi)$ を得るので、これらを代入して、

$$\frac{\Gamma}{T} = \frac{(G_F f_\pi m_l (m_\pi^2 - m_l^2))^2}{8\pi m_\pi^3}$$

となります。

$$\begin{aligned}m_e &\sim 0.51100 \text{ MeV}, & m_\mu &\sim 105.66 \text{ MeV}, & m_\pi &\sim 139.6 \text{ MeV}, \\ f_\pi &\sim 128 \text{ MeV}, & G_F &\sim 1.166 \times 10^{-11} \text{ MeV}^{-2}\end{aligned}$$

という近似値を用いると、崩壊先が μ 粒子の場合 $\Gamma/T \sim 2.52 \times 10^{-14}$ MeV, 崩壊先が電子の場合 $\Gamma/T \sim 3.23 \times 10^{-18}$ MeV となり、 μ 粒子への崩壊が圧倒的優勢であることがわかります。すなわち主崩壊は $\pi^- \rightarrow \mu \bar{\nu}_\mu$ であり、 π^- の寿命は $\tau_{\pi^-} \sim 2.61 \times 10^{-8}$ sec と計算されます。

寿命が実験値と合うのは崩壊定数 f_π をそのように決めたので当然ですが、電子および μ 粒子への崩壊の分岐比が実験値とよく合うのは、荷電 π 粒子崩壊が弱い相互作用によることの証拠と考えられます。

20.9 レプトン対のヘリシティ

上の計算では崩壊後のレプトン対のヘリシティ s, s' について和を取っていますが、実のところ重心系においては $s = s' = +1$ 以外の寄与は全て0になります。

実際、重心系においては、

$$\mathfrak{M}_{ss'} = -\frac{G_F f_\pi m_l}{\sqrt{2}} \bar{u}_s^{(l)}(\mathbf{p})(1-\gamma_5)v_{s'}^{(\nu)}(-\mathbf{p})$$

ですが、

$$v_s(\mathbf{p}) = i\gamma^2 u_s^*(\mathbf{p}), \quad u_s(\mathbf{p}) = \begin{pmatrix} R(\theta, \phi) & 0 \\ 0 & R(\theta, \phi) \end{pmatrix} f_s(|\mathbf{p}|)$$

および、

$$R(\pi - \theta, \phi \pm \pi) = \pm i R(\theta, \phi) \sigma^1, \quad R^\dagger(\theta, \phi) \epsilon R^*(\theta, \phi) = \epsilon \det R^*(\theta, \phi) = \epsilon$$

に注意すると、

$$\mathfrak{M}_{ss'} = \pm i \sqrt{2} G_F f_\pi m_l f_s^{(l)\dagger}(|\mathbf{p}|) \begin{pmatrix} \sigma^3 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} f_{s'}^{(\nu)*}(|\mathbf{p}|)$$

を得ます。よって、

$$f_+(k) = \begin{pmatrix} \sqrt{k^0 + k} \\ 0 \\ \sqrt{k^0 - k} \\ 0 \end{pmatrix}, \quad f_-(k) = i \begin{pmatrix} 0 \\ \sqrt{k^0 - k} \\ 0 \\ \sqrt{k^0 + k} \end{pmatrix}$$

に注意すると、 $s = s' = +1$ 以外の成分は全て 0 で、

$$\mathfrak{M}_{++} = \pm i 2 G_F f_\pi m_l \sqrt{|\mathbf{p}|} \sqrt{E + |\mathbf{p}|}, \quad E = \sqrt{|\mathbf{p}|^2 + m_l^2}$$

です。これは角運動量保存と反ニュートリノのヘリシティが必ずプラス(右巻きスピ)であることから当然成り立つべき事柄で、 $\pi^- \rightarrow l \bar{\nu}$ で生じるレプトン対は必ずプラスのヘリシティを持ちます。

この現象を鏡に映すと、鏡の中の世界ではレプトン対のヘリシティは必ずマイナスになり、それは“こちらの世界”ではあり得ない現象で、パリティの破れのわかりやすい検証例になっています(図 20.8)。ニュートリノのヘリシティを直接的に測定することは不可能ですが、電子族のレプトンは電荷を持っているので、そのヘリシティを容易に測定できます。

ちなみに、もし鏡に映すことで粒子と反粒子が逆になると考えれば、鏡の中の崩壊は $\pi^+ \rightarrow l \bar{\nu}$ であり、このときレプトン対のヘリシティはマイナスでよく、それは崩壊幅まで含めてこちらの世界と違いがありません。これは 4 フェルミ型の弱い相互作用のモデルが CP 対称性を持っていることの帰結です。

