あもんノート

ユークリッド幾何学、ニュートン力学から、相対論、量子論、素粒子論、宇宙論、そして超ひも理論まで、理論物理学を簡潔にかつ幅広く網羅したノートです。TOP へは下の URL をクリックして行けます。専用の画像掲示板で、ご意見、ご質問等も受け付けております。

http://amonphys.web.fc2.com/

目 次

第1章　ユークリッド幾何学

ユークリッド幾何学の基礎について、表記法の紹介も兼ねてここにまとめておきます。ユークリッド幾何学はユークリッドの原論に始まる非常に古い歴史を持つ数学です。このため、何を公理とするか、また、どのような表現法を用いるかによって数種の立場があります。ここでは計量空間の一種として捉え、なおかつ座標に立脚した立場をとります。

1.1　クロネッカーデルタとレビ・チビタ

まず記号の紹介です。

N 次元の**クロネッカーデルタ**の記号を、

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & (i = j) \\ 0 & (i \neq j) \end{cases}$$

で定義します。ここで $i = 1, 2, \cdots, N$ で、j についても同様です。そうすると、任意の量 A_i について、

$$\sum_{j=1}^{N} \delta_{ij} A_j = A_i$$

が確かめられるでしょう。

一つの項に同じ文字の添字が現れたら、その添字について和を取ることにします。これをアインシュタインの**縮約規則**といいます。そうすると上式は、

$$\delta_{ij} A_j = A_i$$

と簡単になります。和の変数を表す文字は何でもいいので、その項で使っていない別の文字に置き換えることができます。例えば上式は $\delta_{ik} A_k = A_i$ と書いても同じことです。

一方、N 次元の**レビ・チビタ**の記号を、

$$\epsilon_{i_1 i_2 \cdots i_N} = \begin{cases} 1 & (\,(i_1, i_2, \cdots, i_N)\text{が}\,(1, 2, \cdots, N)\,\text{の偶置換のとき}) \\ -1 & (\text{奇置換のとき}) \\ 0 & (\text{その他、すなわち添字に同じ数字があるとき}) \end{cases}$$

で定義します。この定義から、$\epsilon_{i_1 i_2 \cdots i_N}$ はどの 2 つの添字を入れ換えても符号が逆になります。これは一般に**完全反対称性**と呼ばれる性質です。それゆえレビ・チビタの記号は、

$$\epsilon_{i_1 i_2 \cdots i_N} \text{ は } \epsilon_{12\cdots N} = 1 \text{ でかつ } N \text{ 個の添字について完全反対称}$$

として定義することもできます。

特に 3 次元のレビ・チビタにおいては、**サイクリック対称性**：

$$\epsilon_{ijk} = \epsilon_{kij} = \epsilon_{jki}$$

があります。添字が奇数個なら一番後ろの添字を一番前に送る操作が偶置換になるからです。

1.2 偏微分と全微分

次に初等的な数学の復習です。まずは偏微分についてです。

2 つの実数 x, y を引数とする 2 変数関数 $z = f(x, y)$ があるとき、

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x, y) - f(x, y)}{\Delta x,} \qquad \frac{\partial z}{\partial y} = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{f(x, y+\Delta y) - f(x, y)}{\Delta y}$$

のように**偏微分**を定義します。すなわち偏微分 $\partial z/\partial x$ は x 以外の変数を固定し変化させないとした場合の微分 (微分商) です。$\partial z/\partial y$ についても同様。よって特に、

$$\frac{\partial x}{\partial x} = 1, \quad \frac{\partial y}{\partial y} = 1, \quad \frac{\partial y}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial x}{\partial y} = 0.$$

2 つの引数が $x = x(t)$, $y = y(t)$ のように 1 つの実数 t の関数として与えられると考えると、

$$\begin{aligned}
&\frac{dz}{dt} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{f(x+\Delta x, y+\Delta y) - f(x, y)}{\Delta t} \\
&= \lim_{\Delta t \to 0} \left(\frac{f(x+\Delta x, y+\Delta y) - f(x, y+\Delta y)}{\Delta x} \frac{\Delta x}{\Delta t} + \frac{f(x, y+\Delta y) - f(x, y)}{\Delta y} \frac{\Delta y}{\Delta t} \right) \\
&= \frac{\partial z}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial z}{\partial y} \frac{dy}{dt}
\end{aligned}$$

のように展開されますが、これを形式的に、

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x} dx + \frac{\partial z}{\partial y} dy$$

と書き、z の**全微分**もしくは**微分形式**といいます。これは z の無限小変化量という意味あいを持ちます。

例えば $z = x^2 y$ のとき、

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 2xy, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = x^2 \quad \therefore\ dz = 2xy\,dx + x^2 dy$$

ということになります。

一般化すると、多変数関数 $z = f(x_1, x_2, \cdots, x_N)$ に関して、

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x_i}\,dx_i.$$

縮約規則を用いています。また、

$$\frac{\partial x_i}{\partial x_j} = \delta_{ij}$$

がわかるでしょう。一方、x_i がそれぞれ別の変数 x'_i の関数になっているときは、

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x_i}\,dx_i = \frac{\partial z}{\partial x_i}\frac{\partial x_i}{\partial x'_j}\,dx'_j \quad \text{および} \quad dz = \frac{\partial z}{\partial x'_j}\,dx'_j$$

なので、これらを比較して、

$$\frac{\partial z}{\partial x'_j} = \frac{\partial x_i}{\partial x'_j}\frac{\partial z}{\partial x_i}$$

という変換公式を得ます。

(余談) $w = f(x, y, z)$ のとき、x による偏微分を、固定する変数を明示して、

$$\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)_{y,z}$$

のように表すことがあります。これは特に、$w = g(x, u, v)$ のように、w が x を含む別の変数の組の関数で与えられる可能性がある場合に用いられます。

1.3 行列

次は行列についてです。

行列は数を縦横に並べたものです。例えば 3 行 4 列の行列は、

$$A = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} & A_{14} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} & A_{24} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} & A_{34} \end{pmatrix}$$

のように表されます。数 A_{ij} は行列 A の i 行 j 列の**成分**、あるいは**要素**と呼ばれます。これは $(A)_{ij}$ とも書かれます。行列の等式 $A = B$ は、成分がそれぞれ等しいことで、$A_{ij} = B_{ij}$ $(\forall i, j)$ を意味します。

N 行 M 列の行列 $A, B,$ および数 k に対し、

$$(A+B)_{ij} = A_{ij} + B_{ij}, \quad (A-B)_{ij} = A_{ij} - B_{ij}, \quad (kA)_{ij} = kA_{ij}$$

で、行列の和、差、数倍が定義されます。また、行列 A の列数と行列 B の行数が同じ場合、

$$(AB)_{ij} = A_{ik}B_{kj}$$

で行列の積が定義されます。

行列 A の行と列を入れ替えた行列を A の**転置行列**といい、A^T と書きます：

$$(A^T)_{ij} = A_{ji}.$$

このとき、

$$(AB)^T = B^T A^T$$

が次のようにして確かめられます。

$$((AB)^T)_{ij} = (AB)_{ji} = A_{jk}B_{ki} = (A^T)_{kj}(B^T)_{ik} = (B^T A^T)_{ij}.$$

N 行 N 列の行列を N 次**正方行列**といいます。特に、

$$(\delta)_{ij} = \delta_{ij}$$

となる δ は**単位行列**と呼ばれます。このとき任意の N 次正方行列 A に対して、

$$A\delta = \delta A = A$$

が確かめられるでしょう。

行列の和演算は明らかに可換です：

$$A + B = B + A.$$

しかし積演算は可換とは限りません。

[例題] $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{pmatrix}$ のとき、AB および BA を求めよ。

[解] $AB = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1\cdot 5 + 2\cdot 7 & 1\cdot 6 + 2\cdot 8 \\ 3\cdot 5 + 4\cdot 7 & 3\cdot 6 + 4\cdot 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 19 & 22 \\ 43 & 50 \end{pmatrix}$. 同じように計算して、$BA = \begin{pmatrix} 23 & 34 \\ 31 & 46 \end{pmatrix}$. [解終]

1.4　行列式と余因子

次は行列式と余因子についてです。ここは数式に添字が多くややこしいので、じっくり読む必要があります。

N 次正方行列 A の**行列式**の定義は、

$$\det A = \frac{1}{N!}\,\epsilon_{i_1 i_2 \cdots i_N}\,\epsilon_{j_1 j_2 \cdots j_N}\,A_{i_1 j_1} A_{i_2 j_2} \cdots A_{i_N j_N}.$$

簡単に、

$$\det(kA) = k^N \det A, \quad \det A^T = \det A$$

という性質がわかるでしょう。ここで k は数です。

いま、$f_{i_1 i_2 \cdots i_N} = \epsilon_{j_1 j_2 \cdots j_N}\,A_{i_1 j_1} A_{i_2 j_2} \cdots A_{i_N j_N}$ とおくと、これは $i_1, i_2, \cdots, i_N$ について完全反対称であることがわかるので、$f_{i_1 i_2 \cdots i_N} = \epsilon_{i_1 i_2 \cdots i_N}\,f_{12 \cdots N}$ と表せます。すなわち、

$$\epsilon_{j_1 j_2 \cdots j_N}\,A_{i_1 j_1} A_{i_2 j_2} \cdots A_{i_N j_N} = \epsilon_{i_1 i_2 \cdots i_N}\,\epsilon_{j_1 j_2 \cdots j_N}\,A_{1 j_1} A_{2 j_2} \cdots A_{N j_N}.$$

