

あもんノート

ユークリッド幾何学、ニュートン力学から、相対論、宇宙論、量子論、場の量子論、素粒子論、そして超ひも理論まで、理論物理学を簡潔にかつ幅広く網羅したノートです。TOP へは下の URL をクリックして行けます。専用の画像掲示板で、ご意見、ご質問等も受け付けております。

<http://amonphys.web.fc2.com/>

目次

第1章	ユークリッド幾何学	3
1.1	ユークリッド空間とデカルト座標	3
1.2	クロネッカーデルタとレビ・チビタ	4
1.3	偏微分と全微分	5
1.4	行列式と余因子	6
1.5	合同変換と相似変換	8
1.6	スカラーとベクトル	10
1.7	テンソルと擬テンソル	11
1.8	ベクトルの内積とノルム	12
1.9	角度と三角関数	12
1.10	三角関数の性質	14
1.11	テンソル積	16
1.12	外積とスカラー3重積	17
1.13	無限小角度ベクトル	18
1.14	座標の接ベクトルと基底	19
1.15	体積と面積	20
1.16	3次元極座標と球の計量	22
1.17	ナブラとラプラシアン	23
1.18	外微分とストークスの定理	24
1.19	ガウスの定理	25

第1章 ユークリッド幾何学

物理に必要な数学であるユークリッド幾何学の基礎について、表記法の紹介も兼ねてここにまとめておきます。ユークリッド幾何学はユークリッドの原論に始まる非常に古い歴史を持つ数学です。このため、何を公理とするか、また、どのような表現法を用いるかによって数種の立場があります。ここでは計量空間の一種として捉え、なおかつ座標に立脚した立場をとります。

1.1 ユークリッド空間とデカルト座標

N 個の順序付けられた実数の組 (x_1, x_2, \dots, x_N) が作る集合を \mathbb{R}^N と書きます。局所的に \mathbb{R}^N と同相な点の集合は、 N 次元の空間、あるいは多様体と呼ばれます。空間のある点に対応する \mathbb{R}^N の元の成分 x_i ($i = 1, 2, \dots, N$) はその点の座標と呼ばれます。

N 次元空間上の点 P の座標を $x_i(P)$ のように表しましょう。2点 P, Q における座標の差：

$$\Delta x_i = x_i(Q) - x_i(P)$$

は PQ 間の変位と呼ばれます。任意の2点 PQ 間の距離 s が、

$$s^2 = \sum_{i=1}^N (\Delta x_i)^2, \quad s \geq 0$$

で与えられるとき、この N 次元空間を N 次元ユークリッド空間といい、座標 x_i をデカルト座標、あるいはカーテシアン座標といいます。

一般に、距離の定義された空間は計量空間と呼ばれます。ユークリッド空間は計量空間の代表的な一例です。ユークリッド空間でない計量空間は非ユークリッド空間と呼ばれます。これはどのように座標を選んでも距離が上式のように与えられない空間を意味します。

1つの項に同じ添字が現れたとき、その添字について和を取ることにします。これをアインシュタインの縮約規則といいます。そうすると上式は、

$$s^2 = \Delta x_i \Delta x_i$$

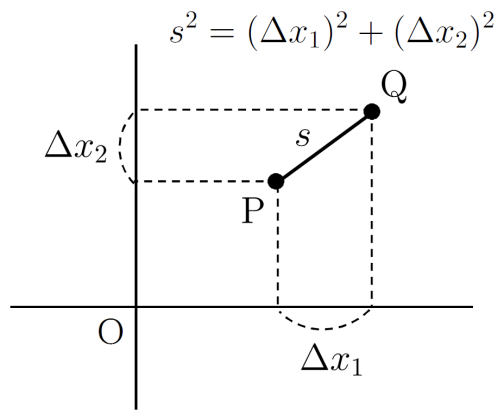


図 1.1: 2次元ユークリッド空間

と書くこともできます。このとき右辺は添字 i について和を取るわけです。このような添字はダミー (和の変数) であるため、計算上、別の使っていない添字に置換できます。例えば上式は $s^2 = \Delta x_j \Delta x_j$ と書いても同じことです。

1.2 クロネッカーデルタとレビ・チビタ

クロネッカーデルタの記号を、

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & (i = j) \\ 0 & (i \neq j) \end{cases}$$

で定義します。これは行列としては単位行列に相当し、

$$\delta_{ij} A_j = A_i$$

という性質を持ちます。言うまでもないですが、左辺は j について和をとります。

また、 N 次元レビ・チビタの記号を、

$$\epsilon_{i_1 i_2 \dots i_N} = \begin{cases} 1 & (i_1, i_2, \dots, i_N \text{ が } 1, 2, \dots, N \text{ の偶置換のとき}) \\ -1 & (\text{奇置換のとき}) \\ 0 & (\text{その他、すなわち添字に同じ数字があるとき}) \end{cases}$$

で定義します。この定義から、 $\epsilon_{i_1 i_2 \dots i_N}$ はどの2つの添字を入れ換えても符号が逆になります。これは一般に完全反対称性と呼ばれる性質です。それゆえレビ・チビタの記号は、

$$\epsilon_{i_1 i_2 \dots i_N} \text{ は } \epsilon_{12 \dots N} = 1 \text{ であつ } N \text{ 個の添字について完全反対称}$$

として定義することもできます。

特に3次元の場合は、サイクリック対称性：

$$\epsilon_{ijk} = \epsilon_{kij} = \epsilon_{jki}$$

があります。添字が奇数個なら、一番後ろの添字を一番前に送る操作が偶置換になるからです。

1.3 偏微分と全微分

ここで、初等的ですが高校では習わない数学について簡単に解説しておきます。まずは偏微分についてです。

2つの変数 x, y を引数とする2変数関数 $z = f(x, y)$ があるとき、

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x+\Delta x, y) - f(x, y)}{\Delta x}, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{f(x, y+\Delta y) - f(x, y)}{\Delta y}$$

のように偏微分を定義します。すなわち偏微分 $\partial z/\partial x$ は、 x 以外の変数を固定し変化させないとした場合の微分(微分商)です。 $\partial z/\partial y$ についても同様。よって特に、

$$\frac{\partial x}{\partial x} = 1, \quad \frac{\partial y}{\partial y} = 1, \quad \frac{\partial y}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial x}{\partial y} = 0.$$

2つの変数が $x = x(t), y = y(t)$ のように1つの変数 t の関数として与えられると考えると、

$$\begin{aligned} \frac{dz}{dt} &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{f(x+\Delta x, y+\Delta y) - f(x, y)}{\Delta t} \\ &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \left(\frac{f(x+\Delta x, y+\Delta y) - f(x, y+\Delta y)}{\Delta x} \frac{\Delta x}{\Delta t} + \frac{f(x, y+\Delta y) - f(x, y)}{\Delta y} \frac{\Delta y}{\Delta t} \right) \\ &= \frac{\partial z}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial z}{\partial y} \frac{dy}{dt} \end{aligned}$$

のように展開されますが、これを形式的に、

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x} dx + \frac{\partial z}{\partial y} dy$$

と書き、 z の全微分もしくは微分形式といいます。例えば $z = x^2y$ という場合を考えると、 $\partial z/\partial x = 2xy, \partial z/\partial y = x^2$ なので、 $dz = 2xydx + x^2dy$ ということになります。

一般化すると、多変数関数 $z = f(x_1, x_2, \dots, x_N)$ に関して、

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x_i} dx_i.$$

右辺は縮約規則を用いています。また、

$$\frac{\partial x_i}{\partial x_j} = \delta_{ij}$$

がわかるでしょう。一方、 x_i がそれぞれ別の変数 y_i の関数になっているときは、

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x_i} dx_i = \frac{\partial z}{\partial x_i} \frac{\partial x_i}{\partial y_j} dy_j \quad \text{および} \quad dz = \frac{\partial z}{\partial y_j} dy_j$$

なので、これらを比較して、

$$\frac{\partial z}{\partial y_j} = \frac{\partial x_i}{\partial y_j} \frac{\partial z}{\partial x_i}$$

という変換式を得ます。

1.4 行列式と余因子

次は行列式と余因子についてです。ここは数式に添字が多くややこしいので、じっくり読む必要があります。

N 次正方行列 A の行列式の定義は、

$$\det A = \frac{1}{N!} \epsilon_{i_1 i_2 \dots i_N} \epsilon_{j_1 j_2 \dots j_N} A_{i_1 j_1} A_{i_2 j_2} \dots A_{i_N j_N}$$

です。簡単に、

$$\det(cA) = c^N \det A, \quad \det A^T = \det A$$

という性質がわかるでしょう。ここで c は実数 (または複素数)。また、 A^T は A の転置行列で、

$$(A^T)_{ij} = A_{ji}$$

で定義されます。

いま、 $f_{i_1 i_2 \dots i_N} = \epsilon_{j_1 j_2 \dots j_N} A_{i_1 j_1} A_{i_2 j_2} \dots A_{i_N j_N}$ とおくと、これは i_1, i_2, \dots, i_N について完全反対称であることがわかるので、 $f_{i_1 i_2 \dots i_N} = \epsilon_{i_1 i_2 \dots i_N} f_{12 \dots N}$ と書けます。すなわち、

$$\epsilon_{j_1 j_2 \dots j_N} A_{i_1 j_1} A_{i_2 j_2} \dots A_{i_N j_N} = \epsilon_{i_1 i_2 \dots i_N} \epsilon_{j_1 j_2 \dots j_N} A_{1 j_1} A_{2 j_2} \dots A_{N j_N}.$$

