

# あもんノート

ユークリッド幾何学、ニュートン力学から、相対論、量子論、素粒子論、宇宙論、そして超ひも理論まで、理論物理学を簡潔にかつ幅広く網羅したノートです。TOP へは下の URL をクリックして行けます。専用の画像掲示板で、ご意見、ご質問等も受け付けております。

<http://amonphys.web.fc2.com/>

# 目次

第 18 章 素粒子論	3
18.1 崩壊とニュートリノ	3
18.2 弱い相互作用とパリティの破れ	4
18.3 強い相互作用と $\pi$ 粒子、 $\mu$ 粒子	6
18.4 クォークモデルと量子色力学	8
18.5 バリオンの分類	10
18.6 メソンの分類と質量の起源	12
18.7 カビボ角と小林益川行列	15
18.8 素粒子標準模型	17
18.9 ウィークボゾン	20
18.10 レプトンの相互作用	22
18.11 質量行列とその対角化	24
18.12 ニュートリノ振動	25
18.13 クォークの相互作用	26
18.14 CP の破れ	28
18.15 ヒッグス粒子	29
18.16 1 重項ヒッグス場の導入	31
18.17 さらなる統一	34

## 第18章 素粒子論

重力を除く3つの相互作用、電磁相互作用、弱い相互作用、強い相互作用は1つゲージ理論で記述することができ、素粒子標準模型と呼ばれます。ここではそれをある程度わかりやすく説明するために、弱い相互作用、強い相互作用、クォークモデル、世代混合の説明を順に行い、その後、標準模型について説明します。

### 18.1 崩壊とニュートリノ

— 物質は原子から成る。原子は原子核と電子から成る。原子核は陽子と中性子から成る。つまり物質は陽子 ( $p$ ) と中性子 ( $n$ ) と電子 ( $e$ ) から成る。一方、電磁場は光子 ( $\gamma$ ) の集まりであり、電磁力とはつまるところ光子のやりとりのことである。—

というように、かつての素粒子論はシンプルでした (図 18.1)。

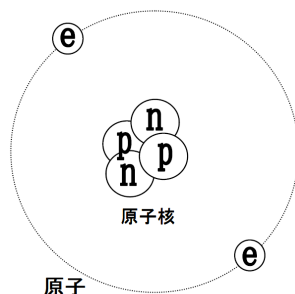


図 18.1: 原子の模式図

1930年、中性子の崩壊:

$$n \rightarrow pe\bar{\nu}_e$$

におけるエネルギー保存の考察から、パウリによりニュートリノ (中性微子)  $\nu_e$  の存在が予見されるようになりました。ここで  $\bar{\nu}_e$  はニュートリノ  $\nu_e$  の反粒子を意味します。

当時知られていた素粒子を表にまとめておきます。 $O(3,1)$  の欄はローレンツ変換に対する表現で、4 は4元ベクトル、2 は2スピノル (右手型ディラック場)、 $2^*$  は  $2^*$  スピノル (左手型ディラック場)、 $2+2^*$  は完全なディラック場を意味します。また電荷は素電荷を単位とした数値を意味します。

名称	記号	$O(3, 1)$	電荷	質量 (MeV)	寿命 (sec)
光子 (電磁場)	$\gamma$	4	0	0	安定
陽子	$p$	$2 + 2^*$	+1	938.272	安定
中性子	$n$	$2 + 2^*$	0	939.565	$9E2 (p\bar{\nu}_e)$
電子	$e$	$2 + 2^*$	-1	0.510999	安定
ニュートリノ	$\nu_e$	$2^*$	0	0?	安定?

ニュートリノは電荷が 0 で、電磁相互作用をしないため、非常に透過性が強く、観測されにくい粒子です。それゆえかつてはこの表のように質量 0 で左手型だけと考えられていました。しかし現在では、おそらく右手型も存在し、質量を持つと考えられています。詳しくは後で説明します。

(余談)  $\beta$  崩壊の式から、中性子を、陽子、電子、反ニュートリノの複合粒子であると考えるのが自然に思われるかもしれませんが、その場合、これら 3 つの粒子を小さい領域に閉じ込める力が必要です。しかしそうすると、例えば中性子が単独に存在したときに、なぜそれが自然に崩壊するのか説明するのは難しいでしょう。

## 18.2 弱い相互作用とパリティの破れ

$\beta$  崩壊は弱い相互作用によるもので、弱い相互作用は比較的低エネルギーにおいては次のラグランジアン密度で記述されます。

$$\mathcal{L}_{\text{Fermi}} = -\frac{G_F}{\sqrt{2}} J_\mu^* J^\mu, \quad J^\mu = \bar{n}\gamma^\mu(a - b\gamma_5)p + \bar{e}\gamma^\mu(1 - \gamma_5)\nu_e.$$

このモデルを 4 フェルミ型、あるいはカレント-カレント型といいます。ファインマングラフにおいては、4 つのフェルミオンの伝播関数を繋ぐ頂点の存在を意味し、図 18.2 に示すような 4 種が存在することになります。