これと $\epsilon_{i_1 i_2 \cdots i_N}\,\epsilon_{i_1 i_2 \cdots i_N} = N!$ に注意すると、

$$\begin{aligned} \det A &= \epsilon_{j_1 j_2 \cdots j_N}\,A_{1 j_1} A_{2 j_2} \cdots A_{N j_N}, \\ \epsilon_{j_1 j_2 \cdots j_N}\,A_{i_1 j_1} A_{i_2 j_2} \cdots A_{i_N j_N} &= \epsilon_{i_1 i_2 \cdots i_N} \det A. \end{aligned}$$

さらに、$\det A^T = \det A$ に注意して、

$$\begin{aligned} \det A &= \epsilon_{i_1 i_2 \cdots i_N}\,A_{i_1 1} A_{i_2 2} \cdots A_{i_N N}, \\ \epsilon_{i_1 i_2 \cdots i_N}\,A_{i_1 j_1} A_{i_2 j_2} \cdots A_{i_N j_N} &= \epsilon_{j_1 j_2 \cdots j_N} \det A \end{aligned}$$

といった性質が得られます。そうすると、特に 2 次正方行列 A に対して、

$$\det A = \epsilon_{j_1 j_2} A_{1 j_1} A_{2 j_2} = A_{11} A_{22} - A_{12} A_{21} \quad \therefore\ \det \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = ad - bc.$$

また、一般に 2 つの N 次正方行列 A, B に対して、

$$\begin{aligned} \det(AB) &= \epsilon_{j_1 j_2 \cdots j_N}\,(AB)_{1 j_1} (AB)_{2 j_2} \cdots (AB)_{N j_N} \\ &= \epsilon_{j_1 j_2 \cdots j_N}\,(A_{1 i_1} B_{i_1 j_1})(A_{2 i_2} B_{i_2 j_2}) \cdots (A_{N i_N} B_{i_N j_N}) \\ &= A_{1 i_1} A_{2 i_2} \cdots A_{N i_N}\,\epsilon_{i_1 i_2 \cdots i_N} \det B \\ &= \det A\, \det B. \end{aligned}$$

すなわち、行列の積の行列式は、それぞれの行列の行列式の積と等しくなることがわかります。

一方、

$$\tilde{A}_{ij} = \frac{\partial \det A}{\partial A_{ij}}$$

で行列 A の**余因子**を定義します。行列式の定義、ライプニッツ則(積の微分法則)、$\partial A_{i_k j_k}/\partial A_{ij} = \delta_{ii_k}\delta_{jj_k}$ に注意すると、

$$\tilde{A}_{ij} = \frac{1}{(N-1)!}\,\epsilon_{ii_2\cdots i_N}\epsilon_{jj_2\cdots j_N}A_{i_2j_2}\cdots A_{i_Nj_N}$$

を得るでしょう。$\epsilon_{ii_2\cdots i_N}$ の最初の添字 i を i 番目に移動すると $(-1)^{i-1}$ の符号因子が出ることに注意すると、上式は、

$$\tilde{A}_{ij} = (A\,の\,i\,行と\,j\,列を取り除いた行列の行列式) \times (-1)^{i+j}$$

と解釈することができます。また、

$$\begin{aligned}A_{kj}\tilde{A}_{ij} &= \frac{1}{(N-1)!}\,\epsilon_{ii_2\cdots i_N}\epsilon_{jj_2\cdots j_N}A_{kj}A_{i_2j_2}\cdots A_{i_Nj_N}\\ &= \frac{1}{(N-1)!}\,\epsilon_{ii_2\cdots i_N}\epsilon_{ki_2\cdots i_N}\det A\end{aligned}$$

ですが、$\epsilon_{ii_2\cdots i_N}\epsilon_{ki_2\cdots i_N} = (N-1)!\,\delta_{ik}$ に注意すると、

$$A_{kj}\tilde{A}_{ij} = \delta_{ki}\det A \quad \therefore\ A\tilde{A}^T = \det A\ \delta.$$

さらにこれと同様にして、

$$\tilde{A}_{ij}A_{ik} = \delta_{jk}\det A \quad \therefore\ \tilde{A}^T A = \det A\ \delta$$

が確かめられるので、A の逆元、すなわち $AA^{-1} = A^{-1}A = \delta$ を満たす行列 A^{-1} は、

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A}\,\tilde{A}^T$$

と一意的に定まり、これを A の**逆行列**といいます。$\tilde{A}^T$ は A の**余因子行列**と呼ばれます。$\det A = 0$ のときは A の逆行列は存在しません。$\det A \neq 0$ で逆行列が存在する正方行列は**正則行列**と呼ばれます。

ちなみに、$A_{kj}\tilde{A}_{ij} = \delta_{ki}\det A$ において、特に $k = i = 1$ とおくと、

$$\det A = A_{1j}\tilde{A}_{1j}$$

ですが、これは行列式の**余因子展開**と呼ばれ、高次の行列の行列式を求めるときに重宝するものです。

[例題] 行列 $A = \begin{pmatrix}1 & 3 & 4\\ 2 & 5 & 8\\ 6 & 7 & 9\end{pmatrix}$ の行列式、および逆行列を求めよ。

[解] $\tilde{A}_{ij} = (A$ の i 行と j 列を取り除いた行列の行列式$) \times (-1)^{i+j}$ に注意すると、$\tilde{A}_{11} = 5{\cdot}9 - 8{\cdot}7 = -11,\ \tilde{A}_{12} = -(2{\cdot}9 - 8{\cdot}6) = 30,\ \tilde{A}_{13} = 2{\cdot}7 - 5{\cdot}6 = -16$. よって行列式は、

$$\det A = A_{1j}\tilde{A}_{1j} = 1{\cdot}(-11) + 3{\cdot}30 + 4{\cdot}(-16) = 15.$$

また残りの余因子は、それぞれ、$\tilde{A}_{21} = 1$, $\tilde{A}_{22} = -15$, $\tilde{A}_{23} = 11$, $\tilde{A}_{31} = 4$, $\tilde{A}_{32} = 0$, $\tilde{A}_{33} = -1$ と計算されるので、逆行列は、

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A}\,\tilde{A}^T = \frac{1}{15}\begin{pmatrix} -11 & 1 & 4 \\ 30 & -15 & 0 \\ -16 & 11 & -1 \end{pmatrix}. \quad [解終]$$

(余談) 行列式を扱った教科書は応用系の目的のものが多いため、このように簡潔に説明しているものは少ないと思われます。通常の線形代数の教科書で 30 ページ以上費やしていることを、レビ・チビタの記号 (符号関数) を用いてスマートに済ませています。それゆえこの 2 ページほどの理解に、例えば 3 日費やしても良いくらいです。

1.5 ユークリッド空間とデカルト座標

準備が整ったところで、ユークリッド幾何学の解説に入ります。

実数全体の集合を $\mathbf{R}$ と書きます。N 個の順序付けられた実数の組が作る集合を $\mathbf{R}^N$ と書きます：

$$\mathbf{R}^N = \{\,(x_1, x_2, \cdots, x_N) \,|\, x_i \in \mathbf{R}\,\}.$$

局所的に $\mathbf{R}^N$ と同相な (近傍の概念が同じである) 点の集合は、N 次元の**空間**、あるいは**多様体**と呼ばれます。空間のある点に対応する $\mathbf{R}^N$ の元の成分 x_i は、その点の**座標**と呼ばれます。

N 次元空間上の点 P の座標を $x_i(\mathrm{P})$ のように表しましょう。2 点 P, Q における座標の差：

$$\Delta x_i = x_i(\mathrm{Q}) - x_i(\mathrm{P})$$

は PQ 間の**変位**と呼ばれます。任意の 2 点間の**距離** s が、これら 2 点間の変位を Δx_i として、

$$s^2 = \Delta x_i \Delta x_i, \quad s \geq 0$$

で与えられるとき、この N 次元空間を N 次元**ユークリッド空間**といい、このときの座標を、**デカルト座標**、あるいは**カーテシアン座標**といいます。

一般に、距離の定義された空間は**計量空間**と呼ばれます。ユークリッド空間は計量空間の代表的な一例です。ユークリッド空間でない計量空間は**非ユークリッド空間**と呼ばれます。これはどのように座標を選んでも距離が上式のように与えられない空間を意味します。

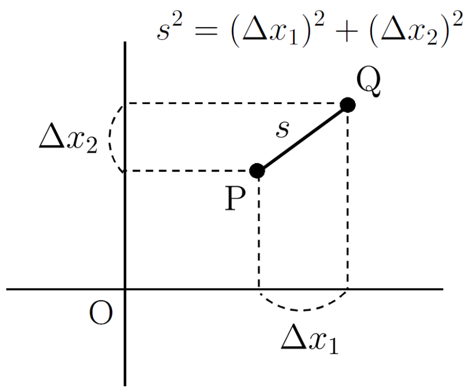

図 1.1: 2 次元ユークリッド空間

1.6 合同変換と相似変換

あるデカルト座標 x_i から、

$$x'_i = x_i - a_i \quad (\, a_i \text{ は任意の定数})$$

で新しい座標 x'_i を定義します。これを**並進変換**といいます。このとき、

$$x'_i(\mathrm{P}) = x_i(\mathrm{P}) - a_i, \quad x'_i(\mathrm{Q}) = x_i(\mathrm{Q}) - a_i$$

$$\therefore\ \Delta x'_i = x'_i(\mathrm{Q}) - x'_i(\mathrm{P}) = x_i(\mathrm{Q}) - x_i(\mathrm{P}) = \Delta x_i$$