これと $\epsilon_{i_1 i_2 \dots i_N} \epsilon_{i_1 i_2 \dots i_N} = N!$ に注意すると、

$$\begin{aligned} \det A &= \epsilon_{j_1 j_2 \dots j_N} A_{1 j_1} A_{2 j_2} \dots A_{N j_N}, \\ \epsilon_{j_1 j_2 \dots j_N} A_{i_1 j_1} A_{i_2 j_2} \dots A_{i_N j_N} &= \epsilon_{i_1 i_2 \dots i_N} \det A \end{aligned}$$

といった性質が得られます。特に上式から、2次正方行列 A に対して、

$$\det A = \epsilon_{j_1 j_2} A_{1j_1} A_{2j_2} = A_{11} A_{22} - A_{12} A_{21} \quad \therefore \det \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = ad - bc$$

ですが、これは高校数学でもお馴染みでしょう。

また、一般に2つの N 次正方行列 A, B に対して、

$$\begin{aligned} \det(AB) &= \epsilon_{j_1 j_2 \dots j_N} (AB)_{1j_1} (AB)_{2j_2} \dots (AB)_{Nj_N} \\ &= \epsilon_{j_1 j_2 \dots j_N} (A_{1i_1} B_{i_1 j_1}) (A_{2i_2} B_{i_2 j_2}) \dots (A_{Ni_N} B_{i_N j_N}) \\ &= A_{1i_1} A_{2i_2} \dots A_{Ni_N} \epsilon_{i_1 i_2 \dots i_N} \det B = \det A \det B. \end{aligned}$$

すなわち、行列の積の行列式は、それぞれの行列の行列式の積と等しくなることがわかります。

一方、

$$\tilde{A}_{ij} = \frac{\partial \det A}{\partial A_{ij}}$$

で行列 A の余因子を定義します。行列式の定義、ライプニッツ則(積の微分法則)、 $\partial A_{i_k j_k} / \partial A_{ij} = \delta_{ii_k} \delta_{jj_k}$ に注意すると、

$$\tilde{A}_{ij} = \frac{1}{(N-1)!} \epsilon_{ii_2 \dots i_N} \epsilon_{jj_2 \dots j_N} A_{i_2 j_2} \dots A_{i_N j_N}$$

を得るでしょう。これは $(N-1)$ 次の行列の行列式とみなすことができ、

$$\tilde{A}_{ij} = (A \text{ の } i \text{ 行と } j \text{ 列を取り除いた行列の行列式}) \times (-1)^{i+j}$$

ということがわかります。また、

$$\begin{aligned} A_{kj} \tilde{A}_{ij} &= \frac{1}{(N-1)!} \epsilon_{ii_2 \dots i_N} \epsilon_{jj_2 \dots j_N} A_{kj} A_{i_2 j_2} \dots A_{i_N j_N} \\ &= \frac{1}{(N-1)!} \epsilon_{ii_2 \dots i_N} \epsilon_{ki_2 \dots i_N} \det A \end{aligned}$$

ですが、 $\epsilon_{ii_2 \dots i_N} \epsilon_{ki_2 \dots i_N} = (N-1)! \delta_{ik}$ に注意すると、

$$A_{kj} \tilde{A}_{ij} = \delta_{ki} \det A \quad \therefore A \tilde{A}^T = \det A \delta \quad (\delta \text{ は単位行列}).$$

さらにこれと同様にして、 $\tilde{A}_{ij} A_{ik} = \delta_{jk} \det A \therefore \tilde{A}^T A = \det A \delta$ が確かめられるので、 A の逆元、すなわち $AA^{-1} = A^{-1}A = \delta$ を満たす行列 A^{-1} は、

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \tilde{A}^T$$

と一意的に定まり、これを A の逆行列といいます。 \tilde{A}^T は A の余因子行列と呼ばれます。 $\det A = 0$ のときは A の逆行列は存在しません。 $\det A \neq 0$ で逆行列が存在する正方行列は正則行列と呼ばれます。

ちなみに、 $A_{kj}\tilde{A}_{ij} = \delta_{ki} \det A$ において特に $k = i = 1$ とおくと、

$$\det A = A_{1j}\tilde{A}_{1j}$$

ですが、これは行列式の余因子展開と呼ばれ、高次の行列の行列式を求めるときに重宝するものです。

[例題] 行列 $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 2 & 5 & 8 \\ 6 & 7 & 9 \end{pmatrix}$ の行列式、および逆行列を求めよ。

[解] $\tilde{A}_{ij} = (A$ の i 行と j 列を取り除いた行列の行列式) $\times (-1)^{i+j}$ に注意すると、1 行目の余因子は、 $\tilde{A}_{11} = -11$, $\tilde{A}_{12} = 30$, $\tilde{A}_{13} = -16$ と計算されるので、行列式は、 $\det A = A_{1j}\tilde{A}_{1j} = 15$ 。また、残りの余因子は、 $\tilde{A}_{21} = 1$, $\tilde{A}_{22} = -15$, $\tilde{A}_{23} = 11$, $\tilde{A}_{31} = 4$, $\tilde{A}_{32} = 0$, $\tilde{A}_{33} = -1$ と計算されるので、逆行列は、

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \tilde{A}^T = \frac{1}{15} \begin{pmatrix} -11 & 1 & 4 \\ 30 & -15 & 0 \\ -16 & 11 & -1 \end{pmatrix}. \quad [\text{解終}]$$

(余談) 行列式を扱った教科書は応用系の目的のものが多いため、このように簡潔かつ明瞭に説明しているものは少ないと思われます。初等的な線形代数の教科書で 30 ページ以上費やしていることを、レビ・チビタの記号 (符号関数) を用いてスマートに済ませています。それゆえこの 2 ページほどの理解に、例えば 3 日費やしても良いくらいです。

1.5 合同変換と相似変換

ユークリッド幾何学の話に戻りましょう。

あるデカルト座標 x_i から、

$$x'_i = x_i - a_i \quad (a_i \text{ は任意の定数})$$

で新しい座標 x'_i を定義します。これを並進変換といいます。このとき、

$$\begin{aligned} x'_i(P) &= x_i(P) - a_i, & x'_i(Q) &= x_i(Q) - a_i \\ \therefore \Delta x'_i &= x'_i(Q) - x'_i(P) = x_i(Q) - x_i(P) = \Delta x_i \end{aligned}$$

なので、

$$\Delta x'_i \Delta x'_i = \Delta x_i \Delta x_i = s^2.$$

すなわち新しい座標 x'_i もデカルト座標であることがわかります。

一方、今度は、

$$x'_i = \Lambda_{ij} x_j, \quad \Lambda_{ij} \Lambda_{ik} = \delta_{jk}$$

という一次変換で新しい座標 x'_i を定義します。これを直交変換といいます。このとき上と同様にして、 $\Delta x'_i = \Lambda_{ij} \Delta x_j$ が得られるので、

$$\Delta x'_i \Delta x'_i = \Lambda_{ij} \Lambda_{ik} \Delta x_j \Delta x_k = \delta_{jk} \Delta x_j \Delta x_k = \Delta x_j \Delta x_j = s^2.$$

すなわち新しい座標はやはりデカルト座標です。ユークリッド空間において、デカルト座標は無数に存在することがわかります。

直交変換の条件 $\Lambda_{ij} \Lambda_{ik} = \delta_{jk}$ は、行列表記で、

$$\Lambda^T \Lambda = \delta \quad (\delta \text{ は単位行列})$$

であり、これを満たす実正方行列 Λ は直交行列と呼ばれます。両辺において行列表式をとると、

$$(\det \Lambda)^2 = 1 \quad \therefore \det \Lambda = \pm 1$$

ですが、 $\det \Lambda = +1$ の場合の直交変換を回転変換といい、 $\det \Lambda = -1$ の場合の直交変換を、反転(パリティ)を含む直交変換といいます。

並進変換と直交変換を合わせて合同変換といいます。合同変換で一致する2つの図形(点の集合)は互いに合同であると呼ばれます。

また、合同変換に、スケール変換:

$$x'_i = kx_i \quad (k \text{ は } 0 \text{ でない実数})$$

を付加し拡張したものを相似変換といいます。相似変換で一致する2つの図形は互いに相似であると呼ばれます。

特に3次元の場合、図1.2のように右手の親指、人差し指、中指を互いに直交させたとき、これらの指の方向が順に x_1, x_2, x_3 軸の正の方向となるように合わせられるデカルト座標を右手系といいます。左手でこれが成り立つ系を左手系といいます。反転を含む直交変換は右手系と左手系を入れ換えます。