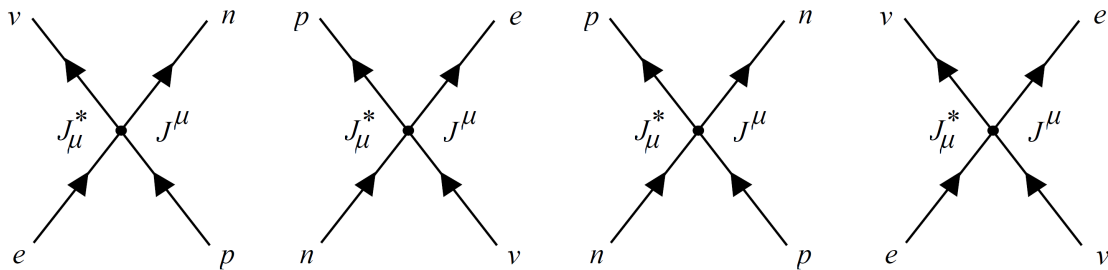


図 18.2: 4 フェルミ型の頂点

$G_F$  はフェルミの結合定数で、実験値は、

$$G_F \sim 1.166 \times 10^{-11} \text{ MeV}^{-2}$$

です。  $J^\mu$  は荷電カレントと呼ばれ、陽子と中性子がペアになり、電子とニュートリノがペアになる形で、電荷が +1 になるよう作られています。

陽子と中性子をバリオンといい、電子とニュートリノをレプトンといいます。そうすると弱い相互作用は、電荷はもちろんのこと、バリオン数やレプトン数も保存することがわかるでしょう。このとき反粒子は -1 で数えます。

一方、  $a, b$  は構造定数と呼ばれる定数で、実験からおおよそ、

$$a \sim 0.98, \quad b \sim 1.25$$

です。レプトン部分が正確に  $\gamma^\mu(1-\gamma_5)$  という V-A 型 (ベクトルと軸性ベクトルの 1:1 混合) に対して、バリオン部分はそうなっていません。これは実はバリオンがクォークの複合粒子だからです。クォークのレベルでは正確な V-A 型だろうと考えられています。V-A 型はディラック場に含まれる左手型のスピノルだけ抜き出すことに注意してください。弱い相互作用は、どういうわけか、左手型にだけ作用するのです。いわゆるパリティの破れです (楊・李 1956)。

実際、ディラック場のパリティ変換は  $\psi^P = \gamma^0\psi$  ( $\therefore \bar{\psi}^P = \bar{\psi}\gamma^0$ ) であったので、

$$\begin{aligned} (\bar{\psi}_1\gamma^\mu(a-b\gamma_5)\psi_2)^P &= \bar{\psi}_1\gamma^0\gamma^\mu(a-b\gamma_5)\gamma^0\psi_2 \\ &= \bar{\psi}_1\gamma^0\gamma^\mu\gamma^0(a+b\gamma_5)\psi_2 = \bar{\psi}_1\gamma_\mu(a+b\gamma_5)\psi_2. \end{aligned}$$

よって 4 フェルミ型の弱い相互作用はパリティを破ります。しかし一方、CP 変換  $\psi^{CP} = i\gamma^0\gamma^2\psi^*$  ( $\therefore \bar{\psi}^{CP} = -i\bar{\psi}^*\gamma^2\gamma^0$ ) に対しては、

$$\begin{aligned} (\bar{\psi}_1\gamma^\mu(a-b\gamma_5)\psi_2)^{CP} &= \bar{\psi}_1^*\gamma^2\gamma^0\gamma^\mu(a-b\gamma_5)\gamma^0\gamma^2\psi_2^* \\ &= \bar{\psi}_1^*\gamma^2\gamma^0\gamma^\mu\gamma^0\gamma^2(a-b\gamma_5)\psi_2^* \\ &= \bar{\psi}_1^*\gamma_\mu^*(a-b\gamma_5)\psi_2^* = -(\bar{\psi}_1\gamma_\mu(a-b\gamma_5)\psi_2)^* \end{aligned}$$

となるので、4 フェルミ型は CP 不変です。グラスマン数  $\alpha, \beta$  に対し、 $(\alpha\beta)^* = \beta^*\alpha^* = -\alpha^*\beta^*$  であることに注意してください。このため最後の変形でマイナス符号が付きます。

中性子は単独で存在した場合、弱い相互作用により約 15 分で壊れます：

$$n \rightarrow pe\bar{\nu}_e.$$

寿命の計算は素粒子論の計算の章を参照してください。ここでは、電荷、バリオン数、レプトン数が保存していることに注意して下さい。これらの保存則は現在の理解においてもほぼ<sup>(\*)</sup>正しく、素粒子反応過程の可能不可能性を理解するのに重要です。例えば陽子が安定なのは、陽子をもっとも質量の小さいバリオンだからです。また、電子が安定なのは、電荷を持つ素粒子の中で、もっとも質量が小さいからです。

(\*注) “ほぼ” といったのは、大統一理論においてはバリオン数とレプトン数の保存則が破れるからです。標準模型においてもスファレロンと呼ばれるトポロジカルな解を経由することにより、ほんのわずかですが保存則の破れる可能性が考えられています。しかしいまだそのような現象は見つかっていません。

### 18.3 強い相互作用と 粒子、 $\mu$ 粒子

陽子と中性子は結合して原子核を作るわけですが、この結合の力は核力と呼ばれます。これは主に  $\pi$  粒子と呼ばれるスカラー粒子を媒介することにより生じる力です(湯川 1935)。

陽子、中性子、 $\pi$  粒子において生じる相互作用は強い相互作用と呼ばれます。そのラグランジアン密度は、

$$\mathcal{L}_{\text{Yukawa}} = ig_N \bar{N} \gamma_5 \Pi N, \quad N = \begin{pmatrix} p \\ n \end{pmatrix}, \quad \Pi = \begin{pmatrix} \pi^0 & \sqrt{2}\pi \\ \sqrt{2}\pi^* & -\pi^0 \end{pmatrix}$$

という湯川型で記述されます。 $g_N \sim 10$  は結合定数、 $\pi^0$  は中性  $\pi$  粒子の場(実擬スカラー場)、 $\pi$  は荷電  $\pi$  粒子の場(複素擬スカラー場)を意味します。