なので、

$$\Delta x'_i \Delta x'_i = \Delta x_i \Delta x_i = s^2.$$

すなわち新しい座標 x'_i もデカルト座標であることがわかります。

一方、今度は、

$$x'_i = \Lambda_{ij} x_j, \quad \Lambda_{ij}\Lambda_{ik} = \delta_{jk}$$

という一次変換で新しい座標 x'_i を定義します。これを**直交変換**といいます。このとき上と同様にして、

$$\Delta x'_i = \Lambda_{ij} \Delta x_j$$

が得られるので、

$$\Delta x'_i \Delta x'_i = \Lambda_{ij}\Lambda_{ik} \Delta x_j \Delta x_k = \delta_{jk} \Delta x_j \Delta x_k = \Delta x_j \Delta x_j = s^2.$$

すなわち新しい座標はやはりデカルト座標です。ユークリッド空間において、デカルト座標は無数に存在することがわかります。

直交変換の条件 $\Lambda_{ij}\Lambda_{ik} = \delta_{jk}$ は、行列表記で、

$$\Lambda^T \Lambda = \delta$$

であり、これを満たす実正方行列 Λ は**直交行列**と呼ばれます。両辺において行列式をとると、

$$(\det \Lambda)^2 = 1 \quad \therefore \det \Lambda = \pm 1$$

ですが、$\det \Lambda = +1$ の場合の直交変換を**回転変換**といい、$\det \Lambda = -1$ の場合の直交変換を、**反転** (**パリティ**) を含む直交変換といいます。

並進変換と直交変換を合わせて**合同変換**といいます。合同変換で一致する2つの図形 (点の集合) は互いに**合同**であると呼ばれます。

また、合同変換に、**スケール変換**:

$$x'_i = kx_i \qquad (k \text{ は } 0 \text{ でない実数})$$

を付加し拡張したものを**相似変換**といいます。相似変換で一致する2つの図形は互いに**相似**であると呼ばれます。

特に3次元の場合、図1.2のように右手の親指、人差し指、中指を互いに直交させたとき、これらの指の方向が順に x_1, x_2, x_3 軸の正の方向となるように合わせられるデカルト座標を**右手系**といいます。左手でこれが成り立つ系を**左手系**といいます。反転を含む直交変換は右手系と左手系を入れ換えます。

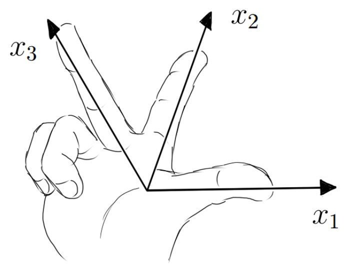

図 1.2: 右手系

(余談) 中学校で習う初等幾何では、まず三角形に関する合同条件や相似条件を与え、そのときの性質を公理と考え図形や空間に関する定理を導いていきます。これは簡単でよいのですが、ユークリッド幾何学が何を仮定した数学 (数理世界) であるかがわかりにくくなってしまいます。このためユークリッド幾何学が唯一無二の幾何学であると勘違いしてしまいがちです。非常によくできた数理世界を現実世界と混同してしまう思考的な病を**ピグマリオン症**といいます (J.L. シンジ命名)。ユークリッド幾何学やニュートン力学は現実の世界においてかなり高い精度で成り立っているため、ピグマリオン症の温床になっています。ユークリッド幾何学もニュートン力学も数理世界であって、現実世界ではない、ということを肝に銘じることが大事です。現実世界は原理的にいって我々には永遠に悟ることができないものであり、理論物理の全ては、現実世界に極力類似した数理世界 (モデル) の創作およびその探求であるという当たり前の事実を、特に留意すべきなのです。ちなみに "ピグマリオン" はギリシャ神話に基づく戯曲で、超越したリアリズムで女性像を彫刻しそれに恋した結果、ついにはその像が生きた人間になるというお話です。どんなにリアルであっても、モデルはモデルにすぎないはずなのに…、というわけです。

1.7 スカラーとベクトル

合同変換：

$$x'_i = \Lambda_{ij} x_j - a_i$$

に対し不変な量を**スカラー**といいます。例えば、2 点間の距離 $s = \sqrt{\Delta x_i \Delta x_i}$ はスカラーです。また、合同変換に対し、

$$A'_i = \Lambda_{ij} A_j$$

のように変換される量 A_i を**ベクトル**といいます。例えば、2 点間のデカルト座標の変位 Δx_i は $\Delta x'_i = \Lambda_{ij} \Delta x_j$ と変換されるのでベクトルです。それゆえ変位は、**変位ベクトル**とも呼ばれます。

一方、デカルト座標 x_i 自体は、厳密にはベクトルではありませんが、直交変換に限っていえばベクトルとして振舞います。この意味でベクトルとして考えることがあり、これを**位置ベクトル**といいます。

ベクトル A_i を順序付けられた組、あるいは N 行 1 列の行列として表すときは、$\boldsymbol{A}$ と太字で書きます。成分を抜き出すときは $(\boldsymbol{A})_i$ と書きます：

$$\boldsymbol{A} = (A_1, A_2, \cdots, A_N), \quad (\boldsymbol{A})_i = A_i.$$

位置ベクトル x_i に関しては $\boldsymbol{r}$ という記号を用いることが慣習としてあります：

$$\boldsymbol{r} = (x_1, x_2, \cdots, x_N), \quad (\boldsymbol{r})_i = x_i.$$

(余談) 座標に立脚しない立場ではベクトルやテンソルをもっと抽象的なものとして考えます。例えば微分幾何学ではベクトルは曲線上の微分演算子として定義します。しかしここではそれは採用しません。ここではあくまで座標ありきであり、よってベクトルは成分表示が第一義的なものと考えます。最初に述べたように、色々な流儀があるので混乱しないようにしてください。座標ありきの方法は、物理においては便利であり、それゆえ物理の世界では今もって標準的です。

1.8 テンソルと擬テンソル

テンソルはスカラーやベクトルを一般化した概念です。M 個の添字を持つ量 $T_{i_1 i_2 \cdots i_M}$ があって、合同変換 $x'_i = \Lambda_{ij} x_j - a_i$ に対し、

$$T'_{i_1 i_2 \cdots i_M} = \Lambda_{i_1 j_1} \Lambda_{i_2 j_2} \cdots \Lambda_{i_M j_M} T_{j_1 j_2 \cdots j_M}$$

のように変換されるとき、$T_{i_1 i_2 \cdots i_M}$ を M 階の**テンソル**といいます。ベクトルは 1 階のテンソル、スカラーは 0 階のテンソルということになります。

Λ_{ij} は直交行列だったので、

$$\delta_{ij} = \Lambda_{il} \Lambda_{jm} \delta_{lm}$$

がわかりますが、これはクロネッカーデルタ δ_{ij} が2階のテンソルであることを意味しています。特に定数のテンソルです。

テンソル同士の積は再びテンソルになります。これを**積の定理**といいます。例えば、任意の2つのベクトル A_i, B_i に対し $C_{ij} = A_i B_j$ を定義すると、

$$C'_{ij} = A'_i B'_j = \Lambda_{il}\Lambda_{jm} A_l B_m = \Lambda_{il}\Lambda_{jm} C_{lm}$$

なので、C_{ij} は2階のテンソルであり、また、$D = A_i B_i$ を定義すると、

$$D' = A'_i B'_i = \Lambda_{il}\Lambda_{im} A_l B_m = \delta_{lm} A_l B_m = A_l B_l = D$$

なので、D はスカラーになります。

一方、

$$T'_{i_1 i_2 \cdots i_M} = \det\Lambda\, \Lambda_{i_1 j_1}\Lambda_{i_2 j_2}\cdots\Lambda_{i_M j_M}\, T_{j_1 j_2 \cdots j_M}$$

のように変換される量 $T_{i_1 i_2 \cdots i_M}$ は、M 階の**擬テンソル**と呼ばれます。特に1階の擬テンソルは**軸性ベクトル**、0階の擬テンソルは**擬スカラー**と呼ばれます。

$(\det\Lambda)^2 = 1$ と行列式の定義に注意すると、

$$\epsilon_{i_1 i_2 \cdots i_N} = \det\Lambda\, \Lambda_{i_1 j_1}\Lambda_{i_2 j_2}\cdots\Lambda_{i_N j_N}\, \epsilon_{j_1 j_2 \cdots j_N}$$

が確かめられるので、N 次元レビ・チビタは N 階の擬テンソルということになります。特に定数の擬テンソルです。

疑テンソルとテンソルの積は擬テンソルになり、擬テンソルと擬テンソルの積はテンソルになることは容易にわかるでしょう。しかし合同変換に反転が含まれない、つまり $\det\Lambda = +1$ の場合は、テンソルと擬テンソルは同義になるため、特に区別する必要がない場合、擬テンソルもテンソルと呼び、一緒くたに扱います。位置ベクトルがベクトルかという問題と同様に、この辺は少し融通をきかせるわけです。