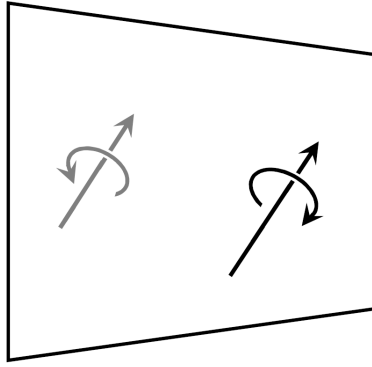


図 20.8: 鏡の中の世界のヘリシティ

20.10 μ 粒子の寿命

次は μ 粒子の崩壊です。崩壊モードはエネルギー保存から弱い相互作用による

$$\mu \rightarrow e \bar{\nu}_e \nu_\mu$$

だけで、ファインマングラフは最低次で図 20.9 であり、散乱振幅は、

$$\mathfrak{M} = -\frac{iG_F}{\sqrt{2}} \bar{u}_1 \gamma^\mu (1-\gamma_5) v_2 \bar{u}_3 \gamma_\mu (1-\gamma_5) u_s(\mathbf{k})$$

です。 μ 粒子の質量を m とし、電子とニュートリノの質量を無視すると、

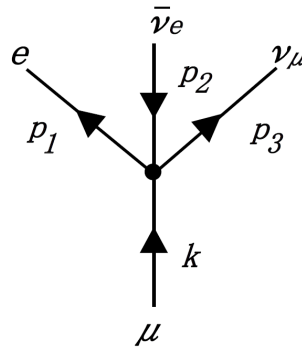


図 20.9: μ 粒子の崩壊

$$\begin{aligned} \sum_{s, s_1 \sim s_3} |\mathfrak{M}|^2 &= \frac{G_F^2}{2} \text{tr}(\not{p}_1 \gamma^\mu (1-\gamma_5) \not{p}_2 \gamma^\nu (1-\gamma_5)) \text{tr}(\not{p}_3 \gamma_\mu (1-\gamma_5) (\not{k} + m) \gamma_\nu (1-\gamma_5)) \\ &= \frac{G_F^2}{2} \times 8(p_1^\mu p_2^\nu + p_1^\nu p_2^\mu - g^{\mu\nu} p_1 \cdot p_2 - i\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} p_{1\rho} p_{2\sigma}) \\ &\quad \times 8(p_{3\mu} k_\nu + p_{3\nu} k_\mu - g_{\mu\nu} p_3 \cdot k - i\epsilon_{\mu\nu\lambda\tau} p_3^\lambda k^\tau) = 128G_F^2 p_1 \cdot p_3 p_2 \cdot k. \end{aligned}$$

$\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma}\epsilon_{\mu\nu\lambda\tau} = -2(\delta_\lambda^\rho\delta_\tau^\sigma - \delta_\tau^\rho\delta_\lambda^\sigma)$ に注意。重心系においては、

$$\sum_{s,s_1\sim s_3} |\mathfrak{M}|^2 = 128G_F^2 m |\mathbf{p}_1| |\mathbf{p}_2| |\mathbf{p}_3| (1 - \cos\theta).$$

ここで θ は \mathbf{p}_1 と \mathbf{p}_3 が成す角です。

終状態が3体ですから、ここからが少々難しいです。

$$d\Gamma = \frac{|\langle f|S|i\rangle|^2}{\langle i|i\rangle} \frac{d^3\mathbf{p}_1}{(2\pi)^3 2p_1^0} \frac{d^3\mathbf{p}_2}{(2\pi)^3 2p_2^0} \frac{d^3\mathbf{p}_3}{(2\pi)^3 2p_3^0},$$

$$\langle i|i\rangle = 2k^0 V, \quad |\langle f|S|i\rangle|^2 = (2\pi)^4 T V \delta^4(p_1 + p_2 + p_3 - k) |\mathfrak{M}|^2$$

に注意して、

$$\begin{aligned} \frac{d\Gamma}{T} &= \frac{\delta^4(p_1 + p_2 + p_3 - k)}{16(2\pi)^5 k^0 p_1^0 p_2^0 p_3^0} \frac{1}{2} \sum_{s,s_1\sim s_3} |\mathfrak{M}|^2 d^3\mathbf{p}_1 d^3\mathbf{p}_2 d^3\mathbf{p}_3 \\ &= \frac{4G_F^2}{(2\pi)^5} \delta^4(p_1 + p_2 + p_3 - k) (1 - \cos\theta) d^3\mathbf{p}_1 d^3\mathbf{p}_2 d^3\mathbf{p}_3 \\ &= \frac{4G_F^2}{(2\pi)^5} \delta(|\mathbf{p}_1| + |\mathbf{p}_3| + |\mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_3| - m) (1 - \cos\theta) d^3\mathbf{p}_1 d^3\mathbf{p}_3 \end{aligned}$$