電荷の有無を別にすると、陽子と中性子は強い相互作用の性質がよく似ているため(荷電独立性)、陽子と中性子を混合する  $U(2)$  (2次ユニタリ変換)について対称な模型になっています。これはハイゼンベルグのアイディアに基づいています。実際、上のラグランジアン密度は、

$$N' = UN, \quad \Pi' = U\Pi U^\dagger \quad \text{ここで } U \in U(2)$$

に関して不変です。

強い相互作用により、

$$p \longleftrightarrow n\pi^+, \quad n \longleftrightarrow p\pi^-, \quad p \longleftrightarrow p\pi^0, \quad n \longleftrightarrow n\pi^0$$

といった遷移が起こり、これが陽子と中性子を結びつけ、原子核を作っていると考えられるわけです。 $\pi^-$  は  $\pi^+$  の反粒子です。

核力の到達距離はおよそ原子核のスケールのはずですから、 $\pi$  粒子の質量はおよそ 100MeV と考えられます。そして、およそその質量で  $\pi$  粒子は見つかったのですが、その観測過程で別の粒子も見つかってしまいました。

$\mu$  粒子です。 $\mu$  粒子は電子とよく似ていて、相棒の  $\mu$  ニュートリノもいます。すなわち新しいレプトンです。当時の物理学者の嘆きは、「誰が注文した?」という言葉に集約されています。しかしこのような素粒子の重複は世代構造と呼ばれ、実は3世代あります。 $\mu$  粒子は2世代目の電子と考えられます。

名称	記号	$O(3, 1)$	電荷	質量 (MeV)	寿命 (sec)
荷電 $\pi$ 粒子	$\pi^+$	$1_C^-$	+1	139.571	$2.60\text{E-}8$ ( $\bar{\mu}\nu_\mu$ )
中性 $\pi$ 粒子	$\pi^0$	$1_R^-$	0	134.977	$9\text{E-}17$ ( $\gamma\gamma$ )
$\mu$ 粒子	$\mu$	$2 + 2^*$	-1	105.658	$2.197\text{E-}6$ ( $e\bar{\nu}_e\nu_\mu$ )
$\mu$ ニュートリノ	$\nu_\mu$	$2^*$	0	0?	安定?

表で、 $1_R^-$  はパリティマイナスの実スカラー場、 $1_C^-$  はパリティマイナスの複素スカラー場を意味します。

荷電  $\pi$  粒子は次のように  $\mu$  粒子に崩壊します：

$$\pi^+ \rightarrow \bar{\mu}\nu_\mu, \quad \pi^- \rightarrow \mu\bar{\nu}_\mu.$$

そして  $\mu$  粒子の崩壊がこうです：

$$\mu \rightarrow e\bar{\nu}_e\nu_\mu, \quad \bar{\mu} \rightarrow \bar{e}\nu_e\bar{\nu}_\mu.$$

電子の反粒子  $\bar{e}$  は陽電子と呼ばれます ( $e^+$  と書くことも多い)。これらの崩壊は、弱い相互作用における荷電カレントを次のように加筆変更することで、弱い相互作用として理解できます。

$$J^\mu = \bar{n}\gamma^\mu(a - b\gamma_5)p + \bar{e}\gamma^\mu(1 - \gamma_5)\nu_e + \bar{\mu}\gamma^\mu(1 - \gamma_5)\nu_\mu + f_\pi\partial^\mu\pi.$$

$f_\pi$  は  $\pi$  粒子の崩壊定数と呼ばれ、実験からおおよそ、

$$f_\pi \sim 128 \text{ MeV}$$

です。一方、中性  $\pi$  粒子  $\pi^0$  は、強い相互作用と電磁相互作用を通じ、図 18.3 のグラフにより主に  $\gamma\gamma$  (2 光子) に崩壊すると考えられます (ループの  $p$  は陽子)。寿命が他と比べて短いのはそのためです。

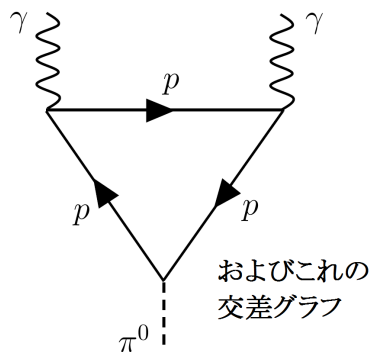


図 18.3: 中性  $\pi$  粒子の崩壊

$\pi$  粒子と  $\mu$  粒子の寿命の計算は素粒子論の計算の章にあるので、そちらを参照してください。

$\pi$  粒子はメソンと呼ばれ、レプトン数もバリオン数も持ちません。メソン数なんてものを考えても、それは保存しないので無意味です。レプトン数もバリオン数も 0 であることこそが、メソンの特徴なのです。

素粒子の種類は 9 個が増えてしまったけれど、ここまでが MeV レベルの低エネルギー素粒子論で、理論における 1 つのよい区切りになっています。これはいわば、前期素粒子論、もしくはいにしえ素粒子論と呼ぶべきものなわけです。

(余談) 1936 年、アンダーソンらが宇宙線の中に発見した新粒子は、その質量から当初、湯川の予言した  $\pi$  粒子と同定されましたが、原子核と強い相互作用をするはずの  $\pi$  粒子が大気を通過して地上まで届くことは考えにくく、1942 年、坂田、谷川、井上は、これが  $\pi$  粒子崩壊により生じ、強い相互作用に関与しない別の粒子 ( $\mu$  粒子) であると唱えました。これを二中間子論といいます。 $\mu$  粒子をメソン (中間子) と呼ぶのは現在の用語法では間違いですが、これはかつて、バリオン (重粒子)、メソン (中間子)、レプトン (軽粒子) を単に質量により分類していたためです。本当の  $\pi$  粒子は、1947 年、高感度な写真乾板を用いたパウエルのグループにより発見され、 $\mu$  粒子への崩壊も同時に確認されました。すなわち坂田らの二中間子論は正しかったわけですが、第二次世界大戦の混乱期における研究ということもあって、残念ながらこの業績は現在においても正當に評価されていないようです。