1.9 ベクトルの内積とノルム

2つのベクトル $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}$ に対し、

$$\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B} = A_i B_i$$

で**内積**を定義します。積の定理からこれはスカラーです。明らかに、

$$\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B} = \boldsymbol{B}\cdot\boldsymbol{A}.$$

すなわち内積は可換です。

また、
$$|\boldsymbol{A}| = \sqrt{\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{A}}$$
をベクトル $\boldsymbol{A}$ の大きさ (**ノルム**) といいます。これもスカラーで、特に $\boldsymbol{A}$ が変位ベクトルの場合、2 点間の距離を意味することになります。明らかに $|\boldsymbol{A}| \geq 0$ ですが、等号成立は $\boldsymbol{A}$ の成分が全て 0 のときに限られます。このようなベクトルを**零ベクトル**といい、太字で $\boldsymbol{0}$ と書きます。

$\boldsymbol{A}$ が零ベクトルでないとき、
$$\bar{\boldsymbol{A}} = \frac{\boldsymbol{A}}{|\boldsymbol{A}|}$$
は大きさ 1 のベクトルになりますが、これを $\boldsymbol{A}$ の**方向ベクトル**といいます。零ベクトルの方向ベクトルは定義されません。

大きさ 1 のベクトルは一般に**単位ベクトル**と呼ばれます。

1.10 角度と三角関数

2 次元以上のユークリッド空間に零ベクトルでない 2 つのベクトル $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}$ があるとき、それぞれの方向ベクトル $\bar{\boldsymbol{A}}, \bar{\boldsymbol{B}}$ が作る弧の長さ θ を、$\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}$ が成す**角度**といいます。曲線の長さはスカラーなので、角度はスカラーです。すなわち角度は合同変換に対して不変で、採用するデカルト座標に依存しません。

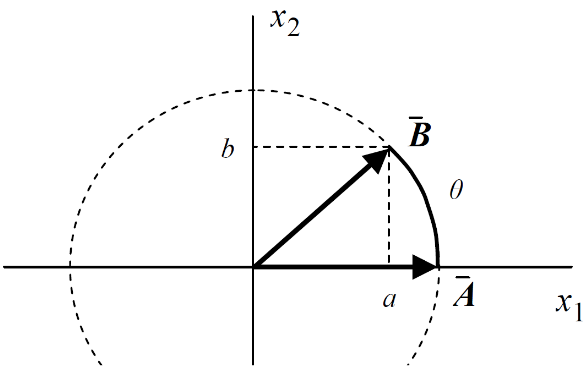

図 1.3: 角度

2 つのベクトル $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}$ に対し、
$$\bar{\boldsymbol{A}} = (1, 0, 0, \cdots, 0), \quad \bar{\boldsymbol{B}} = (a, b, 0, \cdots, 0), \quad a^2 + b^2 = 1$$
となるデカルト座標を選ぶことができますが (図 1.3)、このとき弧は、
$$C = \{\, (x_1, x_2, 0, \cdots, 0) \,|\, x_1 = \sqrt{1 - t^2},\ x_2 = t,\ 0 < t < b \}$$

という点の集合で与えられるので、$\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}$ が成す角度 θ は、特に $a \geq 0,\ b \geq 0$ の場合、

$$\theta = \int_C ds = \int_0^b dt \sqrt{\left(\frac{dx_1}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dx_2}{dt}\right)^2} = \int_0^b \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}$$

のように解析的に (定積分によって) 与えられます。

$a=1$ のとき、2 つのベクトルは**平行**であるといいます。$a=-1$ のとき、2 つのベクトルは**反平行**であるといいます。$a=0$ のとき、2 つのベクトルは**直交**しているといいます。また、このときの角度を**直角**といいます。

直角を $\pi/2$ とおくことで**円周率** π を定義します。すなわち、

$$\pi = 2\int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} \sim 3.1415927.$$

一方、

$$a = \cos\theta, \quad b = \sin\theta, \quad \tan\theta = \frac{\sin\theta}{\cos\theta}$$

で**三角関数**を定義します。

$$\cos^2\theta + \sin^2\theta = 1, \quad \cos 0 = 1, \quad \sin 0 = 0, \quad \cos\frac{\pi}{2} = 0, \quad \sin\frac{\pi}{2} = 1$$

が簡単にわかるでしょう。三角関数のグラフを図 1.4 に示します。

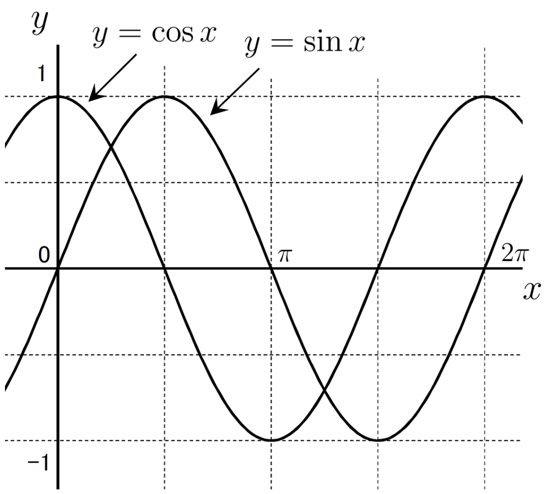

図 1.4: 三角関数

$\bar{\boldsymbol{A}}\cdot\bar{\boldsymbol{B}} = 1a + 0b = a = \cos\theta$ から、

$$\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B} = |\boldsymbol{A}||\boldsymbol{B}|\cos\theta.$$

よって、

$$|\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B}|^2 = (\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B})\cdot(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B}) = \boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}\cdot\boldsymbol{B}-2\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B}$$
$$= |\boldsymbol{A}|^2+|\boldsymbol{B}|^2-2|\boldsymbol{A}||\boldsymbol{B}|\cos\theta$$

です。これは2つのベクトルが変位ベクトルであるとすると、三角形の3辺の長さの関係になっていて、**余弦定理**と呼ばれます(図1.5)。

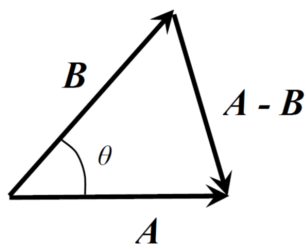

図 1.5: 余弦定理

特に $\boldsymbol{A},\ \boldsymbol{B}$ が直交する場合は、$\cos\theta = 0$ なので、余弦定理は、$|\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B}|^2 = |\boldsymbol{A}|^2+|\boldsymbol{B}|^2$ となり、これは**三平方の定理**、あるいは**ピタゴラスの定理**と呼ばれます。

また、行列、

$$\Lambda = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

は、$\Lambda^T\Lambda = \delta,\ \det\Lambda = 1$ を満たすことが確かめられるので、任意の実数 θ に対して2次の回転変換を表す直交行列です。

(余談) ノートに描いた直角三角形においてピタゴラスの定理がよく成り立っているのを知って、ピタゴラスの定理を“真理”だと思ってしまうことがピグマリオン症の典型的な例です。ほとんどの中高生はピグマリオン症にかかっているといえます。実際には、ユークリッド幾何学が比較的良い物理の理論(数学的モデル)になっているにすぎません。ピタゴラスの定理が成り立たない幾何学も同様に考えることができ、そのような一般的な幾何学(例えばリーマン幾何学)の方がさらに精密な物理の理論になっていると考えられています。

1.11 三角関数の性質

ここで三角関数の性質を簡単に導出し、まとめておきましょう。

2次元ユークリッド空間において、図1.6のような3つの単位ベクトルを考えると、

$$\boldsymbol{p} = (\cos\alpha,\ \sin\alpha), \quad \boldsymbol{q} = (-\sin\alpha,\ \cos\alpha),$$
$$\boldsymbol{r} = \cos\beta\,\boldsymbol{p}+\sin\beta\,\boldsymbol{q} = (\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta,\ \sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta)$$

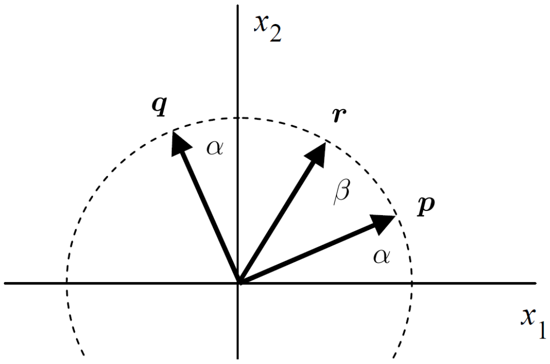

図 1.6: 加法定理

であり、一方で、$\boldsymbol{r} = (\cos(\alpha+\beta), \sin(\alpha+\beta))$ ですから、これらを比較して、

$$\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta,$$
$$\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta$$

を得ます。これを三角関数の**加法定理**といいます。

加法定理から、例えば、

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \sin\theta, \quad \sin\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \cos\theta$$

がわかります。また、

$$\cos(2\alpha) = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha, \quad \sin(2\alpha) = 2\sin\alpha\cos\alpha$$

もわかるでしょうが、これは**倍角公式**と呼ばれます。cos の倍角公式を逆に解くと、

$$\cos^2\alpha = \frac{1+\cos(2\alpha)}{2,} \quad \sin^2\alpha = \frac{1-\cos(2\alpha)}{2}$$