ですが、 $d^3\mathbf{p}_1 d^3\mathbf{p}_3 = 8\pi^2 |\mathbf{p}_1|^2 |\mathbf{p}_3|^2 d|\mathbf{p}_1| d|\mathbf{p}_3| \sin\theta d\theta$ に注意し、さらに $|\mathbf{p}_1| = ms$, $|\mathbf{p}_3| = mt$, $\cos\theta = x$ とおくと、

$$\frac{\Gamma}{T} = \frac{G_F^2 m^5 I}{2\pi^5}, \quad I = 2 \int ds dt s^2 t^2 \int_{-1}^1 dx (1-x) \delta(\sqrt{s^2 + t^2 + 2stx} + s + t - 1)$$

を得ます。 $y = \sqrt{s^2 + t^2 + 2stx}$ で置換すれば、積分 I は、

$$I = \int ds dt \int_{|s-t|}^{|s+t|} dy y ((s+t)^2 - y^2) \delta(y + s + t - 1) = \int_{\Sigma} ds dt (1-s-t)(2s+2t-1)$$

となり、ここで Σ は、

$$|s-t| < 1-s-t < |s+t| \quad \therefore s < \frac{1}{2} \quad \text{かつ} \quad t < \frac{1}{2} \quad \text{かつ} \quad s+t > \frac{1}{2}$$

で与えられる三角形内部領域です。よって、

$$I = \int_0^{1/2} ds \int_{1/2-s}^{1/2} dt (1-s-t)(2s+2t-1) = \int_0^{1/2} ds \left(-\frac{2s^3}{3} + \frac{s^2}{2} \right) = \frac{1}{96}$$

と計算され、崩壊幅は、

$$\frac{\Gamma}{T} = \frac{G_F^2 m^5}{192\pi^3} \sim 3.01 \times 10^{-16} \text{ MeV}$$

となります。 μ 粒子の寿命は $T/\Gamma \sim 2.19 \times 10^{-6} \text{ sec}$ となりますが、これは実験値とよく合っています。

20.11 中性子の寿命

次に中性子の崩壊：

$$n \rightarrow pe\bar{\nu}_e$$

を考えます。ファインマングラフは最低次で図 20.10 であり、散乱振幅は、

$$\mathfrak{M} = \frac{-iG_F}{\sqrt{2}} \bar{u}_1 \gamma^\mu (1 - \gamma_5) v_2 \bar{u}_3 \gamma_\mu (a - b\gamma_5) u_s(\mathbf{k}).$$

ここで a, b は弱い相互作用におけるバリオンに関する構造定数です。

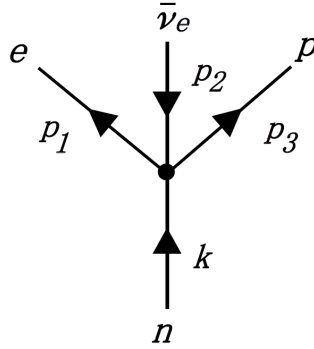


図 20.10: 中性子の崩壊

よって、

$$\begin{aligned} \sum_{s, s_1 \sim s_3} |\mathfrak{M}|^2 &= \frac{G_F^2}{2} \text{tr}((\not{p}_1 + m_e) \gamma^\mu (1 - \gamma_5) \not{p}_2 \gamma^\nu (1 - \gamma_5)) \\ &\quad \times \text{tr}((\not{p}_3 + m_p) \gamma_\mu (a - b\gamma_5) (\not{k} + m_n) \gamma_\nu (a - b\gamma_5)) \\ &= \frac{G_F^2}{2} \times 8(p_1^\mu p_2^\nu + p_1^\nu p_2^\mu - g^{\mu\nu} p_1 \cdot p_2 - i\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} p_{1\rho} p_{2\sigma}) \\ &\quad \times 4\left((a^2 + b^2)(p_{3\mu} k_\nu + p_{3\nu} k_\mu - g_{\mu\nu} p_3 \cdot k) + m_n m_p (a^2 - b^2) g_{\mu\nu} - 2iab\epsilon_{\mu\nu\lambda\tau} p_3^\lambda k^\tau\right) \\ &= 32G_F^2 \left((a+b)^2 p_1 \cdot p_3 p_2 \cdot k + (a-b)^2 p_1 \cdot k p_2 \cdot p_3 - m_n m_p (a^2 - b^2) p_1 \cdot p_2\right). \end{aligned}$$

m_e, m_p, m_n は、それぞれ、電子、陽子、中性子の質量です。

重心系においては、 p_1 と p_2 のなす角を θ とし、また、 $|p_3| \ll m_p$ という近似を用いれば、

$$\sum_{s, s_1 \sim s_3} |\mathfrak{M}|^2 = 32G_F^2 m_n m_p p_1^0 p_2^0 (a^2 + 3b^2 + C \cos \theta), \quad C = (a^2 - b^2) \frac{|\mathbf{p}_1| |\mathbf{p}_2|}{p_1^0 p_2^0}$$