## 18.4 クォークモデルと量子色力学

宇宙線解析の技術や加速器の性能が上がると、陽子、中性子、 $\pi$  粒子に似ていて、これらと強い相互作用をする新しい素粒子が沢山見つかります。これらをひくくめてハドロンといいます。

ハドロンは、実は全てクォークの複合粒子であり、主にバリオンとメソンに分類されます。バリオンはクォーク 3 つの結合状態、メソンはクォークと反クォークの結合状態です (ゲルマン・ツウィク・ネーマン 1964)。陽子と中性子はその中でも一番軽いバリオンであり、 $\pi$  粒子が一番軽いメソンです。それゆえ安定であったり、存在を確認しやすいハドロンだったわけです。

クォークはディラック場で記述され、上系列 3 つ、下系列 3 つ、合計 6 つあります。上系列は  $u, c, t$  であり、それぞれアップ、チャーム、トップと呼ばれます。下系列は  $d, s, b$  であり、それぞれダウン、ストレンジ、ボトムと呼ばれます。上系列の電荷は  $2/3$  で、下系列の電荷は  $-1/3$  です。この 3 重構造は世代と呼ばれます。

名称	電荷	第 1 世代	第 2 世代	第 3 世代
上クォーク	$+2/3$	$u$ (5)	$c$ (1500)	$t$ (178000)
下クォーク	$-1/3$	$d$ (10)	$s$ (100)	$b$ (4700)



表の括弧内の数字はおおよその質量 (MeV) です。  $u, d, s$  は比較的質量が小さいため、これらの複合粒子は宇宙線による反応でも見られます。特にストレンジクォーク  $s$  を含むものは、ストレンジ粒子 (奇妙な粒子)、あるいは崩壊した後の粒子の飛跡から  $V$  粒子と呼ばれ、比較的安定なためにいち早く発見され、当時の物理学者を悩ませました。 ( $K$  粒子,  $\Lambda$  粒子,  $\Sigma$  粒子など。後述。)

クォークはカラー  $SU(3)$  と呼ばれる新しいゲージ対称性の定義表現 (3 重項) として特徴付けられます。そのゲージ場はグルーオン  $G_\mu^a$  ( $a = 1, 2, \dots, 8$ ) であり、これによって生じる相互作用が強い相互作用だと考えるわけです。

クォーク 6 個をまとめて、

$$q_f = (u, d, c, s, t, b)_f$$

と書きましょう。このとき添字の  $f$  をフレーバーといいます。カラー  $SU(3)$  変換は、

$$q'_f = \exp\left(-ig_c\theta^a \frac{\lambda^a}{2}\right) q_f$$

であり、共変微分は、

$$\nabla_\mu = \partial_\mu + ig_c \frac{\lambda^a}{2} G_\mu^a$$

と定義されます。  $g_c$  は結合定数、  $\lambda^a$  はゲルマン行列です。

6 個のクォーク場に関する  $SU(3)$  の非可換ゲージ理論、

$$\mathcal{L}_{QCD} = \sum_{f=1}^6 \bar{q}_f (i\gamma^\mu \nabla_\mu - m_f) q_f - \frac{1}{4} \mathcal{F}_{\mu\nu}^a \mathcal{F}^{a\mu\nu}$$

は量子色力学 (QCD = Quantum ChromoDynamics) と呼ばれます。ここで、

$$\mathcal{F}_{\mu\nu}^a = \partial_\mu G_\nu^a - \partial_\nu G_\mu^a - g_c f_{abc} G_\mu^b G_\nu^c$$

はゲージ場の強さです。  $f_{abc}$  は  $SU(3)$  の構造定数。

グルーオンによる強い相互作用は、数値計算やくりこみ群の解析によると、クォークを永続的に結びつけるようで、クォーク単体を取り出せない性質を持つことが予想されています。クォークを引き剥がそうとするとグルーオンがひものように凝縮し伸びてしまい、それが切れるとその両端にまたクォーク・反クォークを対生成してしまうというイメージです (南部のハドロンひも模型 1970, ウィルソンの格子ゲージ理論 1974)。

このことは、もし存在できるハドロンがカラー  $SU(3)$  の 1 重項 (白色) だけであると仮定すれば自明です。クォーク単体は定義から  $SU(3)$  の 3 重項だからです (色を持つ)。しかしこの仮定の数学的証明は難しく、ミレニアム懸賞問題の 1 つになっています。

ちなみに、レプトンはカラー  $SU(3)$  の 1 重項 (スカラー表現) で、それゆえ強い相互作用に参与せず、それがレプトンのレプトンたる所以です。こちらをまとめておきましょう。

名称	電荷	第 1 世代	第 2 世代	第 3 世代
上レプトン	0	$\nu_e$	$\nu_\mu$	$\nu_\tau$
下レプトン	-1	$e$ (0.511)	$\mu$ (106)	$\tau$ (1777)

3 世代目の電子は  $\tau$  粒子と呼ばれ、これにも相棒のニュートリノ  $\nu_\tau$  が存在します。 $\tau$  粒子は質量が陽子の 2 倍程度と大きいので、生成には高エネルギー加速器を必要とします。