となりますが、これは**半角公式**と呼ばれます。これら公式を駆使すると次の表を得ることができるでしょう。

θ	0	$\frac{\pi}{12}$	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{5\pi}{12}$	$\frac{\pi}{2}$
$\frac{180}{\pi}\theta$	0	15	30	45	60	75	90
$\cos\theta$	1	$\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$	0
$\sin\theta$	0	$\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$	1
$\tan\theta$	0	$2-\sqrt{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	$2+\sqrt{3}$	∞

一方、角度と三角関数の定義から、

$$\theta = \int_0^{\sin\theta} \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}$$

ですが、両辺 θ で微分すると、左辺は 1 となり、右辺は、

$$\frac{d\sin\theta}{d\theta}\frac{d}{d\sin\theta}\int_0^{\sin\theta}\frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} = \frac{d\sin\theta}{d\theta}\frac{1}{\sqrt{1-\sin^2\theta}} = \frac{d\sin\theta}{d\theta}\frac{1}{\cos\theta}$$

と評価されるので、

$$\frac{d}{d\theta}\sin\theta = \cos\theta$$

という微分公式を得ることができます。また、cos, tan の微分公式は、

$$\frac{d}{d\theta}\cos\theta = \frac{d}{d\theta}\sin\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right) = -\cos\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right) = -\sin\theta,$$
$$\frac{d}{d\theta}\tan\theta = \frac{d}{d\theta}\frac{\sin\theta}{\cos\theta} = \frac{\cos\theta}{\cos\theta} - \frac{\sin\theta}{\cos^2\theta}(-\sin\theta) = \frac{1}{\cos^2\theta}$$

のように得られます。

(余談) 高校の数学では、極限公式 :

$$\lim_{\theta\to 0}\frac{\sin\theta}{\theta} = 1$$

の証明が曖昧で、このため三角関数の微分公式の証明がちゃんとなされていません。これは幾何学や三角関数の単元が教育的理由から微分積分 (解析学) より前にあって、それゆえ角度の定義を定積分として表示することをしないためと考えられます。純粋に論理的に考えれば、

集合論 → 自然数論 → 解析学 → 幾何学

の順に展開されるのが自然なのですが、基礎的な分野の方が難易度が高いこともあって、このようには教わらないわけです。ちなみにここでの立場では、**ロピタルの定理** :

$$f(a) = g(a) = 0 \Rightarrow \lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}$$

から、$\lim_{\theta\to 0}\sin\theta/\theta = \lim_{\theta\to 0}\cos\theta/1 = 1$ です。ロピタルの定理の証明は簡単でしょう。

1.12 テンソル積

2 つのベクトル $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$ に対して、

$$(\boldsymbol{A}\,\boldsymbol{B})_{ij} = A_i B_j$$

を**テンソル積**といいます。これは積の定理から2階のテンソルになります。また、2階のテンソル T_{ij} とベクトル A_i の内積は、

$$(T\cdot\boldsymbol{A})_i = T_{ij}A_j, \quad (\boldsymbol{A}\cdot T)_i = A_jT_{ji}$$

のように定義され、これはベクトルになります。よって例えば、

$$\boldsymbol{B}\cdot T\cdot\boldsymbol{A} = B_iT_{ij}A_j$$

です。これは行列記法における $\boldsymbol{B}^T T\boldsymbol{A}$ に対応します。

(余談) テンソル積は多くの教科書で $\otimes$ のような記号で表されます。すなわち、$(\boldsymbol{A}\otimes\boldsymbol{B})_{ij} = A_iB_j$. しかしながら、テンソル積と内積が結合則を持つことに注意すると、ここでの記法の方が便利です。例えば多くの教科書で $(\boldsymbol{A}\otimes\boldsymbol{B})(\boldsymbol{C}) = (\boldsymbol{B}\cdot\boldsymbol{C})\boldsymbol{A}$ のように書かれる公式は、ここでの記法では $(\boldsymbol{A}\,\boldsymbol{B})\cdot\boldsymbol{C} = \boldsymbol{A}(\boldsymbol{B}\cdot\boldsymbol{C}) = \boldsymbol{A}\,\boldsymbol{B}\cdot\boldsymbol{C}$ という結合則になり、ことさら覚えておく必要はないのです。

1.13 外積とスカラー3重積

3次元のユークリッド空間を考えると、2つのベクトル $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}$ に対し、

$$(\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B})_i = \epsilon_{ijk}A_jB_k = (A_2B_3 - A_3B_2,\ A_3B_1 - A_1B_3,\ A_1B_2 - A_2B_1)_i$$

は(軸性)ベクトルになります。これを2つのベクトルの**外積**といいます。外積は反可換な積になります：

$$\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B} = -\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{A}.$$

適当な回転変換により、$\boldsymbol{A} = (|\boldsymbol{A}|, 0, 0)$, $\boldsymbol{B} = (|\boldsymbol{B}|\cos\theta, |\boldsymbol{B}|\sin\theta, 0)$ とでき、θ は2つのベクトルの成す角度です。このとき $\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B} = (0, 0, |\boldsymbol{A}||\boldsymbol{B}|\sin\theta)$ がわかるので、一般に、

$$\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B}\text{ は }\boldsymbol{A}\text{ と }\boldsymbol{B}\text{ の両方に直交し大きさが }|\boldsymbol{A}||\boldsymbol{B}||\sin\theta|\text{ のベクトル}$$

ということになります。特にその方向は、$0 < \theta < \pi$ でかつ3次元デカルト座標が右手系の場合、$\boldsymbol{A}$ から $\boldsymbol{B}$ の方向に回したときに右ねじが進む方向になります。これを**右ねじの規則**と呼びます(図1.7)。

一方、3つのベクトル $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}, \boldsymbol{C}$ に対して、

$$[\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}, \boldsymbol{C}] = \epsilon_{ijk}A_iB_jC_k = \det\begin{pmatrix} A_1 & A_2 & A_3 \\ B_1 & B_2 & B_3 \\ C_1 & C_2 & C_3 \end{pmatrix}$$

は(擬)スカラーになります。これを**スカラー3重積**といいます。これはサイクリック対称性：

$$[\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}, \boldsymbol{C}] = [\boldsymbol{C}, \boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}] = [\boldsymbol{B}, \boldsymbol{C}, \boldsymbol{A}]$$

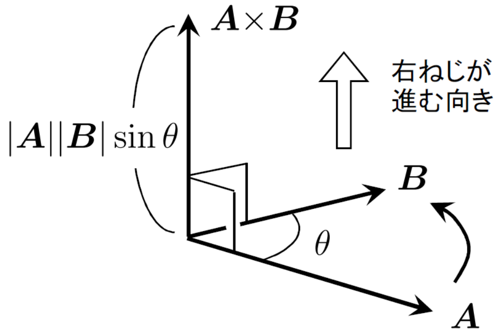

図 1.7: 右ねじの規則

を持つことがわかります。また、内積と外積を用いて、

$$[\boldsymbol{A},\boldsymbol{B},\boldsymbol{C}] = \boldsymbol{A}\cdot(\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{C})$$

と表すことができます。

外積の計算においては、しばしば、

$$\epsilon_{ijk}\epsilon_{ilm} = \delta_{jl}\delta_{km} - \delta_{jm}\delta_{kl}$$

という公式が有用になります。

[証明] $\epsilon_{ijk}\epsilon_{ilm}$ が 0 にならないのは、$j = l$ かつ $k = m$ または $j = m$ かつ $k = l$ のときなので、$\epsilon_{ijk}\epsilon_{ilm} = C\delta_{jl}\delta_{km} + D\delta_{jm}\delta_{kl}$ と表すことができますが、ここで $j = l = 1$, $k = m = 2$ とおけば $C = 1$. また、$j = m = 1$, $k = l = 2$ とおけば $D = -1$ を得るので、与題を得ます (*)。[証明終]

例えば上の公式を用いると、

$$\boldsymbol{A}\times(\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{C}) = \boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{C}\,\boldsymbol{B} - \boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B}\,\boldsymbol{C}$$

が次のようにして確かめられます。

$$\begin{aligned}\big(\boldsymbol{A}\times(\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{C})\big)_i &= \epsilon_{ijk}A_j(\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{C})_k = \epsilon_{ijk}A_j\,\epsilon_{klm}B_lC_m = \epsilon_{kij}\epsilon_{klm}A_jB_lC_m \\ &= (\delta_{il}\delta_{jm} - \delta_{im}\delta_{jl})A_jB_lC_m = A_jB_iC_j - A_jB_jC_i \\ &= \big(\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{C}\,\boldsymbol{B} - \boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B}\,\boldsymbol{C}\big)_i.\end{aligned}$$

このため前者の公式だけ覚えておけば、後者のような式をいちいち覚えておく必要はありません。

(*注) 同様に考えると、より一般に、

$$\epsilon_{i_1\cdots i_N jk}\,\epsilon_{i_1\cdots i_N lm} = N!\,(\delta_{jl}\delta_{km} - \delta_{jm}\delta_{kl})$$