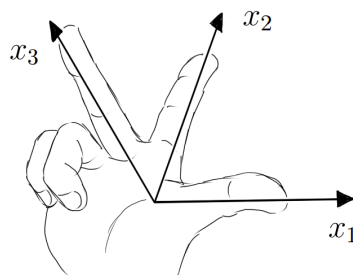


図 1.2: 右手系

(余談) 中学校で習う初等幾何では、まず三角形に関する合同条件や相似条件を与え、そのときの性質を公理と考え図形や空間に関する定理を導いていきます。これは簡単でよいのですが、ユークリッド空間

ユークリッド幾何学が何を仮定した数学(数理世界)であるかがわかりにくくなってしまいます。このためユークリッド幾何学が唯一無二の幾何学であると勘違いしてしまいがちです。非常によくできた数理世界を現実世界と混同してしまう思考的な病をピグマリオン症といいます(J.L. シンジ命名)。ユークリッド幾何学やニュートン力学は現実の世界においてかなり高い精度で成り立っているため、ピグマリオン症の温床になっています。ユークリッド幾何学もニュートン力学も数理世界であって、現実世界ではない、ということをお肝に銘じることが大事です。現実世界は原理的にいて我々には永遠に悟ることができないものであり、理論物理の全ては、現実世界に極力類似した数理世界(モデル)の創作およびその探求であるという当たり前の事実を、特に留意すべきなのです。ちなみに“ピグマリオン”はギリシャ神話に基づく戯曲で、超越したリアリズムで女性像を彫刻しそれに恋した結果、ついにはその像が生きた人間になるというお話です。どんなにリアルであっても、モデルはモデルにすぎないはずなのに...、というわけです。

1.6 スカラーとベクトル

合同変換：

$$x'_i = \Lambda_{ij}x_j - a_i$$

に対し不変な量をスカラーといいます。例えば、2点間の距離 $s = \sqrt{\Delta x_i \Delta x_i}$ はスカラーです。また、合同変換に対し、

$$A'_i = \Lambda_{ij}A_j$$

のように変換される量 A_i をベクトルといいます。例えば、2点間の変位 Δx_i は $\Delta x'_i = \Lambda_{ij}\Delta x_j$ と変換されるのでベクトルです。それゆえ変位は変位ベクトルとも呼ばれます。

一方、デカルト座標 x_i 自体は、厳密にはベクトルではありませんが、直交変換に限っていえばベクトルとして振舞います。この意味でベクトルとして考えることがあり、これを位置ベクトルといいます。

ベクトル A_i を順序付けられた組 (A_1, A_2, \dots, A_N) で表すとき、あるいは N 行 1 列の行列として表すときは、 \mathbf{A} と太字で書くことがあります。成分を抜き出すときは $(\mathbf{A})_i$ と書きます。すなわち、

$$\mathbf{A} = (A_1, A_2, \dots, A_N), \quad (\mathbf{A})_i = A_i.$$

ベクトル方程式 $\mathbf{A} = \mathbf{B}$ は $\forall i(A_i = B_i)$ を意味します。3次元ユークリッド空間の位置ベクトル x_i に関しては \mathbf{r} という記号を用いることが慣習としてあります。すなわち、

$$(\mathbf{r})_i = x_i$$

です。

(余談) 座標に立脚しない立場ではベクトルやテンソルをもっと抽象的なものとして考えます。例えば微分幾何学ではベクトルは曲線上の微分演算子として定義します。しかしここではそれは採用しません。ここではあくまで座標ありきであり、よってベクトルは成分表示が第一義的なものと考えます。最初に述べたように、色々な流儀があるので混乱しないようにしてください。座標ありきの方法は、物理においては便利であり、それゆえ物理の世界では今もって標準的です。

1.7 テンソルと擬テンソル

テンソルはスカラーやベクトルを一般化した概念です。\$M\$ 個の添字を持つ量 \$T_{i_1 i_2 \dots i_M}\$ があって、合同変換 \$x'_i = \Lambda_{ij} x_j - a_i\$ に対し、

$$T'_{i_1 i_2 \dots i_M} = \Lambda_{i_1 j_1} \Lambda_{i_2 j_2} \cdots \Lambda_{i_M j_M} T_{j_1 j_2 \dots j_M}$$

のように変換されるとき、\$T_{i_1 i_2 \dots i_M}\$ を \$M\$ 階のテンソルといいます。ベクトルは1階のテンソル、スカラーは0階のテンソルということになります。

\$\Lambda_{ij}\$ は直交行列だったので、

$$\delta_{ij} = \Lambda_{il} \Lambda_{jm} \delta_{lm}$$

がわかりますが、これはクロネッカーデルタ \$\delta_{ij}\$ が2階のテンソルであることを意味しています。特に定数のテンソルです。

テンソル同士の積は再びテンソルになります。これを積の定理といいます。例えば、任意の2つのベクトル \$A_i, B_i\$ に対し、\$C_{ij} = A_i B_j\$ を定義すると、

$$C'_{ij} = A'_i B'_j = \Lambda_{il} \Lambda_{jm} A_l B_m = \Lambda_{il} \Lambda_{jm} C_{lm}$$

なので、\$C_{ij}\$ は2階のテンソルであり、また、\$D = A_i B_i\$ を定義すると、

$$D' = A'_i B'_i = \Lambda_{il} \Lambda_{im} A_l B_m = \delta_{lm} A_l B_m = A_l B_l = D$$

なので、\$D\$ はスカラーになります。

一方、

$$T'_{i_1 i_2 \dots i_M} = \det \Lambda \Lambda_{i_1 j_1} \Lambda_{i_2 j_2} \cdots \Lambda_{i_M j_M} T_{j_1 j_2 \dots j_M}$$

のように変換される量 \$T_{i_1 i_2 \dots i_M}\$ は、\$M\$ 階の擬テンソルと呼ばれます。特に1階の擬テンソルは軸性ベクトル、0階の擬テンソルは擬スカラーと呼ばれます。

\$(\det \Lambda)^2 = 1\$ と行列式の定義に注意すると、

$$\epsilon_{i_1 i_2 \dots i_N} = \det \Lambda \Lambda_{i_1 j_1} \Lambda_{i_2 j_2} \cdots \Lambda_{i_N j_N} \epsilon_{j_1 j_2 \dots j_N}$$

が確かめられるので、\$N\$ 次元レビ・チビタは \$N\$ 階の擬テンソルということになります。特に定数の擬テンソルです。

擬テンソルとテンソルの積は擬テンソルになり、擬テンソルと擬テンソルの積はテンソルになることは容易にわかるでしょう。しかし合同変換に反転が含まれない、つまり \$\det \Lambda = +1\$ の場合は、テンソルと擬テンソルは同義になるため、特に区別する必要がない場合、擬テンソルもテンソルと呼び、一緒くたに扱います。位置ベクトルがベクトルかという問題と同様に、この辺は少し融通をきかせるわけです。

1.8 ベクトルの内積とノルム

2つのベクトル A, B に対し、

$$A \cdot B = A_i B_i$$

で2つのベクトルの内積を定義します。積の定理からこれはスカラーです。明らかに $B \cdot A = A \cdot B$ 。すなわち内積は可換です。

また、

$$|A| = \sqrt{A \cdot A}$$

をベクトル A の大きさ(ノルム)といいます。これもスカラーで、特に A が変位ベクトルの場合、2点間の距離を意味することになります。明らかに $|A| \geq 0$ ですが、等号成立は A の成分が全て0のときに限られます。このようなベクトルを零ベクトルといい、太字で 0 と書きます。

A が零ベクトルでないとき、

$$\bar{A} = \frac{A}{|A|}$$

は大きさ1のベクトルになりますが、これを A の方向ベクトルといいます。零ベクトルの方向ベクトルは定義されません。大きさ1のベクトルは一般に単位ベクトルと呼ばれます。

1.9 角度と三角関数

2次元以上のユークリッド空間に零ベクトルでない2つのベクトル A, B があるとき、適当な回転変換によって、これらの方向ベクトルを、

$$\bar{A} = (1, 0, 0, \dots, 0), \quad \bar{B} = (a, b, 0, \dots, 0), \quad a^2 + b^2 = 1$$

と表すことができます(図1.3)。

このとき2つの方向ベクトルが作る弧の長さ θ を、2つのベクトルが成す角度といいます。弧は、

$$C = \{ (x_1, x_2, 0, \dots, 0) \mid x_1 = \sqrt{1-t^2}, x_2 = t, 0 < t < b \}$$

という点の集合で与えられるので、弧の長さ、すなわち角度 θ は、 $a \geq 0, b \geq 0$ の場合、

$$\theta = \int_C ds = \int_0^b dt \sqrt{\left(\frac{dx_1}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dx_2}{dt}\right)^2} = \int_0^b \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}$$