## 18.5 バリオンの分類

ハドロンのうち陽子や中性子などのバリオンはクォーク 3 つの結合状態で、カラーの足を  $i, j, k$ , スピンの足を  $s$  などで表して、近似的に、

$$|q_{fs} q_{f's'} q_{f''s''}\rangle = \frac{1}{\sqrt{3!}} \sum_{ijk} \epsilon_{ijk} Q_{ifs}^* Q_{jf's'}^* Q_{kf''s''}^* |0\rangle$$

というカラー  $SU(3)$  1 重項に相当します。ここで  $Q_{ifs}^*$  はクォークのバリオン基底状態への生成演算子を意味します。実際、カラー  $SU(3)$  の変換行列を  $U$  として、 $\sum_{ijk} \epsilon_{ijk} U_{i'i'} U_{j'j'} U_{k'k'} = \epsilon_{i'j'k'} \det U = \epsilon_{i'j'k'}$  に注意すると、上式がカラー  $SU(3)$  変換に対して不変であることが確かめられるでしょう。

また、フェルミオンの反可換性とレビ・チビタの完全反対称性から、上式はクォークの入れ換えに関して完全対称になります。例えば、 $u_+ u_- d_+ = u_- u_+ d_+ = u_+ d_+ u_-$  です (ケットを省略しています)。すなわちフレーバースピンの順番は問われなくなり、バリオンの中の 3 つのクォークはあたかもボゾンのように振舞うということです。

このことに注意してスピンの合成を行うと、以下のようになります。

- フレーバーが 1 種の場合 ( $uuu$  など)。状態は、

$$u_+ u_+ u_+, \quad u_+ u_+ u_-, \quad u_+ u_- u_-, \quad u_- u_- u_-$$

の 4 個。→ スピン 3/2 のみを生じる。

- フレーバーが 2 種の場合 ( $uud$  など)。状態は、

$$u_+ u_+ d_+, \quad u_+ u_+ d_-, \quad u_+ u_- d_+, \quad u_+ u_- d_-, \quad u_- u_- d_+, \quad u_- u_- d_-$$

の 6 個。→ スピン 3/2 とスピン 1/2 を生じる ( $6 = 4 + 2$ )。

• フレーバーが3種の場合 ( $uds$  など)。状態は、

$$u_+d_+s_+, u_+d_+s_-, u_+d_-s_+, u_-d_+s_+, u_-d_-s_+, u_-d_+s_-, u_+d_-s_-, u_-d_-s_-$$

の8個。→ スピン  $3/2$  およびスピン  $1/2$  を2つ生じる ( $8 = 4 + 2 + 2$ )。

実際、低エネルギー (GeV オーダー) で現れる  $u, d, s$  を構成要素とするスピン  $1/2$  のバリオンは次の通りです。

$$\begin{aligned} p &= uud \quad (938.27) & n &= udd \quad (939.57) \\ \Sigma^+ &= uus \quad (1189) & \Sigma^0 &= uds \quad (1192) & \Sigma^- &= dds \quad (1197) \\ & & \Lambda^0 &= uds \quad (1116) & & \\ \Xi^0 &= uss \quad (1315) & \Xi^- &= dss \quad (1321) \end{aligned}$$

これをバリオン8重項といいます。ストレンジクォーク  $s$  は  $u, d$  に比べて少し質量が大きいため、これが多く含まれる程バリオンの質量も大きくなります。

また、スピン  $3/2$  のバリオンは、

$$\begin{aligned} \Delta^{++} &= uuu & \Delta^+ &= uud & \Delta^0 &= udd & \Delta^- &= ddd \quad (\sim 1230) \\ \Sigma^{*+} &= uus & \Sigma^{*0} &= uds & \Sigma^{*-} &= dds \quad (\sim 1380) \\ \Xi^{*0} &= uss & \Xi^{*-} &= dss \quad (\sim 1530) \\ \Omega^- &= sss \quad (\sim 1670) \end{aligned}$$

これをバリオン10重項といいます。 $\Delta$  粒子はストレンジクォークを含まないため極端に寿命が短く、ハドロン散乱実験において3-3 共鳴と呼ばれる全断面積のなだらかな増加として加速器の中で確認されます。

$uud$  の場合を例に、実際にスピンの合成を行ってみましょう。

$uud$  の6つの状態を考えると、スピン  $z$  成分が  $3/2$  の状態は  $u_+u_+d_+$  のみです。同じ状態に2つのクォークが入っていることに注意すると、この状態ベクトルの大きさは  $\sqrt{2!}$  と考えられ、よって規格化すると、

$$\Delta_{3/2}^+ = \frac{1}{\sqrt{2}} u_+u_+d_+$$

です。スピンの降演算子  $S_-$  を作用すると、

$$S_- |l, m\rangle = \sqrt{(l+m)(l-m+1)} |l, m-1\rangle$$

に注意して、

$$S_- \Delta_{3/2}^+ = \sqrt{\left(\frac{3}{2} + \frac{3}{2}\right) \left(\frac{3}{2} - \frac{3}{2} + 1\right)} \Delta_{1/2}^+ = \sqrt{3} \Delta_{1/2}^+$$

一方、スピン演算子を各クォークのものに分解して計算すると、

$$\begin{aligned} S_- \Delta_{3/2}^+ &= \frac{1}{\sqrt{2}} S_- (u_+ u_+ d_+) = \frac{1}{\sqrt{2}} (u_- u_+ d_+ + u_+ u_- d_+ + u_+ u_+ d_-) \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} (2u_+ u_- d_+ + u_+ u_+ d_-) \end{aligned}$$

となるので、これらを比較して、

$$\Delta_{1/2}^+ = \frac{1}{\sqrt{6}} (2u_+ u_- d_+ + u_+ u_+ d_-)$$

を得ます。同様にやって、

$$\Delta_{-1/2}^+ = \frac{1}{\sqrt{6}} (2u_+ u_- d_- + u_- u_- d_+), \quad \Delta_{-3/2}^+ = \frac{1}{\sqrt{2}} u_- u_- d_-$$