という公式が得られるでしょう。

1.14 無限小角度ベクトル

3次元ユークリッド空間において、任意の図形をある軸において無限小角度 $d\theta$ だけ回転し、この回転で右ねじが進む方向の単位ベクトルを $\boldsymbol{n}$ とします。このとき、

$$d\boldsymbol{\theta} = d\theta\,\boldsymbol{n}$$

で**無限小角度ベクトル**を定義します。

無限小角度ベクトルが $d\boldsymbol{\theta} = d\theta\,\boldsymbol{n}$ で与えられる無限小回転によって、ベクトル $\boldsymbol{A}$ が $\boldsymbol{A}'$ に変化したとすると、その変分 $d\boldsymbol{A} = \boldsymbol{A}' - \boldsymbol{A}$ は、大きさが $|\boldsymbol{A}|\sin\phi\,d\theta$ で、方向が $\boldsymbol{n}\times\boldsymbol{A}$ と同じなので (図1.8)、

$$\begin{aligned} d\boldsymbol{A} &= |\boldsymbol{A}|\sin\phi\,d\theta\,\frac{\boldsymbol{n}\times\boldsymbol{A}}{|\boldsymbol{n}\times\boldsymbol{A}|} = |\boldsymbol{A}|\sin\phi\,d\theta\,\frac{\boldsymbol{n}\times\boldsymbol{A}}{|\boldsymbol{A}|\sin\phi} \\ &= d\boldsymbol{\theta}\times\boldsymbol{A} \end{aligned}$$

と表せます。

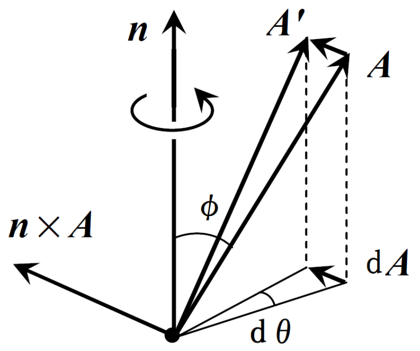

図 1.8: 無限小回転

このような無限小回転の表現は、特に物理において、角速度ベクトルと関連して重要になります。

1.15 座標の接ベクトルと基底

N 次元ユークリッド空間における適当な座標 (**一般座標**) を ξ_i としたとき、

$$\boldsymbol{t}_i = \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial \xi_i}$$

をこの座標の**接ベクトル**といいます。また、接ベクトルの方向ベクトル、

$$\boldsymbol{e}_i = \frac{\boldsymbol{t}_i}{|\boldsymbol{t}_i|}$$

をこの座標の**基底**といいます。

例えば、2 次元ユークリッド空間において、

$$\boldsymbol{r} = (r\cos\theta,\, r\sin\theta)$$

で**極座標** $\xi_1 = r,\ \xi_2 = \theta$ を定義したとき、その接ベクトルは、

$$\boldsymbol{t}_1 = \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial r} = (\cos\theta,\, \sin\theta), \quad \boldsymbol{t}_2 = \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial \theta} = (-r\sin\theta,\, r\cos\theta)$$

となり、$|\boldsymbol{t}_1| = 1,\ |\boldsymbol{t}_2| = r$ に注意して、基底は、

$$\boldsymbol{e}_1 = (\cos\theta,\, \sin\theta), \quad \boldsymbol{e}_2 = (-\sin\theta,\, \cos\theta)$$

となります。極座標とその基底においては、位置ベクトルは $\boldsymbol{r} = r\boldsymbol{e}_1$ と書けることになります。r は**動径座標**と呼ばれます。

極座標のように基底 $\boldsymbol{e}_i$ が空間の点に依存する座標は**曲線座標**と呼ばれます。依存しない座標は**直線座標**と呼ばれます。また、極座標においては $\boldsymbol{e}_1 \cdot \boldsymbol{e}_2 = 0$ がわかりますが、一般に $\boldsymbol{e}_i \cdot \boldsymbol{e}_j = \delta_{ij}$ となる座標は**直交座標**と呼ばれます。極座標は曲線座標でかつ直交座標だというわけです。デカルト座標は直線座標でかつ直交座標です。

いま、基準となるデカルト座標を x_i, 任意のデカルト座標を $x'_i = \Lambda_{ij}x_j - a_i$ とすると、逆変換が $x_j = \Lambda_{ij}(x'_i + a_i)$ となることに注意して、ダッシュ系の接ベクトルは、

$$(\boldsymbol{t}'_i)_j = \left(\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial x'_i}\right)_j = \frac{\partial x_j}{\partial x'_i} = \Lambda_{ij}.$$

このとき $\boldsymbol{t}'_i \cdot \boldsymbol{t}'_j = \delta_{ij}$ がわかり、特に $|\boldsymbol{t}'_i| = 1$ なので、ダッシュ系の基底は、

$$(\boldsymbol{e}'_i)_j = \Lambda_{ij}$$

で与えられます。よって、

$$(A'_i\boldsymbol{e}'_i)_j = A'_i\Lambda_{ij} = \Lambda_{ik}A_k\Lambda_{ij} = A_j = (\boldsymbol{A})_j.$$

これは、任意のデカルト座標とその基底において、ベクトル $\boldsymbol{A}$ を、

$$\boldsymbol{A} = A_i\boldsymbol{e}_i$$

と展開できることを意味しています。この基底を用いた表示により、ベクトルを特定のデカルト座標から離脱させ、大きさと方向を持つ量という抽象的な概念として捉えられることに注意してください。

同様に、2 階のテンソル T に対し、任意のデカルト座標とその基底において、

$$T = T_{ij}\boldsymbol{e}_i\,\boldsymbol{e}_j$$

であることがいえます。

1.16 体積と面積

3次元ユークリッド空間における**体積要素**は、デカルト座標を x_i として、

$$d^3\boldsymbol{r} = dx_1 \wedge dx_2 \wedge dx_3$$

で定義されます。$\wedge$ は**くさび積** (**ウェッジ積**) と呼ばれる積演算で、双線形性、および反可換性：

$$dx \wedge dy = -dy \wedge dx$$

を持つものとします。このため例えば、$dx \wedge dx = 0$ です。微分形式をくさび積により n 個かけわせたものは n **形式**と呼ばれます。体積要素 $d^3\boldsymbol{r}$ は3形式です。

一般座標を ξ_i とすると、

$$\begin{aligned} d^3\boldsymbol{r} &= \frac{\partial x_1}{\partial \xi_i}\frac{\partial x_2}{\partial \xi_j}\frac{\partial x_3}{\partial \xi_k}\, d\xi_i \wedge d\xi_j \wedge d\xi_k = \epsilon_{ijk}\frac{\partial x_1}{\partial \xi_i}\frac{\partial x_2}{\partial \xi_j}\frac{\partial x_3}{\partial \xi_k}\, d\xi_1 \wedge d\xi_2 \wedge d\xi_3 \\ &= \det\frac{\partial x}{\partial \xi}\, d\xi_1 \wedge d\xi_2 \wedge d\xi_3. \end{aligned}$$

ここで $\det(\partial x/\partial \xi)$ は $\partial x_i/\partial \xi_j$ を成分とする行列の行列式で、**ヤコビアン**と呼ばれます。ヤコビアンはスカラー3重積を用いて、

$$\det\frac{\partial x}{\partial \xi} = \epsilon_{ijk}\frac{\partial x_i}{\partial \xi_1}\frac{\partial x_j}{\partial \xi_2}\frac{\partial x_k}{\partial \xi_3} = \left[\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial \xi_1}, \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial \xi_2}, \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial \xi_3}\right]$$

と表すこともできます。

例えば、3つのベクトル $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}, \boldsymbol{C}$ で張られる平行六面体の内部は、

$$V = \{\, \boldsymbol{r} \,|\, \boldsymbol{r} = \xi_1\boldsymbol{A} + \xi_2\boldsymbol{B} + \xi_3\boldsymbol{C},\ 0 \le \xi_i \le 1 \,\}$$

と表されるので、その体積は、

$$\int_V d^3\boldsymbol{r} = \int_0^1 d\xi_1 \int_0^1 d\xi_2 \int_0^1 d\xi_3\ \left[\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial \xi_1}, \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial \xi_2}, \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial \xi_3}\right] = [\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}, \boldsymbol{C}]$$

ということになります。

一方、3次元ユークリッド空間における**面積要素** (2次元的体積要素) は、

$$(d^2\boldsymbol{r})_i = \frac{1}{2}\,\epsilon_{ijk}\, dx_j \wedge dx_k$$

という2形式で定義されます。面上の一般座標 ξ_i $(i = 1, 2)$ においては、

$$(d^2\boldsymbol{r})_i = \frac{1}{2}\,\epsilon_{ijk}\frac{\partial x_j}{\partial \xi_l}\frac{\partial x_k}{\partial \xi_m}\, d\xi_l \wedge d\xi_m = \left(\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial \xi_1} \times \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial \xi_2}\right)_i d\xi_1 \wedge d\xi_2$$

と書けます。

例えば、2つのベクトル $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}$ で張られる平行四辺形の内部は、

$$S = \{\, \boldsymbol{r} \,|\, \boldsymbol{r} = \xi_1 \boldsymbol{A} + \xi_2 \boldsymbol{B},\ 0 \le \xi_i \le 1 \}$$

と表されるので、その面積は、

$$\int_S d^2\boldsymbol{r} = \int_0^1 d\xi_1 \int_0^1 d\xi_2 \ \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial \xi_1} \times \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial \xi_2} = \boldsymbol{A} \times \boldsymbol{B}$$

というベクトルになります。通常、面積と呼ばれるのは、このベクトルの大きさで、それはスカラーになります。

一般に N 次元ユークリッド空間においては、デカルト座標を x_i として、N 次元体積要素は、

$$\begin{aligned} d^N\boldsymbol{r} &= \frac{1}{N!}\ \epsilon_{i_1 i_2 \cdots i_N}\, dx_{i_1} \wedge dx_{i_2} \wedge \cdots \wedge dx_{i_N} \\ &= dx_1 \wedge dx_2 \wedge \cdots \wedge dx_N \end{aligned}$$