となります。よって、

$$\begin{aligned}\frac{d\Gamma}{T} &= \frac{\delta^4(p_1+p_2+p_3-k)}{16(2\pi)^5 m_n m_p p_1^0 p_2^0} \frac{1}{2} \sum_{s, s_1 \sim s_3} |\mathfrak{M}|^2 d^3\mathbf{p}_1 d^3\mathbf{p}_2 d^3\mathbf{p}_3 \\ &= \frac{G_F^2}{(2\pi)^5} \delta^4(p_1+p_2+p_3-k) (a^2+3b^2+C \cos \theta) d^3\mathbf{p}_1 d^3\mathbf{p}_2 d^3\mathbf{p}_3 \\ &= \frac{G_F^2}{(2\pi)^5} \delta\left(\sqrt{m_e^2+|\mathbf{p}_1|^2}+|\mathbf{p}_2|+m_p-m_n\right) (a^2+3b^2+C \cos \theta) d^3\mathbf{p}_1 d^3\mathbf{p}_2\end{aligned}$$

であり、 $d^3\mathbf{p}_1 d^3\mathbf{p}_2 = 8\pi^2 |\mathbf{p}_1|^2 |\mathbf{p}_2|^2 d|\mathbf{p}_1| d|\mathbf{p}_2| \sin \theta d\theta$ に注意すれば、

$$\frac{d\Gamma}{T} = \frac{G_F^2}{2\pi^3} (a^2+3b^2) |\mathbf{p}_1|^2 \left(m_n - m_p - \sqrt{m_e^2+|\mathbf{p}_1|^2}\right)^2 d|\mathbf{p}_1|.$$

すなわち崩壊幅は、

$$\frac{\Gamma}{T} = \frac{G_F^2 m_e^5 (a^2+3b^2)}{2\pi^3} J\left(\frac{m_n - m_p}{m_e}\right), \quad J(k) = \int_0^{\sqrt{k^2-1}} ds s^2 \left(k - \sqrt{1+s^2}\right)^2$$

となります。

$$a \sim 0.98, \quad b \sim 1.25, \quad G_F \sim 1.166 \times 10^{-11} \text{ MeV}^{-2},$$

$$m_e \sim 0.5110 \text{ MeV}, \quad m_n \sim 939.565 \text{ MeV}, \quad m_p \sim 938.272 \text{ MeV}$$

および $J(2.531) \sim 1.636$ を用いると、中性子の寿命は、 $T/\Gamma \sim 1.42 \times 10^{24} \text{ MeV}^{-1} \sim 933 \text{ sec}$ と計算されます。実験値は $9 \times 10^2 \text{ sec}$ なので、おおよそ合っていることがわかります。

(余談) 中性子の寿命の計算は独自に行ったものですが、結果が実験値と合っているなので、間違っていないでしょう。

20.12 中性 粒子の寿命

次に中性 粒子 π^0 の崩壊 :

$$\pi^0 \rightarrow \gamma\gamma$$

を考えてみましょう。

最低次におけるグラフは図 20.11 の 2 つで、順に A, B とします。 A は、

$$\begin{aligned}A &= \varepsilon_{\lambda_1}^\mu(\mathbf{p}_1) \varepsilon_{\lambda_2}^\nu(\mathbf{p}_2) \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} (-1) \\ &\times \text{tr} \left((-g_N \gamma_5) \frac{i(k - \not{p}_2 + m)}{(k - p_2)^2 - m^2 + i\epsilon} (-ie\gamma_\nu) \frac{i(k + m)}{k^2 - m^2 + i\epsilon} (-ie\gamma_\mu) \frac{i(k + \not{p}_1 + m)}{(k + p_1)^2 - m^2 + i\epsilon} \right)\end{aligned}$$