を得るでしょう。これらが  $uud$  のスピン 4 重項で、 $\Delta^+$  粒子を意味します。一方、スピン  $z$  成分が  $1/2$  で  $\Delta_{1/2}^+$  と直交するベクトルは、 $u_+ u_- d_+$  の大きさが 1 で、 $u_+ u_+ d_-$  の大きさが  $\sqrt{2}$  であることに注意して、

$$p_{1/2} = \frac{1}{\sqrt{3}} (u_+ u_- d_+ - u_+ u_+ d_-)$$

と書けます。同様にスピン  $z$  成分が  $-1/2$  で  $\Delta_{-1/2}^+$  と直交するベクトルは、

$$p_{-1/2} = \frac{1}{\sqrt{3}} (u_+ u_- d_- - u_- u_- d_+)$$

と書けます。これらが  $uud$  のスピン 2 重項で、陽子 ( $p$ ) を意味します。

(余談) ここでの分類法は私が独自に見つけたものですが、おそらくある程度知られている方法だと思われます。 $SU(6)$  の方法と呼ばれるものとは異なるようです。よく教科書で見かける方法は、フレーバー  $SU(3)$  の合成によるもので、これによりアイソスピンとストレンジネスと呼ばれる量子数が導入されます。しかしその方法では、なぜバリオン 8 重項がスピン  $1/2$  になり 10 重項がスピン  $3/2$  になるのか説明されません。ここで示した方法の方が  $SU(3)$  の表現論を用いず簡単で、なおかつ現実に即しているのです。

## 18.6 メソンの分類と質量の起源

一方、メソンはクォークと反クォークの結合状態で、近似的に、

$$|q_{fs} \bar{q}_{f's'}\rangle = \frac{1}{\sqrt{3}} \sum_i Q_{ifs}^* \bar{Q}_{if's'}^* |0\rangle$$

というやはり  $SU(3)$  1 重項に相当します。 $Q_{ifs}^*$  はクォークのメソン基底状態への生成演算子で、 $\bar{Q}_{if's'}^*$  は反クォークのそれです。クォークと反クォークは同じフレー

バーでも区別できるため、スピンの合成は単純で、どのような組み合わせに対してもスピン0とスピン1を生じます。

特にスピン0のメソンは、

$$\pi^+ = u\bar{d} \quad \pi^- = d\bar{u} \quad (140)$$

$$K^+ = u\bar{s} \quad K^- = s\bar{u} \quad (494)$$

$$K^0 = d\bar{s} \quad \bar{K}^0 = s\bar{d} \quad (498)$$

同じ行のメソンは互いに粒子反粒子の関係になっています (証明は後述)。また、 $u\bar{u}$ ,  $d\bar{d}$ ,  $s\bar{s}$  の線形結合として、

$$\pi^0 = \frac{1}{\sqrt{2}} (u\bar{u} - d\bar{d}) \quad (135)$$

$$\eta^0 = \frac{1}{\sqrt{6}} (u\bar{u} + d\bar{d} - 2s\bar{s}) \quad (548)$$

$$\eta' = \frac{1}{\sqrt{3}} (u\bar{u} + d\bar{d} + s\bar{s}) \quad (958)$$

です。このように分岐することを理解するには、 $u$ ,  $d$ ,  $s$  の間の近似的なフレーバー  $SU(3)$  対称性を考えればよいです。その1重項が  $\eta'$  であり、比較的質量の大きい  $s$  を含まず、 $\eta'$  と直交するものが  $\pi^0$  というわけです。 $\eta^0$  はこの2つと直交する残りです(\*)。

一方、チャームクォーク  $c$  や ボトムクォーク  $b$  を含むメソンで、特に歴史的に有名なものは、

$$J/\psi = c\bar{c} \quad (3097) \quad \Upsilon = b\bar{b} \quad (9460)$$

このように重いハドロンになると、その質量はほぼ構成クォークの質量の和になります。軽いハドロンでそうでないのは、その質量のほとんどがグルーオンやクォークの運動エネルギー、および真空のエネルギーによるものと考えられます。QCDのダイナミクスにより生じる質量をQCD起源といいます。陽子や中性子の質量を考えると、そのほとんどがQCD起源であるため、我々の身の周りの物質の質量はそのほとんどがQCD起源ということになります。一方、クォークやレプトンそれ自体の質量は、この後で説明する電弱相転移により獲得されるため、電弱起源、あるいはヒッグス起源などと呼ばれます。

また、クォークモデルにおいては、 $p \longleftrightarrow n\pi^+ (uud \longleftrightarrow (udd)(u\bar{d}))$  のような強い相互作用における粒子変化は、もはや対生成・対消滅および組成の組み換えにすぎないことに注意して下さい (図 18.4)。グルーオンの交換による強い相互作用は、クォークのカラーを変えるだけで、その種類 (フレーバー) は変えません。クォークとレプトンのレベルにおいては、粒子の種類を変えるのは弱い相互作用だけということになります。