で定義され、これは合同変換に対し擬スカラーとみなせます。一方、$(N-1)$ 次元体積要素は、

$$(d^{N-1}\boldsymbol{r})_i = \frac{1}{(N-1)!}\ \epsilon_{i i_2 \cdots i_N}\, dx_{i_2} \wedge \cdots \wedge dx_{i_N}$$

で与えられ、これは軸性ベクトルとみなせます。同様にして、$(N-2)$ 次元体積要素は2階の反対称擬テンソル、$(N-3)$ 次元体積要素は3階の完全反対称疑テンソルとみなせます。

完全反対称テンソルにレビ・チビタを乗じ作ったテンソルを元のテンソルの**双対**などと呼びますが、一般にユークリッド空間の体積要素はデカルト座標で作られる微分形式の双対として定義されるわけです。

[例題] 3次元ユークリッド空間にある四面体 (三角錐) OABC の体積を求めよ。ただし O, A, B, C の位置ベクトルを順に $\boldsymbol{0}, \boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}, \boldsymbol{C}$ とする。

[解] 四面体 OABC の内部は、

$$V = \Big\{\, \boldsymbol{r} \,\Big|\, \boldsymbol{r} = \xi_3\big(\,\xi_2(\xi_1\boldsymbol{A}) + (1-\xi_2)\boldsymbol{B}\,\big) + (1-\xi_3)\boldsymbol{C},\ 0 \le \xi_i \le 1 \Big\}$$

と表され、このとき、

$$\begin{aligned} \left[\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial \xi_1}, \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial \xi_2}, \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial \xi_3}\right] &= [\, \xi_2\xi_3\boldsymbol{A},\, \xi_1\xi_3\boldsymbol{A} - \xi_3\boldsymbol{B},\, \xi_1\xi_2\boldsymbol{A} + (1-\xi_2)\boldsymbol{B} - \boldsymbol{C}\,] \\ &= \xi_2\xi_3^2\ [\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}, \boldsymbol{C}]. \end{aligned}$$

よって、

$$
\begin{aligned}
\int_V d^3\boldsymbol{r} &= \int_0^1 d\xi_1 \int_0^1 d\xi_2 \int_0^1 d\xi_3 \left[\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial \xi_1}, \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial \xi_2}, \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial \xi_3}\right] \\
&= \int_0^1 d\xi_1 \int_0^1 d\xi_2 \int_0^1 d\xi_3\ \xi_2 \xi_3^2\ [\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}, \boldsymbol{C}] = \frac{1}{6}\ [\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}, \boldsymbol{C}]. \quad \text{[解終]}
\end{aligned}
$$

(余談) $dx \wedge dy$ を単に $dxdy$ と略記することが多いです。その場合でも dx と dy の積は本当はくさび積であり、反可換の積であるということを忘れてはいけません。すなわち $dxdy = -dydx$.

1.17 3次元極座標と球の計量

3次元ユークリッド空間において、

$$
\boldsymbol{r} = (r \sin\theta \cos\phi,\ r \sin\theta \sin\phi,\ r\cos\theta),
$$

$$
0 \le r < \infty,\ \ 0 \le \theta \le \pi,\ \ 0 \le \phi \le 2\pi
$$

で3次元**極座標** r, θ, ϕ を定義します (図 1.9)。

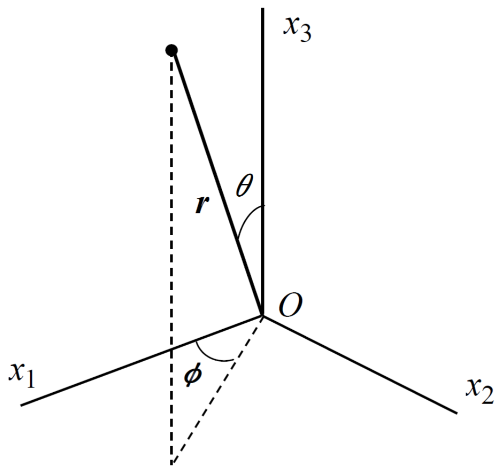

図 1.9: 3次元極座標

このとき、$|\boldsymbol{r}| = r$. また、

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial r} &= (\sin\theta\cos\phi,\ \sin\theta\sin\phi,\ \cos\theta) = \frac{\boldsymbol{r}}{r}, \\
\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial \theta} &= (r\cos\theta\cos\phi,\ r\cos\theta\sin\phi,\ -r\sin\theta), \\
\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial \phi} &= (-r\sin\theta\sin\phi,\ r\sin\theta\cos\phi,\ 0)
\end{aligned}
$$

ですから、

$$\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial \theta}\times\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial \phi} = (r^2\sin^2\theta\cos\phi,\, r^2\sin^2\theta\sin\phi,\, r^2\sin\theta\cos\theta) = r\sin\theta\,\boldsymbol{r},$$

$$\left[\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial r},\ \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial \theta},\ \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial \phi}\right] = \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial r}\cdot\left(\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial \theta}\times\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial \phi}\right) = \frac{\boldsymbol{r}}{r}\cdot(r\sin\theta\,\boldsymbol{r}) = r^2\sin\theta$$

がわかります。そうすると、例えば半径 R の球の体積は、

$$\begin{aligned}\int_{\text{球内部}} d^3\boldsymbol{r} &= \int_0^R dr\int_0^\pi d\theta\int_0^{2\pi} d\phi\ \left[\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial r},\ \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial \theta},\ \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial \phi}\right]\\ &= \int_0^R dr\int_0^\pi d\theta\int_0^{2\pi} d\phi\ r^2\sin\theta = \frac{4}{3}\pi R^3.\end{aligned}$$

一方、表面積は、

$$\begin{aligned}\int_{\text{球表面}} |d^2\boldsymbol{r}| &= \int_0^\pi d\theta\int_0^{2\pi} d\phi\ \left|\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial \theta}\times\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial \phi}\right|_{r=R}\\ &= \int_0^\pi d\theta\int_0^{2\pi} d\phi\ R^2\sin\theta = 4\pi R^2\end{aligned}$$

となることがわかります。

1.18 ナブラとラプラシアン

デカルト座標 x_i による偏微分演算子 $\partial_i = \partial/\partial x_i$ は、合同変換に対して、

$$\partial_i' = \frac{\partial}{\partial x_i'} = \frac{\partial x_j}{\partial x_i'}\frac{\partial}{\partial x_j} = \Lambda_{ij}\,\partial_j$$

と変換されるのでベクトルとみなされます。この偏微分演算子をベクトルの記法で $\boldsymbol{\nabla}$ と書いて、**ナブラ**と呼びます。すなわち、

$$(\boldsymbol{\nabla})_i = \partial_i.$$

スカラー場 $\phi(\boldsymbol{r})$ に関して、ベクトル場 $\boldsymbol{\nabla}\phi(\boldsymbol{r})$ をその**勾配**といいます。また、ベクトル場 $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r})$ に関して、スカラー場 $\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r})$ をその**発散**といいます。さらに、特に3次元ユークリッド空間においては、(軸性) ベクトル場 $\boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r})$ を $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r})$ の**回転**といいます。

一方、

$$\triangle = \boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{\nabla} = \partial_i\partial_i = \left(\frac{\partial}{\partial x_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial}{\partial x_2}\right)^2 + \ \cdots\ + \left(\frac{\partial}{\partial x_N}\right)^2$$

は**ラプラシアン**と呼ばれます。これは合同変換に対して不変な微分演算子になります。

(余談) ϕ を標高を表す場と考えたとき、$\boldsymbol{\nabla}\phi$ は地形の勾配を表すベクトル場になっています。また、$\boldsymbol{A}$ を流速のベクトル場と考えたとき、$\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{A}$ は各場所でどれだけ流体が湧き出しているか、その度合いを表すスカラー場になっています。$\boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{A}$ はベクトル場 $\boldsymbol{A}$ が各場所でどれだけ渦巻いているか、その度合いを表すベクトル場になっています。これらの事柄は次で紹介するガウスの定理やストークスの定理によってより具体的にわかるでしょう。文献によっては、

$$\mathrm{grad}\,\phi = \boldsymbol{\nabla}\phi, \quad \mathrm{div}\boldsymbol{A} = \boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{A}, \quad \mathrm{rot}\boldsymbol{A} = \mathrm{curl}\boldsymbol{A} = \boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{A}$$

という表記もよく用いられます。英語で、gradient は勾配、divergence は発散、rotation は回転を意味します。curl は、巻き毛にする、渦巻き状に丸めるという意味です。

1.19 外微分とストークスの定理

一般に N 次元空間 (計量空間でなくてもよい) において、任意の n 次元領域を V, その境界の $(n-1)$ 次元閉領域を ∂V, 任意の $(n-1)$ 形式を α としたとき、

$$\int_{\partial V} \alpha = \int_V d\alpha$$

という、極めてシンプルな定理が成り立ちます。これを**ストークスの定理**といいます。ここで d は**外微分** (演算子) で、これは微分を表す記号 d を拡張したものです。外微分は、線形性、及び次の性質を持つものとします :

$$d\phi = \frac{\partial\phi}{\partial\xi_i}\,d\xi_i, \qquad d^2 = 0, \qquad d(\alpha\wedge\beta) = d\alpha\wedge\beta + (-1)^s\,\alpha\wedge d\beta.$$

$$(\text{ここで}\,\phi\,\text{は}\,0\,\text{形式、}\alpha\,\text{は}\,s\,\text{形式、}s \geq 0\,)$$