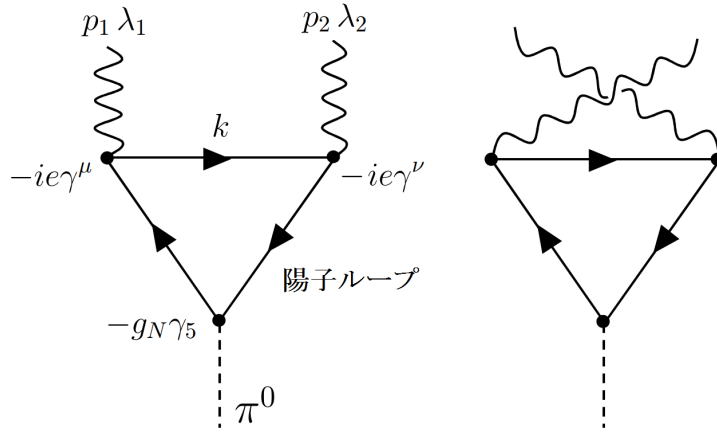


図 20.11: 中性 粒子の崩壊

$$\begin{aligned}
 &= ig_N e^2 \varepsilon_{\lambda_1}^{\mu}(\mathbf{p}_1) \varepsilon_{\lambda_2}^{\nu}(\mathbf{p}_2) \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \\
 &\quad \times \frac{\text{tr}(\gamma_5(\not{k} - \not{p}_2 + m)\gamma_{\nu}(\not{k} + m)\gamma_{\mu}(\not{k} + \not{p}_1 + m))}{(k^2 - m^2 + i\epsilon)((k + p_1)^2 - m^2 + i\epsilon)((k - p_2)^2 - m^2 + i\epsilon)}.
 \end{aligned}$$

m は陽子の質量です。分子のトレース部分は $4im \epsilon_{\mu\nu\rho\sigma} p_1^{\rho} p_2^{\sigma}$ と計算され、また、2光子の4元運動量 p_1^{μ} , p_2^{μ} は、陽子の質量 m に比べて十分小さいはずなので、分母においては p_1^{μ} , p_2^{μ} を 0 と近似して、

$$A = -4g_N e^2 m \epsilon_{\mu\nu\rho\sigma} \varepsilon_{\lambda_1}^{\mu}(\mathbf{p}_1) \varepsilon_{\lambda_2}^{\nu}(\mathbf{p}_2) p_1^{\rho} p_2^{\sigma} \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{1}{(k^2 - m^2 + i\epsilon)^3}$$

となります。この式の積分部分は、

$$\begin{aligned}
 I &:= \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{1}{(k^2 - m^2 + i\epsilon)^3} = \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{1}{((k^0)^2 - |\mathbf{k}|^2 - m^2 + i\epsilon)^3} \\
 &= \int \frac{d^3 \mathbf{k}}{(2\pi)^4} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dk^0}{(k^0 + \alpha)^3 (k^0 - \alpha)^3}, \quad \alpha = \sqrt{|\mathbf{k}|^2 + m^2} - \frac{i\epsilon}{2\sqrt{|\mathbf{k}|^2 + m^2}}
 \end{aligned}$$

と表せますが、 k^0 積分の部分は留数の評価により $-3\pi i/(8\alpha^5)$ を与えることが確かめられるでしょう。よって $\epsilon \rightarrow +0$ の極限をとって、

$$I = \int \frac{d^3 \mathbf{k}}{(2\pi)^4} \frac{-3\pi i}{8(|\mathbf{k}|^2 + m^2)^{5/2}} = \frac{-i}{32\pi^2 m^2}$$

となり、 A の式は、

$$A = \frac{ig_N e^2}{8\pi^2 m} \epsilon_{\mu\nu\rho\sigma} \varepsilon_{\lambda_1}^{\mu}(\mathbf{p}_1) \varepsilon_{\lambda_2}^{\nu}(\mathbf{p}_2) p_1^{\rho} p_2^{\sigma}$$

となります。

一見、発散しそうなループグラフでしたが、 γ_5 の存在によりこのように収束します。(ループグラフの積分についてはくりこみ理論の章で一般的な公式を与えます。)

一方、 B の式は A の式で p_1^μ, p_2^μ および λ_1, λ_2 を入れ替えたものであり、これは A と一致することがわかるでしょう。よって散乱振幅は、

$$\mathfrak{M} = A + B = 2A = \frac{ig_N e^2}{4\pi^2 m} \epsilon_{\mu\nu\rho\sigma} \varepsilon_{\lambda_1}^\mu(\mathbf{p}_1) \varepsilon_{\lambda_2}^\nu(\mathbf{p}_2) p_1^\rho p_2^\sigma$$