のように解析的に(定積分として)与えられます。

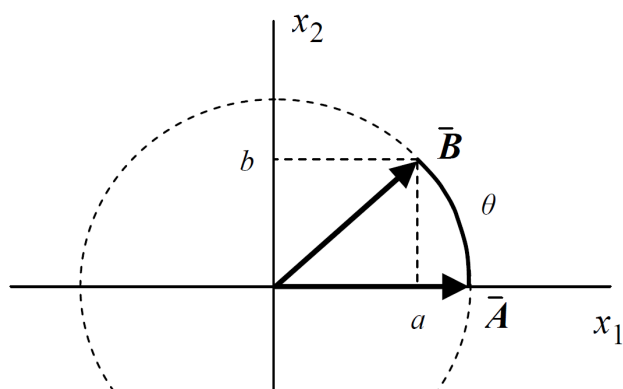


図 1.3: 角度

$a = 1$ のとき、2つのベクトルは平行であるといいます。 $a = -1$ のとき、2つのベクトルは反平行であるといいます。 $a = 0$ のとき、2つのベクトルは直交しているといいます。また、このときの角度を直角といいます。直角を $\pi/2$ とおくことで円周率 π を定義します。すなわち、

$$\pi = 2 \int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} \sim 3.14159.$$

一方、

$$a = \cos \theta, \quad b = \sin \theta, \quad \tan \theta = \frac{\sin \theta}{\cos \theta}$$

で三角関数を定義します。明らかに、

$$\cos^2 \theta + \sin^2 \theta = 1.$$

三角関数のグラフを図 1.4 に示します。

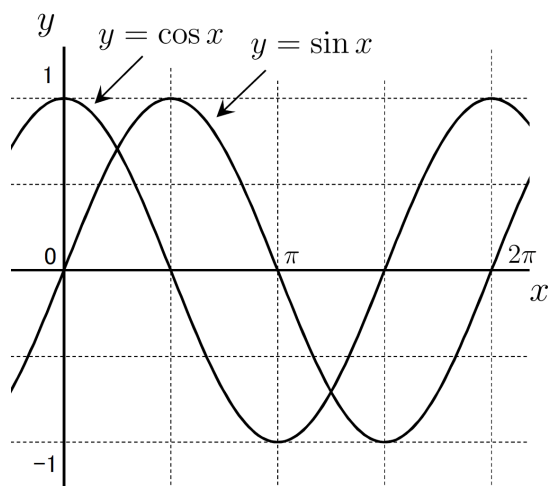


図 1.4: 三角関数

$\bar{A} \cdot \bar{B} = 1a + 0b = a = \cos \theta$ から、

$$A \cdot B = |A||B| \cos \theta.$$

よって、

$$\begin{aligned} |A - B|^2 &= (A - B) \cdot (A - B) = A \cdot A + B \cdot B - 2A \cdot B \\ &= |A|^2 + |B|^2 - 2|A||B| \cos \theta \end{aligned}$$

です。これは2つのベクトルが変位ベクトルであるとする、三角形の3辺の長さの関係になっていて、余弦定理と呼ばれます (図 1.5)。特に A, B が直交する場合は $\cos \theta = 0$ なので、余弦定理は、 $|A - B|^2 = |A|^2 + |B|^2$ となり、これは三平方の定理 (ピタゴラスの定理) と呼ばれます。

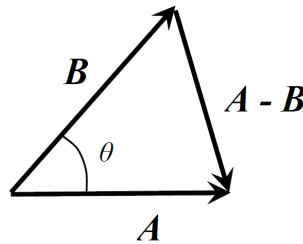


図 1.5: 余弦定理

(余談) ノートに描いた直角三角形においてピタゴラスの定理がよく成り立っているのを知って、ピタゴラスの定理を“真理”だと思ってしまうことがピグマリオン症の典型的な例です。ほとんどの中高生はピグマリオン症にかかっているといえます。実際には、ユークリッド幾何学が比較的良好な物理の理論 (数学的モデル) になっているにすぎません。ピタゴラスの定理が成り立たない幾何学も同様に考えることができ、そのような一般的な幾何学 (例えばリーマン幾何学) の方がさらに精密な物理の理論になっていると考えられています。

1.10 三角関数の性質

三角関数の性質については高校の数学で嫌になるほど習うものですが、ここで簡単に導出し、まとめておきましょう。

2次元ユークリッド空間において、図1.6のような3つの単位ベクトルを考えると、

$$\mathbf{p} = (\cos \alpha, \sin \alpha), \quad \mathbf{q} = (-\sin \alpha, \cos \alpha),$$

$$\mathbf{r} = \cos \beta \mathbf{p} + \sin \beta \mathbf{q} = (\cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta, \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta)$$

であり、一方で、 $\mathbf{r} = (\cos(\alpha + \beta), \sin(\alpha + \beta))$ ですから、これらを比較して、

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta,$$

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta$$

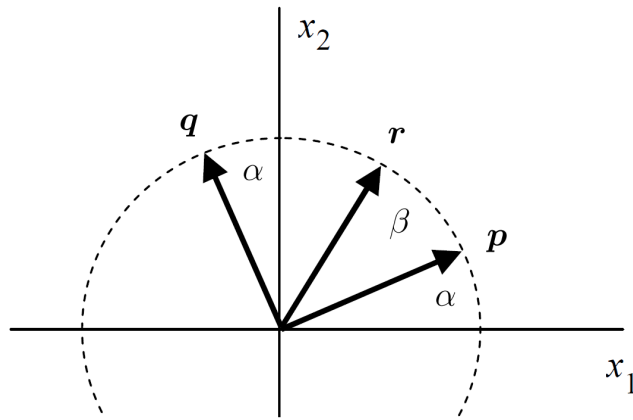


図 1.6: 加法定理

を得ます。これを三角関数の加法定理といいます。加法定理から、例えば、

$$\sin\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \cos \theta, \quad \cos\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \sin \theta$$

がわかります。また、

$$\cos(2\alpha) = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha, \quad \sin(2\alpha) = 2 \sin \alpha \cos \alpha$$

もわかるでしょうが、これは倍角公式と呼ばれます。cos の倍角公式を逆に解くと、

$$\cos^2 \alpha = \frac{1 + \cos(2\alpha)}{2}, \quad \sin^2 \alpha = \frac{1 - \cos(2\alpha)}{2}$$

となりますが、これは半角公式と呼ばれます。これら公式を駆使すると次の表を得ることができるでしょう。

θ	0	$\frac{\pi}{12}$	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{5\pi}{12}$	$\frac{\pi}{2}$
$\frac{180}{\pi} \theta$	0	15	30	45	60	75	90
$\cos \theta$	1	$\frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}$	0
$\tan \theta$	0	$2 - \sqrt{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	$2 + \sqrt{3}$	∞

一方、角度と三角関数の定義から、

$$\theta = \int_0^{\sin \theta} \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}$$

ですが、両辺 θ で微分すると、左辺は 1 となり、右辺は、

$$\frac{d \sin \theta}{d \theta} \frac{d}{d \sin \theta} \int_0^{\sin \theta} \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} = \frac{d \sin \theta}{d \theta} \frac{1}{\sqrt{1-\sin^2 \theta}} = \frac{d \sin \theta}{d \theta} \frac{1}{\cos \theta}$$

と評価されるので、

$$\frac{d}{d \theta} \sin \theta = \cos \theta$$

という微分公式を得ることができます。cos の微分については、

$$\frac{d}{d \theta} \cos \theta = \frac{d}{d \theta} \sin \left(\frac{\pi}{2} - \theta \right) = -\cos \left(\frac{\pi}{2} - \theta \right) = -\sin \theta$$

となります。

(余談) 高校の数学では、極限公式： $\lim_{\theta \rightarrow 0} \sin \theta / \theta = 1$ の証明が曖昧で、このため三角関数の微分公式の証明がちゃんとなされていません。これは幾何学や三角関数の単元が教育的理由から微分積分(解析学)より前にあって、それゆえ角度の定義を定積分として表示することをしないためと考えられます。純粋に論理的に考えれば、集合論 \rightarrow 自然数論 \rightarrow 解析学 \rightarrow 幾何学 の順に展開されるのが自然なのですが、基礎的な分野の方が難易度が高いこともあって、このようには教わらないわけです。ちなみにここでの立場では、ロピタルの定理：

$$f(a) = g(a) = 0 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

から、 $\lim_{\theta \rightarrow 0} \sin \theta / \theta = \lim_{\theta \rightarrow 0} \cos \theta / 1 = 1$ です。ロピタルの定理の証明は簡単でしょう。

1.11 テンソル積

2つのベクトル A, B に対して、

$$(A B)_{ij} = A_i B_j$$

をテンソル積といいます。これは積の定理から2階のテンソルになります。また、2階のテンソル T_{ij} とベクトル A_i の内積は、

$$(T \cdot A)_i = T_{ij} A_j, \quad (A \cdot T)_i = A_j T_{ji}$$

のように定義され、これはベクトルになります。よって例えば、

$$B \cdot T \cdot A = B_i T_{ij} A_j$$

です。これは行列記法における $B^T T A$ を意味します。

(余談) テンソル積は多くの教科書で \otimes のような記号で表されます。すなわち、 $(A \otimes B)_{ij} = A_i B_j$ 。しかしながら、テンソル積と内積が結合則を持つことに注意すると、ここでの記法の方が便利です。例えば多くの教科書で $(A \otimes B)(C) = (B \cdot C)A$ のように書かれる公式は、ここでの記法では $(A B) \cdot C = A(B \cdot C) = A B \cdot C$ という結合則になり、ことさら覚えておく必要はないわけです。