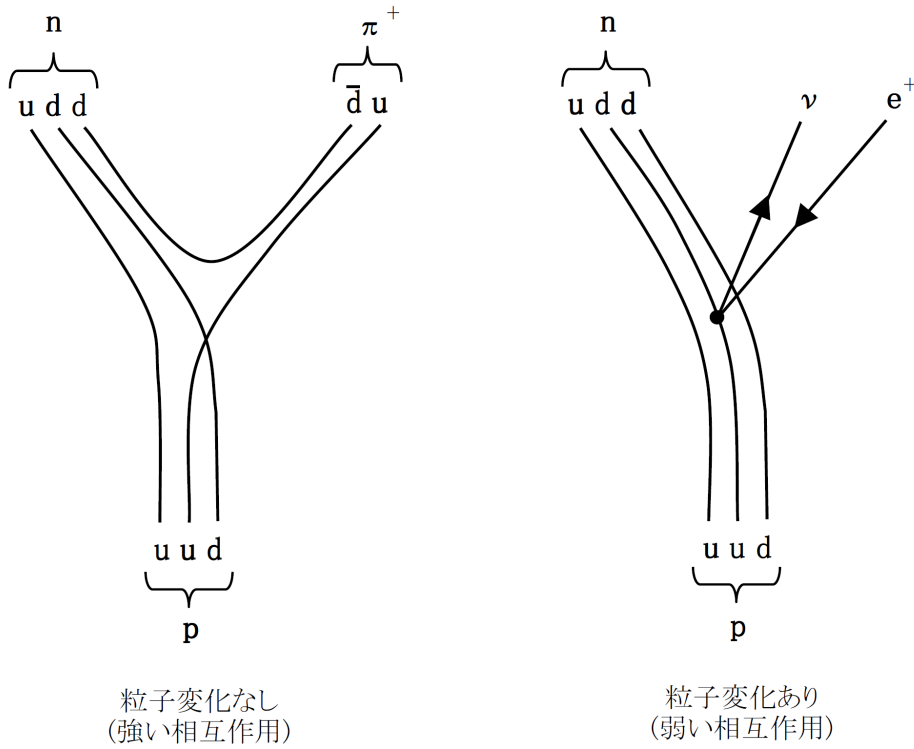


図 18.4: 粒子放出と 反応

ちなみに、粒子の種類が同じか異なるかは、通常、質量と電荷により判断されます。スピンやカラーの違いは質量や電荷を変えないため、これらの違いは粒子の違いとは普通は考えないわけです。この場合、スピンやカラーは粒子の内部量子数と呼ばれます。

ここでメソンの荷電共役変換とパリティ変換について触れておきましょう。荷電共役変換  $C$  に対し、

$$C Q_{ifs}^* C^{-1} = \bar{Q}_{ifs}^*, \quad C \bar{Q}_{ifs}^* C^{-1} = Q_{ifs}^*, \quad C|0\rangle = |0\rangle$$

また、パリティ変換  $P$  に対し、

$$P Q_{ifs}^* P^{-1} = Q_{ifs}^*, \quad P \bar{Q}_{ifs}^* P^{-1} = -\bar{Q}_{ifs}^*, \quad P|0\rangle = |0\rangle$$

であることに注意します。スピン量子数  $s$  は軸性ベクトルの成分であるため、パリティ変換に対して不変です (ヘリシティと混同しないよう注意)。一方、スピン 0 のメソンは、

$$\begin{aligned}
 |q_f \bar{q}_{f'}\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}} (|q_{f+} \bar{q}_{f'-}\rangle - |q_{f-} \bar{q}_{f'+}\rangle) \\
 &= \frac{1}{\sqrt{6}} \sum_i (Q_{if+}^* \bar{Q}_{if'-}^* - Q_{if-}^* \bar{Q}_{if'+}^*) |0\rangle
 \end{aligned}$$

と表せます。これらから、

$$C|q_f \bar{q}_{f'}\rangle = |q_{f'} \bar{q}_f\rangle, \quad P|q_f \bar{q}_{f'}\rangle = -|q_f \bar{q}_{f'}\rangle$$

を得るでしょう。量子電磁気学の章でも触れたように、一般にスピン0のメソンのパリティはマイナスになることがわかります。また、例えば  $\pi^+ = u\bar{d}$  と  $\pi^- = d\bar{u}$  は互いに荷電共役 (粒子反粒子) の関係にあることがわかり、このことはこれら2つの複合粒子が同じ質量を持つことの証明になっています。

(\*注) クォークの質量  $m_f$  はフレーバーによって異なるため、フレーバー  $SU(3)$  はあくまで近似的な対称性です。しかしこの近似的対称性は有用で、この考えを深く推し進めると、 $\eta'$  が重く、 $\pi$  粒子が際立って軽い理由を比較的簡単に説明できることがわかっています (カイラル  $SU(N)$  模型とその自発的破れ)。

## 18.7 カビボ角と小林益川行列

図 18.5 に高エネルギー放射線が泡箱の中を通過したときの写真を示します (南部陽一郎著「クォーク」から引用)。

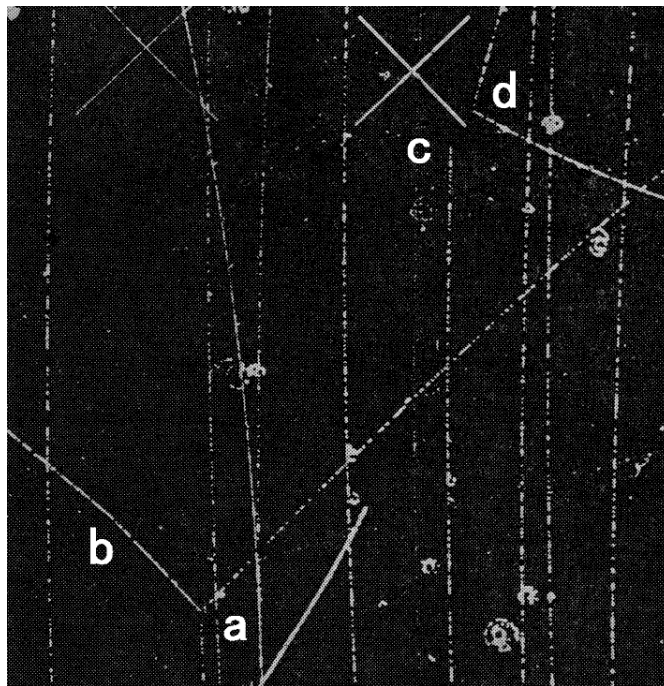


図 18.5: 泡箱写真の一例

a は写真下からやってきた  $K^-$  が泡箱中の陽子  $p$  と衝突し、

$$K^- p \rightarrow \pi^- \Sigma^+ \quad ((s\bar{u})(uud) \rightarrow (d\bar{u})(uus))$$