ストークスの定理の証明は以下の通りです。少し難しいのでじっくり読む必要があります。

[証明] まず、任意の向き付けられた曲線を C とし、その始点を A, 終点を B とすると、空間上の任意の関数 (0 形式) ϕ に対し、

$$\int_C d\phi = \phi(\mathrm{B}) - \phi(\mathrm{A})$$

ですから、

$$\int_{\partial C} \phi \ = \phi(\mathrm{B}) - \phi(\mathrm{A})$$

と定義することで、$n=1$ の場合のストークスの定理が成立します。これは初等的にはあまり見かけない表記法なので注意してください。

次に $n \geq 2$ の場合ですが、n 次元の可縮領域 V とその境界 ∂V が、

$$V = \{\, (\xi_1, \cdots, \xi_N) \mid 0 \leq \xi_1 \leq 1,\ -\pi \leq \xi_p \leq \pi,\ \xi_q = 0 \,\},$$
$$\partial V = \{\, (\xi_1, \cdots, \xi_N) \mid \quad \xi_1 = 1, \quad\ \ -\pi \leq \xi_p \leq \pi,\ \xi_q = 0 \,\},$$

$$p = 2, \cdots, n, \quad q = n+1, \cdots, N$$

となるように一般座標 ξ_i を選びます。ただし、各々の ξ_1 の値に対し、いずれかの p について $\xi_p = \pi$ または $\xi_p = -\pi$ となる点は全て同一とします。このような座標を領域 V の**葉層座標**といいます (*)。このとき $(n-1)$ 形式、

$$\alpha = \xi_1^k f(\xi_2, \cdots \xi_N)\, d\xi_2 \wedge \cdots \wedge d\xi_n \qquad (k = 0, 1, 2, \cdots)$$

に対し、

$$d\alpha = k\xi_1^{k-1} f(\xi_2, \cdots \xi_N)\, d\xi_1 \wedge d\xi_2 \wedge \cdots \wedge d\xi_n + (\, d\xi_q \text{ を含む項}\,)$$

ですから、$\int_{\partial V} \alpha$ および $\int_V d\alpha$ は、共に、

$$\int f(\xi_2, \cdots, \xi_n)\, d\xi_2 \wedge \cdots \wedge d\xi_n$$

となり、定理が成立します。ただし $k = 0$ のときは $k = \epsilon \to +0$ という極限として理解します。一方、α に $d\xi_1$ や $d\xi_q$ が含まれる場合は、$\int_{\partial V} \alpha$ および $\int_V d\alpha$ は共に 0 となるので、やはり定理が成り立ちます。

以上の事柄と、$\int_{\partial V} \alpha$ および $\int_V d\alpha$ が線形性を持つことから、任意の (多項式的な) $(n-1)$ 形式 α と可縮領域 V に対して定理が成立します。V が可縮でない場合は、複数の可縮領域の連結を考えることで、やはり定理が成立することになります。[証明終]

(*注) 正方形の 4 辺を全て 1 点に縮めると、正方形の内部は球面のようになるでしょう。風呂敷で物を包む様子をイメージしてください。一般に、n 次元超立方体の境界を 1 点に縮めたものは n 次元超球面 (S^n) と大域的に同相です。よって ∂V は S^{n-1} と同相です。例えば、2 次元ユークリッド空間の極座標 r, θ に対し、$\xi_1 = r/R,\ \xi_2 = \theta$ で定義される座標は、原点を中心とする半径 R の円に対する葉層座標になります。また、3 次元ユークリッド空間の極座標 r, θ, ϕ に対し、$\xi_1 = r/R$, $\xi_2 = 2\arctan(\tan(\theta/2)\cos\phi),\ \xi_3 = 2\arctan(\tan(\theta/2)\sin\phi)$ で定義される座標は、原点を中心とする半径 R の球に対する葉層座標になります。ここで arctan は tan の逆関数です。

1.20 ガウスの定理

3 次元ユークリッド空間においては、空間上の任意の関数 (0 形式) $\phi = \phi(\boldsymbol{r})$ に対して、

$$d\phi = dx_i \partial_i \phi.$$

$$d(dx_i\phi) = -dx_i \wedge d\phi = -dx_i \wedge dx_j\,\partial_j\phi = -\epsilon_{ijk}d^2x_k\partial_j\phi = \epsilon_{ikj}d^2x_k\partial_j\phi,$$

$$\begin{aligned} d(d^2x_i\phi) &= d^2x_i \wedge d\phi = \frac{1}{2}\,\epsilon_{ijk}\,dx_j \wedge dx_k \wedge dx_l\,\partial_l\phi \\ &= \frac{1}{2}\,\epsilon_{ijk}\,\epsilon_{jkl}\,dx_1 \wedge dx_2 \wedge dx_3\,\partial_l\phi = \delta_{il}\,d^3x\,\partial_l\phi = d^3x\,\partial_i\phi. \end{aligned}$$

ここで、$d^3x = d^3\boldsymbol{r}$, $d^2x_i = (d^2\boldsymbol{r})_i$ です。また、面積要素の定義からすぐにわかる関係式：$dx_i \wedge dx_j = \epsilon_{ijk}d^2x_k$ を用いました。

よってストークスの定理は、任意の 1 次元領域 C, 2 次元領域 S, 3 次元領域 V に対して、

$$\int_{\partial C} = \int_C d\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{\nabla}, \quad \int_{\partial S} d\boldsymbol{r} = \int_S d^2\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{\nabla}, \quad \int_{\partial V} d^2\boldsymbol{r} = \int_V d^3\boldsymbol{r}\,\boldsymbol{\nabla}$$

という積分演算子の関係式を与えます。2 番目の式はやはり**ストークスの定理**と呼ばれ、3 番目の式は**ガウスの定理**と呼ばれます。

ここで境界 ∂S の向きですが、図 1.10 左のように葉層座標を取ると、面 S の面積要素、

$$\left(\frac{\partial\boldsymbol{r}}{\partial\xi_1}\right)\times\left(\frac{\partial\boldsymbol{r}}{\partial\xi_2}\right)\,d\xi_1 \wedge d\xi_2$$

は図の上向きとなり、S と ∂S の関係は右ねじの規則により与えられることがわかります。一方、∂V の向きは、図 1.10 右のように葉層座標を取ることで、V の体積要素は (右手系の場合) 正となり、このとき ∂V の面積要素、

$$\left(\frac{\partial\boldsymbol{r}}{\partial\xi_2}\right)\times\left(\frac{\partial\boldsymbol{r}}{\partial\xi_3}\right)\,d\xi_2 \wedge d\xi_3$$

は領域 V から外向きということになります。

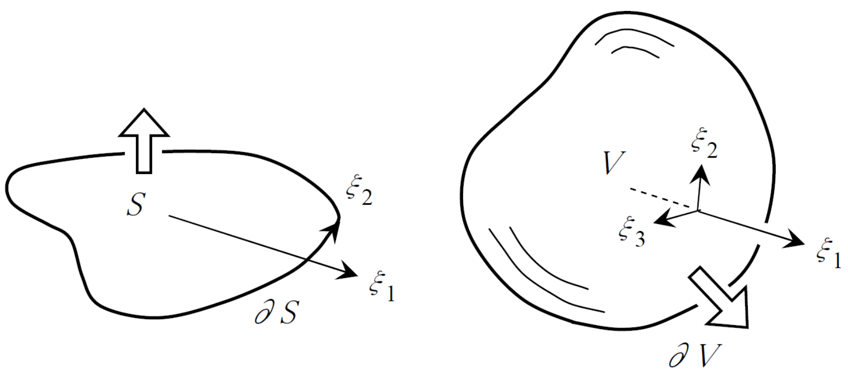

図 1.10: 境界の向き

特に上のストークスの定理をベクトル場 $\boldsymbol{A}$ に適用すると、

$$\int_{\partial S} d\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{A} = \int_S (d^2\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{\nabla})\cdot\boldsymbol{A}$$

ですが、これは $(d^2\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{\nabla})\cdot\boldsymbol{A} = d^2\boldsymbol{r}\cdot(\boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{A})$ に注意して、

$$\int_{\partial S} d\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{A} = \int_S d^2\boldsymbol{r}\cdot(\boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{A})$$

と表すこともできます。一方、ガウスの定理をベクトル場 $\boldsymbol{A}$ に適用すると、

$$\int_{\partial V} d^2\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{A} = \int_V d^3\boldsymbol{r}\,\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{A}$$

です。初等的にはこれら 2 式が、ストークスの定理、およびガウスの定理として広く知られていて、特に物理においては連続体力学や電磁気学で多用され、重要となります。

(余談) 初等的なガウスの定理やストークスの定理に限っていえば、もう少し直接的に導出することもできますが、ここでは一般的なストークスの定理から演繹しました。初学者には少し難しいかもしれませんが、3 次元のみ知っていて、一般次元においてどうなるのかわからないというのも気持ち悪いことだと思うので、頑張ってフォローしてください。

索 引

ま

や

ら