となります。

ここで重心系をとって、 $p_1 = -p_2 = p$ とします。このとき散乱振幅は p の方向には依存しないはずなので、 p をある座標軸の方向(例えば z 軸方向)に定めて評価することが可能です。そうすると、 $\mathfrak{M} = \mathfrak{M}_{\lambda_1 \lambda_2}$ として、

$$\mathfrak{M}_{11} = \mathfrak{M}_{22} = 0, \quad |\mathfrak{M}_{12}| = |\mathfrak{M}_{21}| = \frac{g_N e^2 |\mathbf{p}|^2}{2\pi^2 m}$$

がわかるでしょう。よって崩壊幅は、

$$\frac{\Gamma}{T} = 2\pi \frac{|\mathbf{p}|}{32\pi^2 M^2} \sum_{\lambda_1=1,2} \sum_{\lambda_2=1,2} |\mathfrak{M}_{\lambda_1 \lambda_2}|^2 = \frac{g_N^2 e^4 |\mathbf{p}|^5}{32\pi^5 M^2 m^2} = \frac{g_N^2 e^4 M^3}{2^{10} \pi^5 m^2}$$

となり、ここで M は π^0 の質量です。また、 $|\mathbf{p}| = M/2$ を用いました。

$$g_N \sim 10, \quad e \sim 0.303, \quad M \sim 135 \text{ MeV}, \quad m \sim 938 \text{ MeV}$$

という近似値を代入すると、 π^0 の寿命として $T/\Gamma \sim 9 \times 10^{-17} \text{ sec}$ が得られ、これは実験値とよく合っています。

(余談) ここではいにしえ素粒子論(前期素粒子論)を用いて $\pi^0 \rightarrow \gamma\gamma$ の幅を求めましたが、標準模型もしくはクォークモデルにおいてある種の低エネルギー近似をし $\pi^0 \rightarrow \gamma\gamma$ の幅を求めようとすると、素朴には0になってしまうことが知られています。しかしアノマリーの効果をきちんと取り入れると上と同様な結果になります。このため $\pi^0 \rightarrow \gamma\gamma$ はアノマリーに関する問題(パズル)として非常に有名です。

20.13 ファインマングラフの数値計算

これまでは散乱の微分断面積や断面積を求めるにあたり、ヘリシティに関する平均や和をとり、巧みに解析的な計算を行ってきましたが、特定のヘリシティに関する断面積を知りたい場合もあるでしょう。そうした場合、解析的計算は非常に複雑になるので、数値計算に頼るのが普通です。ファインマングラフの数値計算を行うには、ディラック粒子や光子の波動関数(平面波振幅)の成分を具体的に書き下す必要があります。

ディラック粒子の波動関数は、運動量 k の方向の天頂角を θ , 方位角を $\phi = 0$ として、

$$u_+(\mathbf{k}) = \begin{pmatrix} \cos(\theta/2)\sqrt{k^0 + |\mathbf{k}|} \\ \sin(\theta/2)\sqrt{k^0 + |\mathbf{k}|} \\ \cos(\theta/2)\sqrt{k^0 - |\mathbf{k}|} \\ \sin(\theta/2)\sqrt{k^0 - |\mathbf{k}|} \end{pmatrix}, \quad u_-(\mathbf{k}) = i \begin{pmatrix} -\sin(\theta/2)\sqrt{k^0 - |\mathbf{k}|} \\ \cos(\theta/2)\sqrt{k^0 - |\mathbf{k}|} \\ -\sin(\theta/2)\sqrt{k^0 + |\mathbf{k}|} \\ \cos(\theta/2)\sqrt{k^0 + |\mathbf{k}|} \end{pmatrix}.$$

ここで $k^0 = \sqrt{|\mathbf{k}|^2 + m^2}$ であり、 m はディラック粒子の質量です。反粒子については公式：

$$v_s(\mathbf{k}) = i\gamma^2 u_s(\mathbf{k})^*$$

があります (量子電磁気学の章参照)。

一方、光子については、運動量 k , ヘリシティ ± 1 の光子の消滅演算子を $a_\pm(\mathbf{k})$ として、

$$a_\pm(\mathbf{k}) = \frac{1}{\sqrt{2}} (a_1(\mathbf{k}) \mp ia_2(\mathbf{k})) \quad \therefore \begin{cases} a_1(\mathbf{k}) = \frac{1}{\sqrt{2}} (a_+(\mathbf{k}) + a_-(\mathbf{k})) \\ a_2(\mathbf{k}) = \frac{i}{\sqrt{2}} (a_+(\mathbf{k}) - a_-(\mathbf{k})) \end{cases}$$