1.12 外積とスカラー3重積

3次元のユークリッド空間を考えると、2つのベクトル A, B に対し、

$$\begin{aligned} (\mathbf{A} \times \mathbf{B})_i &= \epsilon_{ijk} A_j B_k \\ &= (A_2 B_3 - A_3 B_2, A_3 B_1 - A_1 B_3, A_1 B_2 - A_2 B_1)_i \end{aligned}$$

は(軸性)ベクトルになります。これを2つのベクトルの外積といいます。外積は反可換な積になります：

$$\mathbf{B} \times \mathbf{A} = -\mathbf{A} \times \mathbf{B}.$$

適当な回転変換により、 $\mathbf{A} = (|\mathbf{A}|, 0, 0)$, $\mathbf{B} = (|\mathbf{B}| \cos \theta, |\mathbf{B}| \sin \theta, 0)$ とでき、 θ は2つのベクトルの成す角度です。このとき $\mathbf{A} \times \mathbf{B} = (0, 0, |\mathbf{A}| |\mathbf{B}| \sin \theta)$ がわかるので、一般に、

$\mathbf{A} \times \mathbf{B}$ は \mathbf{A} と \mathbf{B} の両方に直交し、大きさが $|\mathbf{A}| |\mathbf{B}| \sin \theta$ のベクトル

ということになります。特にその方向は、 $0 < \theta < \pi$ で、かつ、3次元デカルト座標が右手系の場合、 \mathbf{A} から \mathbf{B} の方向に回したときに右ねじが進む方向になります。これを右ねじの規則と呼びます(図1.7)。

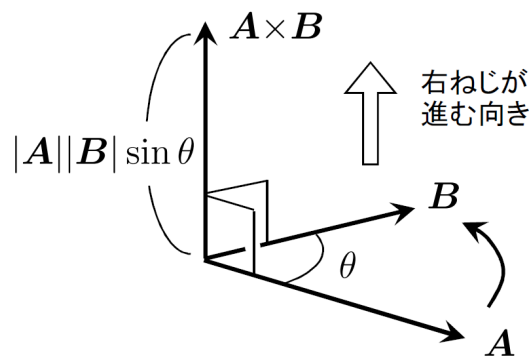


図 1.7: 外積の向き

3つのベクトル A, B, C に対して、

$$[\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}] = \mathbf{A} \cdot (\mathbf{B} \times \mathbf{C}) = \epsilon_{ijk} A_i B_j C_k = \det \begin{pmatrix} A_1 & A_2 & A_3 \\ B_1 & B_2 & B_3 \\ C_1 & C_2 & C_3 \end{pmatrix}$$

は(擬)スカラーになります。これをスカラー3重積といいます。これはサイクリック対称性：

$$[\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}] = [\mathbf{C}, \mathbf{A}, \mathbf{B}] = [\mathbf{B}, \mathbf{C}, \mathbf{A}]$$

を持つことがわかります。

外積の計算においては、しばしば、

$$\epsilon_{ijk}\epsilon_{ilm} = \delta_{jl}\delta_{km} - \delta_{jm}\delta_{kl}$$

という公式が有用になります。

[証明] $\epsilon_{ijk}\epsilon_{ilm}$ が 0 にならないのは、 $j = l$ かつ $k = m$ または $j = m$ かつ $k = l$ のときなので、 $\epsilon_{ijk}\epsilon_{ilm} = C\delta_{jl}\delta_{km} + D\delta_{jm}\delta_{kl}$ と表すことができますが、さらにこれは l, m について反対称なので、 $\epsilon_{ijk}\epsilon_{ilm} = C(\delta_{jl}\delta_{km} - \delta_{jm}\delta_{kl})$ 。ここで例えば $j = l = 2, k = m = 3$ とおけば $C = 1$ と定まり、与題が得られます。(同様に考えて一般に $\epsilon_{i_1 \dots i_N j k} \epsilon_{i_1 \dots i_N l m} = N! (\delta_{jl}\delta_{km} - \delta_{jm}\delta_{kl})$ がわかります。) [証明終]

例えばこれを用いると、

$$\mathbf{A} \times (\mathbf{B} \times \mathbf{C}) = \mathbf{A} \cdot \mathbf{C} \mathbf{B} - \mathbf{A} \cdot \mathbf{B} \mathbf{C}$$

が次のようにして確かめられます。

$$\begin{aligned} (\mathbf{A} \times (\mathbf{B} \times \mathbf{C}))_i &= \epsilon_{ijk} A_j (\mathbf{B} \times \mathbf{C})_k = \epsilon_{ijk} A_j \epsilon_{klm} B_l C_m = \epsilon_{kij} \epsilon_{klm} A_j B_l C_m \\ &= (\delta_{il}\delta_{jm} - \delta_{im}\delta_{jl}) A_j B_l C_m = A_j B_i C_j - A_j B_j C_i = (\mathbf{A} \cdot \mathbf{C} \mathbf{B} - \mathbf{A} \cdot \mathbf{B} \mathbf{C})_i. \end{aligned}$$

このため前者の公式だけ覚えておけば、後者のような式をいちいち覚えておく必要はありません。

1.13 無限小角度ベクトル

3次元ユークリッド空間において、任意の図形をある軸において無限小角度 $d\theta$ だけ回転し、この回転で右ねじが進む方向の単位ベクトルを \mathbf{n} とします。このとき、

$$d\theta = d\theta \mathbf{n}$$

で無限小角度ベクトルを定義します。

無限小角度ベクトルが $d\theta = d\theta \mathbf{n}$ で与えられる無限小回転によって、ベクトル \mathbf{A} が \mathbf{A}' に変化したとすると、その変分 $d\mathbf{A} = \mathbf{A}' - \mathbf{A}$ は、大きさが $|\mathbf{A}| \sin \phi d\theta$ で、方向が $\mathbf{n} \times \mathbf{A}$ と同じなので(図1.8)、

$$\begin{aligned} d\mathbf{A} &= |\mathbf{A}| \sin \phi d\theta \frac{\mathbf{n} \times \mathbf{A}}{|\mathbf{n} \times \mathbf{A}|} = |\mathbf{A}| \sin \phi d\theta \frac{\mathbf{n} \times \mathbf{A}}{|\mathbf{A}| \sin \phi} \\ &= d\theta \times \mathbf{A} \end{aligned}$$

と表せます。

このような無限小回転の表現は、特に物理において、角速度ベクトルと関連して重要になります。

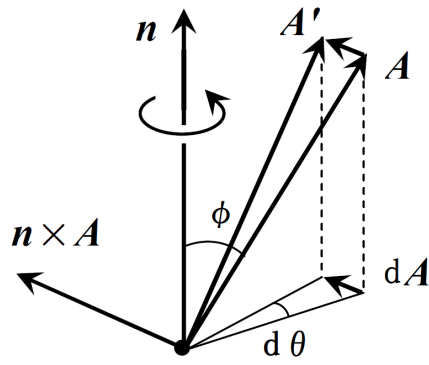


図 1.8: 無限小回転

1.14 座標の接ベクトルと基底

N 次元ユークリッド空間における適当な座標 (一般座標) を ξ_i としたとき、

$$t_i = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \xi_i}$$

をこの座標の接ベクトルといいます。また、接ベクトルの方向ベクトル、

$$e_i = \frac{t_i}{|t_i|}$$

をこの座標の基底といいます。

例えば、2次元ユークリッド空間において、

$$\mathbf{r} = (r \cos \theta, r \sin \theta)$$

で極座標 $\xi_1 = r$, $\xi_2 = \theta$ を定義したとき、その接ベクトルは、

$$t_1 = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial r} = (\cos \theta, \sin \theta), \quad t_2 = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \theta} = (-r \sin \theta, r \cos \theta)$$

となり、 $|t_1| = 1$, $|t_2| = r$ に注意して、基底は、

$$e_1 = (\cos \theta, \sin \theta), \quad e_2 = (-\sin \theta, \cos \theta)$$

となります。極座標とその基底においては、位置ベクトルは $\mathbf{r} = r e_1$ と書けることとなります。 r は動径座標と呼ばれます。

極座標のように基底 e_i が空間の点に依存する座標は曲線座標と呼ばれます。依存しない座標は直線座標と呼ばれます。また、極座標においては $e_1 \cdot e_2 = 0$ がわかりますが、一般に $e_i \cdot e_j = \delta_{ij}$ となる座標は直交座標と呼ばれます。極座標は曲線座標でかつ直交座標だというわけです。デカルト座標は直線座標でかつ直交座標です。

いま、基準となるデカルト座標を x_i , 任意のデカルト座標を $x'_i = \Lambda_{ij}x_j - a_i$ とすると、逆変換が $x_j = \Lambda_{ij}(x'_i + a_i)$ となることに注意して、ダッシュ系の接ベクトルは、

$$(\mathbf{t}'_i)_j = \left(\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial x'_i} \right)_j = \frac{\partial x_j}{\partial x'_i} = \Lambda_{ij}.$$