でしたから、 $\sum_{\lambda=1,2} \varepsilon_\lambda^\mu(\mathbf{k}) a_\lambda(\mathbf{k}) = \sum_{\lambda=\pm} \varepsilon_\lambda^\mu(\mathbf{k}) a_\lambda(\mathbf{k})$ より、ヘリシティが対角化された光子の波動関数として、

$$\varepsilon_\pm^\mu(\mathbf{k}) = \frac{1}{\sqrt{2}} (\varepsilon_1^\mu(\mathbf{k}) \pm i\varepsilon_2^\mu(\mathbf{k}))$$

を得ます。 k の天頂角を θ , 方位角を 0 とすれば、

$$\varepsilon_1^\mu(\mathbf{k}) = (0, \cos\theta, 0, -\sin\theta)_\mu, \quad \varepsilon_2^\mu(\mathbf{k}) = (0, 0, 1, 0)_\mu$$

ですから、

$$\varepsilon_\pm^\mu(\mathbf{k}) = \frac{1}{\sqrt{2}} (0, \cos\theta, \pm i, -\sin\theta)_\mu.$$

ヘリシティを対角化した光子の波動関数は実でないことに注意。このため終状態の光子について付与すべきは、 $\varepsilon_\lambda^\mu(\mathbf{k})$ ではなく、その複素共役 $\varepsilon_\lambda^\mu(\mathbf{k})^* = \varepsilon_{-\lambda}^\mu(\mathbf{k})$ ということになります。

一例として、電子と陽電子の対消滅：

$$e\bar{e} \rightarrow \gamma\gamma$$

を考えてみましょう。グラフは最低次で図 20.12 でした。

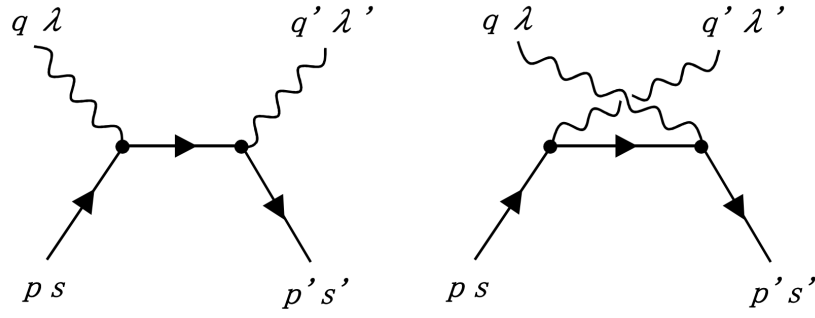


図 20.12: 電子陽電子対消滅

左のグラフの式を A とすると、

$$\begin{aligned}
 A &= \varepsilon_{\lambda}^{\mu}(\mathbf{q})^* \varepsilon_{\lambda'}^{\nu}(\mathbf{q}')^* \bar{v}_{s'}(\mathbf{p}') (ie\gamma_{\nu}) \frac{i}{\not{p} - \not{q} - m} (ie\gamma_{\mu}) u_s(\mathbf{p}) \\
 &= \frac{2\pi i \alpha}{p \cdot q} \bar{v}_{s'}(\mathbf{p}') \not{\varepsilon}_{-\lambda'}(\mathbf{q}') (\not{p} - \not{q} + m) \not{\varepsilon}_{-\lambda}(\mathbf{q}) u_s(\mathbf{p}).
 \end{aligned}$$

ここで m は電子の質量、 $\alpha = e^2/(4\pi)$ は微細構造定数です。重心系で考えれば、散乱角を θ 、散乱の方位角を 0 として、

$$p^{\mu} = (E, 0, 0, p)_{\mu}, \quad q^{\mu} = (E, E \sin \theta, 0, E \cos \theta)_{\mu},$$

$$E = \sqrt{p^2 + m^2}, \quad \mathbf{p}' = -\mathbf{p}, \quad \mathbf{q}' = -\mathbf{q}$$

とおけます。軸対称性から散乱振幅の大きさは方位角に依存しないことに注意。

一方、交差グラフを B とすると、これは A の式において $q^{\mu} \leftrightarrow q'^{\mu}$ 、 $\lambda \leftrightarrow \lambda'$ と置換したもののなので、数値計算においては簡単に処理できるでしょう。散乱振幅は、

$$\mathfrak{M} = A + B$$

で与えられ、微分断面積および断面積は、

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{1}{64\pi^2(2E)^2} \frac{E}{p} |\mathfrak{M}|^2 = \frac{|\mathfrak{M}|^2}{256\pi^2 E p}, \quad \sigma = 2\pi \int d\theta \sin \theta \frac{d\sigma}{d\Omega}$$