このとき $\mathbf{t}'_i \cdot \mathbf{t}'_j = \delta_{ij}$ がわかり、特に $|\mathbf{t}'_i| = 1$ なので、ダッシュ系の基底は、

$$(\mathbf{e}'_i)_j = \Lambda_{ij}$$

で与えられます。よって、

$$(A'_i \mathbf{e}'_i)_j = A'_i \Lambda_{ij} = \Lambda_{ik} A_k \Lambda_{ij} = A_j = (\mathbf{A})_j.$$

これは、任意のデカルト座標とその基底において、ベクトル \mathbf{A} を、

$$\mathbf{A} = A_i \mathbf{e}_i$$

と展開できることを意味しています。この基底を用いた表示により、ベクトルを特定のデカルト座標から離脱させ、大きさや方向を持つ量という抽象的な概念として捉えられることに注意してください。

同様に、2階のテンソル T に対し、任意のデカルト座標とその基底において、

$$T = T_{ij} \mathbf{e}_i \mathbf{e}_j$$

であることがいえます。

1.15 体積と面積

3次元ユークリッド空間における体積要素は、デカルト座標を x_i として、

$$d^3 \mathbf{r} = dx_1 \wedge dx_2 \wedge dx_3$$

で定義されます。 \wedge はくさび積 (ウェッジ積) と呼ばれる積演算で、双線形性、および反可換性：

$$dx \wedge dy = -dy \wedge dx$$

を持つものとし、このため例えば、 $dx \wedge dx = 0$ です。微分形式をくさび積により n 個かけわせたものは n 形式と呼ばれます。体積要素 $d^3 \mathbf{r}$ は3形式です。

一般座標を ξ_i とすると、

$$\begin{aligned} d^3 \mathbf{r} &= \frac{\partial x_1}{\partial \xi_i} \frac{\partial x_2}{\partial \xi_j} \frac{\partial x_3}{\partial \xi_k} d\xi_i \wedge d\xi_j \wedge d\xi_k = \epsilon_{ijk} \frac{\partial x_1}{\partial \xi_i} \frac{\partial x_2}{\partial \xi_j} \frac{\partial x_3}{\partial \xi_k} d\xi_1 \wedge d\xi_2 \wedge d\xi_3 \\ &= \det \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \boldsymbol{\xi}} d\xi_1 \wedge d\xi_2 \wedge d\xi_3. \end{aligned}$$

ここで $\det(\partial x/\partial \xi)$ は $\partial x_i/\partial \xi_j$ を成分とする行列の行列式で、ヤコビアンと呼ばれます。ヤコビアンはスカラー 3 重積を用いて、

$$\det \frac{\partial x}{\partial \xi} = \epsilon_{ijk} \frac{\partial x_i}{\partial \xi_1} \frac{\partial x_j}{\partial \xi_2} \frac{\partial x_k}{\partial \xi_3} = \left[\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \xi_1}, \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \xi_2}, \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \xi_3} \right]$$

と表すこともできます。例えば、3つのベクトル $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ で張られる平行六面体の内部は、

$$V = \{ \mathbf{r} \mid \mathbf{r} = \xi_1 \mathbf{a} + \xi_2 \mathbf{b} + \xi_3 \mathbf{c}, 0 \leq \xi_i \leq 1 \}$$

と表されるので、その体積は、

$$\int_V d^3 \mathbf{r} = \int_0^1 d\xi_1 \int_0^1 d\xi_2 \int_0^1 d\xi_3 \left[\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \xi_1}, \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \xi_2}, \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \xi_3} \right] = [\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}]$$

ということになります。

一方、3次元ユークリッド空間における面積要素(2次元的体積要素)は、

$$(d^2 \mathbf{r})_i = \frac{1}{2} \epsilon_{ijk} dx_j \wedge dx_k$$

という2形式で定義されます。面上の一般座標 ξ_i ($i = 1, 2$) においては、

$$(d^2 \mathbf{r})_i = \frac{1}{2} \epsilon_{ijk} \frac{\partial x_j}{\partial \xi_l} \frac{\partial x_k}{\partial \xi_m} d\xi_l \wedge d\xi_m = \left(\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \xi_1} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \xi_2} \right)_i d\xi_1 \wedge d\xi_2$$

と書けます。例えば、2つのベクトル \mathbf{a}, \mathbf{b} で張られる平行四辺形の内部は、

$$S = \{ \mathbf{r} \mid \mathbf{r} = \xi_1 \mathbf{a} + \xi_2 \mathbf{b}, 0 \leq \xi_i \leq 1 \}$$

と表されるので、その面積は、

$$\int_S d^2 \mathbf{r} = \int_0^1 d\xi_1 \int_0^1 d\xi_2 \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \xi_1} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \xi_2} = \mathbf{a} \times \mathbf{b}$$

というベクトルになります。通常、面積と呼ばれるのは、このベクトルの大きさで、それはスカラーになります。

一般に N 次元ユークリッド空間においては、デカルト座標を x_i として、 N 次元体積要素は、

$$\begin{aligned} d^N \mathbf{r} &= \frac{1}{N!} \epsilon_{i_1 i_2 \dots i_N} dx_{i_1} \wedge dx_{i_2} \wedge \dots \wedge dx_{i_N} \\ &= dx_1 \wedge dx_2 \wedge \dots \wedge dx_N \end{aligned}$$

で定義され、これは合同変換に対し擬スカラーとみなせます。一方、 $(N-1)$ 次元体積要素は、

$$(d^{N-1} \mathbf{r})_i = \frac{1}{(N-1)!} \epsilon_{i i_2 \dots i_N} dx_{i_2} \wedge \dots \wedge dx_{i_N}$$

で与えられ、これは軸性ベクトルとみなせます。同様にして、 $(N-2)$ 次元体積要素は2階の反対称擬テンソル、 $(N-3)$ 次元体積要素は3階の完全反対称擬テンソルとみなせます。完全反対称テンソルにレビ・チビタを乗じ作ったテンソルを元のテンソルの双対などと呼びますが、一般に体積要素はデカルト座標の微分形式の双対として定義されるわけです。

(余談) $dx \wedge dy$ を単に $dx dy$ と略記することが多いです。その場合でも dx と dy の積は本当はくさび積であり、反可換の積であるということを忘れてはいけません。すなわち $dx dy = -dy dx$. 大学で初めてくさび積について学ぶと何か抽象的で得体の知れない感覚に陥りますが、このようなことは実は“義務教育で習ったか習っていないか”に依るところが大きいといえます。義務教育で習えば、例えば $(-1) \times (-1) = 1$ もすんなり認めてしまい、当たり前だと思ってしまうわけです。整数や四則演算の定義は、数学基礎論や算術の教科書を見ればわかるように、実はあまり簡単でないにもかかわらずです。

1.16 3次元極座標と球の計量

3次元ユークリッド空間において、

$$\begin{aligned} \mathbf{r} &= (r \sin \theta \cos \phi, r \sin \theta \sin \phi, r \cos \theta), \\ 0 \leq r < \infty, \quad 0 \leq \theta \leq \pi, \quad 0 \leq \phi \leq 2\pi \end{aligned}$$

で3次元極座標 r, θ, ϕ を定義します (図 1.9)。これは3次元ユークリッド空間の全てを覆う座標になっています。

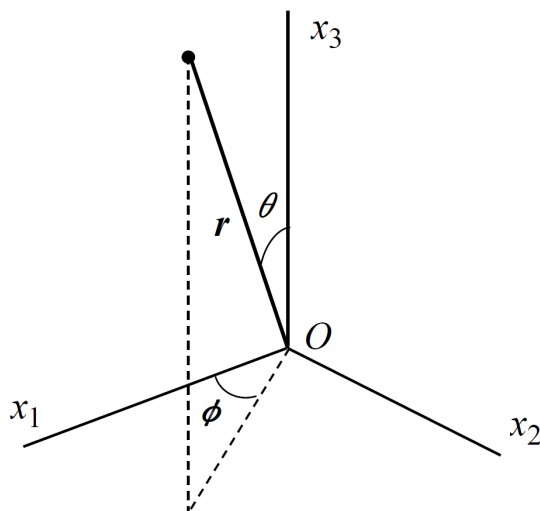


図 1.9: 3次元極座標

このとき、 $|\mathbf{r}| = r$. また、

$$\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial r} = (\sin \theta \cos \phi, \sin \theta \sin \phi, \cos \theta) = \frac{\mathbf{r}}{r},$$

$$\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \theta} = (r \cos \theta \cos \phi, r \cos \theta \sin \phi, -r \sin \theta),$$

$$\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \phi} = (-r \sin \theta \sin \phi, r \sin \theta \cos \phi, 0)$$

ですから、

$$\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \theta} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \phi} = (r^2 \sin^2 \theta \cos \phi, r^2 \sin^2 \theta \sin \phi, r^2 \sin \theta \cos \theta) = r \sin \theta \mathbf{r},$$

$$\left[\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial r}, \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \theta}, \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \phi} \right] = \frac{\mathbf{r}}{r} \cdot (r \sin \theta \mathbf{r}) = r^2 \sin \theta$$

がわかります。

そうすると、例えば、半径 R の球の体積は、

$$\int_{\text{球内部}} d^3 \mathbf{r} = \int_0^R dr \int_0^\pi d\theta \int_0^{2\pi} d\phi \left[\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial r}, \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \theta}, \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \phi} \right]$$

$$= \int_0^R dr \int_0^\pi d\theta \int_0^{2\pi} d\phi r^2 \sin \theta = \frac{4}{3} \pi R^3.$$

一方、表面積は、

$$\int_{\text{球表面}} |d^2 \mathbf{r}| = \int_0^\pi d\theta \int_0^{2\pi} d\phi \left| \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \theta} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \phi} \right|_{r=R}$$

$$= \int_0^\pi d\theta \int_0^{2\pi} d\phi R^2 \sin \theta = 4\pi R^2$$

となることがわかります。

1.17 ナブラとラプラシアン

デカルト座標 x_i による偏微分演算子 $\partial_i = \partial/\partial x_i$ は、合同変換に対して、

$$\partial'_i = \frac{\partial}{\partial x'_i} = \frac{\partial x_j}{\partial x'_i} \frac{\partial}{\partial x_j} = \Lambda_{ij} \partial_j$$

と変換されるのでベクトルです。この偏微分演算子をベクトルの記法で ∇ と書いてナブラと呼びます。すなわち、

$$(\nabla)_i = \partial_i.$$

スカラー場 $\phi(\mathbf{r})$ に関して、ベクトル場 $\nabla \phi(\mathbf{r})$ をその勾配といいます。また、ベクトル場 $\mathbf{A}(\mathbf{r})$ に関して、スカラー場 $\nabla \cdot \mathbf{A}(\mathbf{r})$ をその発散といいます。さらに、

特に3次元ユークリッド空間においては、(軸性)ベクトル場 $\nabla \times \mathbf{A}(\mathbf{r})$ を $\mathbf{A}(\mathbf{r})$ の回転といいます^(*)。

一方、

$$\Delta = \nabla \cdot \nabla = \partial_i \partial_i = \left(\frac{\partial}{\partial x_1} \right)^2 + \left(\frac{\partial}{\partial x_2} \right)^2 + \cdots + \left(\frac{\partial}{\partial x_N} \right)^2$$

はラプラシアンと呼ばれます。これは合同変換に対して不変な微分演算子になります。

(*注) ϕ を標高を表す場と考えたとき、 $\nabla \phi$ は地形の勾配を表すベクトル場になっています。また、 \mathbf{A} を流速のベクトル場と考えたとき、 $\nabla \cdot \mathbf{A}$ は各場所でどれだけ流体が湧き出しているか、その度合いを表すスカラー場になっています。 $\nabla \times \mathbf{A}$ はベクトル場 \mathbf{A} が各場所でどれだけ渦巻いているか、その度合いを表すベクトル場になっています。これらの事柄は次で紹介するガウスの定理やストークスの定理によってより具体的にわかるでしょう。文献によっては、

$$\text{grad } \phi = \nabla \phi, \quad \text{div } \mathbf{A} = \nabla \cdot \mathbf{A}, \quad \text{rot } \mathbf{A} = \text{curl } \mathbf{A} = \nabla \times \mathbf{A}$$

という表記もよく用いられます。英語で、gradient は勾配、divergence は発散、rotation は回転を意味します。curl は、巻き毛にする、渦巻き状に丸めるという意味です。

1.18 外微分とストークスの定理

一般に N 次元空間 (計量空間でなくてもよい) において、任意の n 次元領域を V , その境界の $(n-1)$ 次元閉領域を ∂V , 任意の $(n-1)$ 形式を α としたとき、

$$\int_{\partial V} \alpha = \int_V d\alpha$$

という、極めてシンプルな定理が成り立ちます。これをストークスの定理といいます。ここで d は外微分 (演算子) で、これは微分を表す記号 d を拡張したものです。外微分は、線形性、及び次の性質を持つものとします：

$$d\phi = \frac{\partial \phi}{\partial \xi_i} d\xi_i, \quad d^2 = 0, \quad d(\alpha \wedge \beta) = d\alpha \wedge \beta + (-1)^s \alpha \wedge d\beta.$$

(ここで ϕ は 0 形式、 α は s 形式、 $s \geq 0$)

ストークスの定理の証明は以下の通りです。少し難しいのでじっくり読む必要があります。

[証明] まず、任意の向き付けられた曲線を C とし、その始点を A , 終点を B とすると、空間上の任意の関数 (0 形式) ϕ に対し、 $\int_C d\phi = \phi(B) - \phi(A)$ ですから、

$$\int_{\partial C} \phi = \phi(B) - \phi(A)$$

と定義することで、 $n = 1$ の場合のストークスの定理が成立します。これは初等的にはあまり見かけない表記法なので注意してください。

次に $n \geq 2$ の場合ですが、 n 次元の可縮領域 V とその境界 ∂V が、

$$\begin{aligned} V &= \{ (\xi_1, \dots, \xi_N) \mid 0 \leq \xi_1 \leq 1, -\pi \leq \xi_p \leq \pi, \xi_q = 0 \} \\ \partial V &= \{ (\xi_1, \dots, \xi_N) \mid \xi_1 = 1, -\pi \leq \xi_p \leq \pi, \xi_q = 0 \} \\ &\quad (\text{ただし } p = 2, \dots, n, \quad q = n+1, \dots, N) \end{aligned}$$

となるように一般座標 ξ_i を選びます。ただし、各々の ξ_1 の値に対し、いずれかの p について $\xi_p = \pi$ または $\xi_p = -\pi$ となる点は全て同一とします。このような座標を領域 V の葉層座標といいます^(*)。このとき $(n-1)$ 形式、

$$\alpha = \xi_1^k f(\xi_2, \dots, \xi_N) d\xi_2 \wedge \dots \wedge d\xi_n \quad (k = 0, 1, 2, \dots)$$

に対し、

$$d\alpha = k\xi_1^{k-1} f(\xi_2, \dots, \xi_N) d\xi_1 \wedge d\xi_2 \wedge \dots \wedge d\xi_n + (d\xi_q \text{ を含む項})$$

ですから、 $\int_{\partial V} \alpha$ および $\int_V d\alpha$ は、共に $\int f(\xi_2, \dots, \xi_n) d\xi_2 \wedge \dots \wedge d\xi_n$ となり、定理が成立します。ただし $k = 0$ のときは $k = \epsilon \rightarrow +0$ という極限として理解します。一方、 α に $d\xi_1$ や $d\xi_q$ が含まれる場合は、 $\int_{\partial V} \alpha$ および $\int_V d\alpha$ は共に 0 となるので、やはり定理が成り立ちます。

以上の事柄と、 $\int_{\partial V} \alpha$ および $\int_V d\alpha$ が線形性を持つことから、任意の(多項式的な) $(n-1)$ 形式 α と可縮領域 V に対して定理が成立します。 V が可縮でない場合は、複数の可縮領域の連結を考えることで、やはり定理が成り立ちます。[証明終]

(*注) 正方形の4辺を全て1点に縮めると、正方形の内部は球面のようになるでしょう。風呂敷で物を包む様子をイメージしてください。一般に、 n 次元超立方体の境界を1点に縮めたものは n 次元超球面 (S^n) と大域的に同相です。よって ∂V は S^{n-1} と同相です。例えば、2次元ユークリッド空間の極座標 r, θ に対し、 $\xi_1 = r/R, \xi_2 = \theta$ で定義される座標は、原点を中心とする半径 R の円に対する葉層座標になります。また、3次元ユークリッド空間の極座標 r, θ, ϕ に対し、 $\xi_1 = r/R, \xi_2 = 2 \arctan(\tan(\theta/2) \cos \phi), \xi_3 = 2 \arctan(\tan(\theta/2) \sin \phi)$ で定義される座標は、原点を中心とする半径 R の球に対する葉層座標になります。ここで \arctan は \tan の逆関数です。

1.19 ガウスの定理

3次元ユークリッド空間においては、空間上の任意の関数(0形式)を $\phi = \phi(\mathbf{r})$ として、

$$d\phi = dx_i \partial_i \phi,$$

$$d(dx_i \phi) = -dx_i \wedge d\phi = -dx_i \wedge dx_j \partial_j \phi = -\epsilon_{ijk} d^2 x_k \partial_j \phi = \epsilon_{ikj} d^2 x_k \partial_j \phi,$$

$$\begin{aligned}
d(d^2x_i\phi) &= d^2x_i \wedge d\phi = \frac{1}{2} \epsilon_{ijk} dx_j \wedge dx_k \wedge dx_l \partial_l \phi \\
&= \frac{1}{2} \epsilon_{ijk} \epsilon_{jkl} dx_1 \wedge dx_2 \wedge dx_3 \partial_l \phi = \delta_{il} d^3x \partial_l \phi = d^3x \partial_i \phi.
\end{aligned}$$