で与えられます。 θ の積分範囲ですが、 $\lambda = \lambda'$ のときは $0 \sim \pi/2$ 、そうでないときは $0 \sim \pi$ ということになります。

特に断面積 $\sigma = \sigma_{ss'}^{\lambda\lambda'}(p)$ については、

$$\sigma_{ss'}^{\lambda\lambda'}(p) = \sigma_{s's}^{\lambda'\lambda}(p).$$

また、QED の C 対称性および P 対称性から、

$$\sigma_{ss'}^{\lambda\lambda'}(p) = \sigma_{s's}^{\lambda\lambda'}(p), \quad \sigma_{ss'}^{\lambda\lambda'}(p) = \sigma_{-s-s'}^{-\lambda-\lambda'}(p)$$

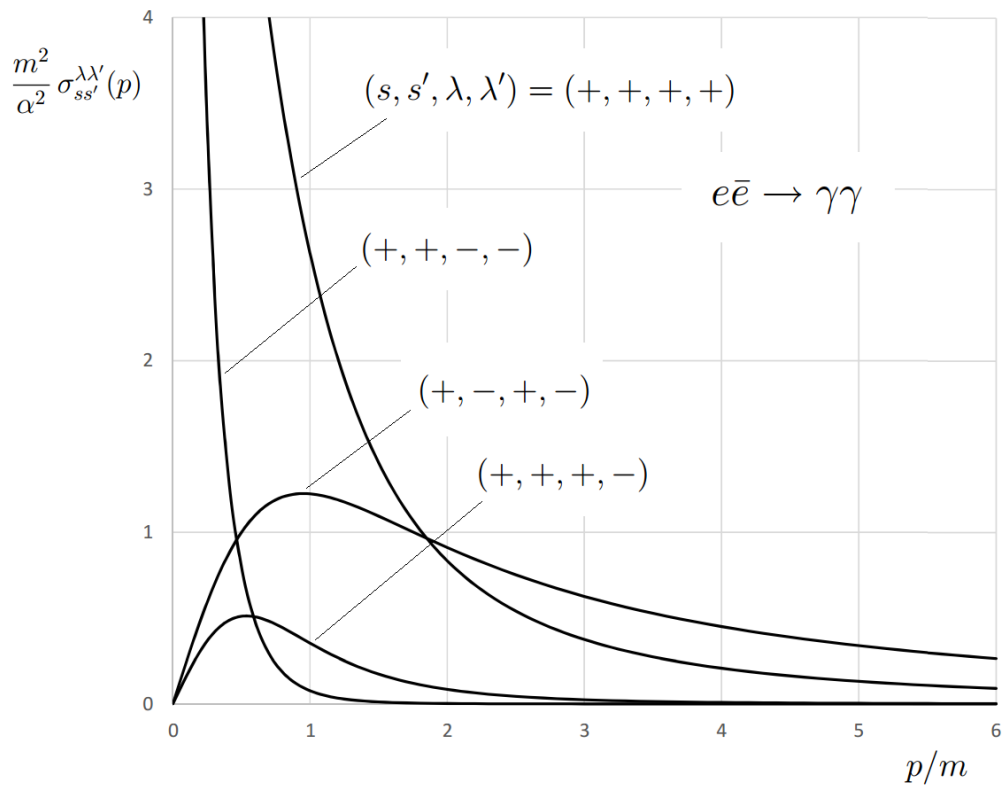


図 20.13: 電子陽電子対消滅の断面積

が成り立つので、 $\sigma_{++}^{++}(p)$, $\sigma_{++}^{--}(p)$, $\sigma_{+-}^{+-}(p)$, $\sigma_{+-}^{+-}(p)$, $\sigma_{+-}^{+-}(p)$ の5つを計算すれば十分です。数値計算による結果を図 20.13 に記します^(*)。 $\sigma_{+-}^{+-}(p)$ は恒等的に 0 になるようなので、グラフには記していません。

(*注) 数値計算には Excel VBA を用いました。ソースを「あもんノート/数値計算 for VBA」に置いておきます (URL: <http://amonphys.web.fc2.com/>)。

索引

か

荷電 粒子	16
クライン・仁科の公式	12, 13
クリフォード代数	3
コンプトン散乱	10

さ

実験室系	13
------------	----

た

中性子	21
中性 粒子	22
超相対論的	5
対消滅	14
対生成	4
トムソン散乱	13
トレース公式	4

は

バーバー散乱	8
微細構造定数	26

ま

μ 粒子	4, 19
メラー散乱	6

わ

ワード・高橋恒等式	10
-----------------	----