ここで、 $d^3x = d^3\mathbf{r}$, $d^2x_i = (d^2\mathbf{r})_i$ です。また、面積要素の定義からすぐにわかる関係式、 $dx_i \wedge dx_j = \epsilon_{ijk} d^2x_k$ を用いました。

よってストークスの定理は、1次元領域 C , 2次元領域 S , 3次元領域 V に対し、積分演算子の関係式として、

$$\int_{\partial C} = \int_C d\mathbf{r} \cdot \nabla, \quad \int_{\partial S} d\mathbf{r} = \int_S d^2\mathbf{r} \times \nabla, \quad \int_{\partial V} d^2\mathbf{r} = \int_V d^3\mathbf{r} \nabla$$

を与えます。2番目の式はやはりストークスの定理と呼ばれ、3番目の式はガウスの定理と呼ばれます。

ここで境界 ∂S の向きですが、図 1.10 左のように葉層座標を取ると、面 S の面積要素 $(\partial\mathbf{r}/\partial\xi_1) \times (\partial\mathbf{r}/\partial\xi_2) d\xi_1 \wedge d\xi_2$ は図の上向きとなり、 S と ∂S の関係は右ねじの規則により与えられることがわかります。一方、 ∂V の向きは、図 1.10 右のように葉層座標を取ること、 V の体積要素は(右手系の場合)正となり、このとき、 ∂V の面積要素 $(\partial\mathbf{r}/\partial\xi_2) \times (\partial\mathbf{r}/\partial\xi_3) d\xi_2 \wedge d\xi_3$ は領域 V から外向きということになります。

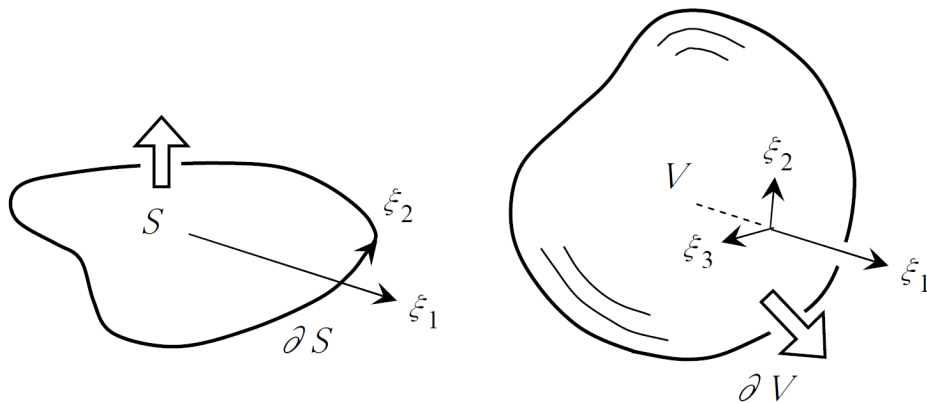


図 1.10: 境界の向き

特に上のストークスの定理をベクトル場 \mathbf{A} に適用すると、

$$\int_{\partial S} d\mathbf{r} \cdot \mathbf{A} = \int_S (d^2\mathbf{r} \times \nabla) \cdot \mathbf{A}$$

ですが、

$$(d^2\mathbf{r} \times \nabla) \cdot \mathbf{A} = \epsilon_{ijk} d^2x_j \partial_k A_i = \epsilon_{jki} d^2x_j \partial_k A_i = d^2\mathbf{r} \cdot (\nabla \times \mathbf{A})$$

に注意して、

$$\int_{\partial S} d\mathbf{r} \cdot \mathbf{A} = \int_S d^2\mathbf{r} \cdot (\nabla \times \mathbf{A}).$$

また、ガウスの定理を同じくベクトル場 A に適用すると、

$$\int_{\partial V} d^2\mathbf{r} \cdot \mathbf{A} = \int_V d^3\mathbf{r} \nabla \cdot \mathbf{A}$$

を与えます。初等的にはこれら 2 式が、ストークスの定理、およびガウスの定理として広く知られていて、物理においては連続体力学や電磁気学において多用され、重要です。

[例題] 四面体、

$$V = \left\{ \mathbf{r} \mid \mathbf{r} = (x, y, z), x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0, \frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} \leq 1 \right\}$$

において $\int_V d^3\mathbf{r} \nabla \cdot \mathbf{r}$ および $\int_{\partial V} d^2\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}$ をそれぞれ計算し、等しくなることを確かめよ。ただし a, b, c は正の定数。(ガウスの定理の確認。)

[解] $\nabla \cdot \mathbf{r} = \partial_i x_i = \delta_{ii} = 3$. また V は、

$$V = \left\{ \mathbf{r} \mid \mathbf{r} = (x, y, z), 0 \leq x \leq a, 0 \leq y \leq b \left(1 - \frac{x}{a}\right), 0 \leq z \leq c \left(1 - \frac{x}{a} - \frac{y}{b}\right) \right\}$$

と表せることに注意すると、

$$\int_V d^3\mathbf{r} \nabla \cdot \mathbf{r} = 3 \int_0^a dx \int_0^{b(1-x/a)} dy \int_0^{c(1-x/a-y/b)} dz = \frac{abc}{2}.$$

一方、原点を通る平面における位置ベクトル \mathbf{r} の面積分が 0 になることに注意すると、 $\int_{\partial V} d^2\mathbf{r} \cdot \mathbf{r} = \int_S d^2\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}$. ここで、

$$\begin{aligned} S &= \left\{ \mathbf{r} \mid \mathbf{r} = (x, y, z), x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0, \frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1 \right\} \\ &= \left\{ \mathbf{r} \mid \mathbf{r} = \left(x, y, c \left(1 - \frac{x}{a} - \frac{y}{b}\right)\right), 0 \leq x \leq a, 0 \leq y \leq b \left(1 - \frac{x}{a}\right) \right\}. \end{aligned}$$

また、この平面 S 上において、

$$\left(\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial x} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial y} \right) \cdot \mathbf{r} = \left(\left(1, 0, -\frac{c}{a}\right) \times \left(0, 1, -\frac{c}{b}\right) \right) \cdot \left(x, y, c \left(1 - \frac{x}{a} - \frac{y}{b}\right)\right) = c$$

なので、

$$\int_{\partial V} d^2\mathbf{r} \cdot \mathbf{r} = \int_S d^2\mathbf{r} \cdot \mathbf{r} = \int_S dx \wedge dy \left(\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial x} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial y} \right) \cdot \mathbf{r} = c \int_0^a dx \int_0^{b(1-x/a)} dy = \frac{abc}{2}.$$

よって両式は確かに等しい。[解終]

(余談) 初等的なガウスの定理やストークスの定理に限っていえば、もう少し直接的に導出することもできますが、ここでは一般的なストークスの定理から演繹しました。初学者には少し難しいかもしれませんが、3次元のみ知っていて、一般次元においてどうなるのかわからないというのも気持ち悪いことだと思うので、頑張ってフォローしてください。

索引

あ	
位置ベクトル	10
一般座標	19
ウェッジ積	20
円周率	13
か	
カーテシアン座標	3
外積	17
回転	24
回転変換	9
外微分	24
ガウスの定理	26
角度	12
加法定理	15
完全反対称性	4
擬スカラー	11
基底	19
擬テンソル	11
逆行列	7
行列式	6
極座標	19, 22
曲線座標	19
距離	3
空間	3
くさび積	20
クロネッカーデルタ	4
形式	20
計量空間	3
合同	9
合同変換	9
勾配	23
さ	
サイクリック対称性	5
座標	3
三角関数	13
三平方の定理	14
軸性ベクトル	11
縮約規則	3
スカラー	10
スカラー 3 重積	17
スケール変換	9
ストークスの定理	24, 26
正則行列	7
積の定理	11
接ベクトル	19
零ベクトル	12
全微分	5
相似	9
相似変換	9
双対	22
た	
体積要素	20
多様体	3
単位ベクトル	12
直線座標	19
直角	13
直交	13
直交行列	9
直交座標	19
直交変換	9
デカルト座標	3
テンソル	11
テンソル積	16
転置行列	6
動径座標	19
な	
内積	12
ナブラ	23
ノルム	12
は	
倍角公式	15
発散	23
パリティ	9
半角公式	15
反転	9
反平行	13
ピグマリオン症	10
ピタゴラスの定理	14
左手系	9

微分形式	5
非ユークリッド空間	3
平行	13
並進変換	8
ベクトル	10
変位	3
変位ベクトル	10
偏微分	5
方向ベクトル	12
<hr/>	
ま	
右手系	9
右ねじの規則	17
無限小角度ベクトル	18
面積要素	21
<hr/>	
や	
ヤコビアン	21
ユークリッド幾何学	3
ユークリッド空間	3
余因子	7
余因子行列	7
余因子展開	8
葉層座標	25
余弦定理	14
<hr/>	
ら	
ラプラシアン	24
零ベクトル	12
レビ・チビタ	4
ロピタルの定理	16