という強い相互作用による変化を捉えたものです。クォークの組成が全体として変わっていないことに注意してください。写真右側に飛び去っているのが  $\pi^-$  で、左側に出ているのが  $\Sigma^+$  です。  $\Sigma^+$  は、直後 b において、

$$\Sigma^+ \rightarrow p\pi^0 \quad (uus \rightarrow uud(u\bar{u} - d\bar{d})/\sqrt{2})$$

と崩壊しています。b においてほんのわずかですが軌跡が折れているのがわかるでしょう。 $\pi^0$  は電荷を持たないので乳剤と反応せず、写真には写っていませんが、すぐさまいくつかの光子へと崩壊したはずです。

上の  $\Sigma^+$  崩壊においては、 $s$  クォークが  $d$  クォークに変化していると考えられますが、このような変化は、荷電カレントに、

$$J^\mu = (\cos \theta_C \bar{d} + \sin \theta_C \bar{s}) \gamma^\mu (1 - \gamma_5) u + \dots, \quad \sin \theta_C \sim 0.22$$

という  $d, s$  の混合があれば、弱い相互作用として理解できることが知られています (図 18.6)。このような弱い相互作用における混合は、1963 年、カビボによって提唱されたため、 $\theta_C$  はカビボ角と呼ばれます。

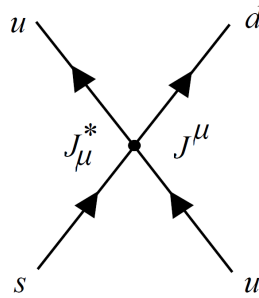


図 18.6: 弱い相互作用による  $s \rightarrow d$

一方、図 18.5 の c は、やはり写真下からやってきた  $K^-$  が  $p$  と衝突し、

$$K^- p \rightarrow \bar{K}^0 n \quad ((s\bar{u})(uud) \rightarrow (s\bar{d})(udd))$$

と変化しているところです。これは強い相互作用による反応で、クォークの対消滅を考慮すれば変化前も変化後も  $uds$  という組成になっています。 $\bar{K}^0$  も  $n$  も中性のため見えないので、写真ではあたかも  $K^-$  が消えたかのように写っています。生成された  $\bar{K}^0$  は、直後  $d$  において、

$$\bar{K}^0 \rightarrow \pi^+ \pi^- \quad (s\bar{d} \rightarrow (u\bar{d})(d\bar{u}))$$

と、弱い相互作用 ( $s \rightarrow d$ ) によって崩壊しています。 $\pi^+$  は写真右に、 $\pi^-$  は写真上に飛び去っています。

写真から、ストレンジクォーク  $s$  を含むハドロンが、かつて V 粒子と呼ばれた理由がよくわかるでしょう。歴史的にはこのような写真を大量に分析し、紆余曲折の末、クォークモデルやカビボ混合にたどり着いたわけです。

カビボ混合は  $d, s$  に関するものですが、これを 3 世代の  $d, s, b$  の混合へと拡張すれば、荷電カレントは全体で、

$$J^\mu = (\bar{d} \quad \bar{s} \quad \bar{b}) U_q^\dagger \gamma^\mu (1 - \gamma_5) \begin{pmatrix} u \\ c \\ t \end{pmatrix} + (\bar{e} \quad \bar{\mu} \quad \bar{\tau}) \gamma^\mu (1 - \gamma_5) \begin{pmatrix} \nu_e \\ \nu_\mu \\ \nu_\tau \end{pmatrix}$$



となります。世代空間における  $3 \times 3$  ユニタリ行列  $U_q$  は、小林益川行列、あるいはカビボ小林益川行列 (CKM 行列) などと呼ばれ、おおまかな近似式は、

$$U_q \sim \begin{pmatrix} \cos \theta_C & \sin \theta_C & 0 \\ -\sin \theta_C & \cos \theta_C & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

です。

次に述べる素粒子標準模型において詳しく説明しますが、弱い相互作用にこのような混合が存在することには、実は対称性の破れや場の自由度に関連した理由があります。しかしカビボ混合が提唱された当時はその理由がよくわかっていなかったため、「弱い相互作用は神の手抜き?」といった印象を一部研究者に与えていたようです。

V 粒子は、生成は対生成  $X \rightarrow (sX_1)(\bar{s}X_2)$  により強い相互作用の枠内で起こり、比較的容易に生成されますが、これにより生じた2つの V 粒子  $sX_1, \bar{s}X_2$  は互いに遠ざかってしまうため、崩壊は世代混合を含む弱い相互作用でしか行えません。これが V 粒子の寿命が長く、比較的安定な理由です。このことは  $c, b, t$  を含むハドロンにもいえます。

クォークのバリオン数は  $1/3$  と勘定され、バリオン数はやはり保存することに注意してください。仮にもし弱い相互作用に世代混合がなければ、バリオン数がクォークの各世代ごとに保存量になり、各世代について質量の小さい方のクォーク (それを含むハドロンの基底状態) は安定になったはずですが、すなわち  $s$  や  $b$  を含む大量のハドロンがこの世界を核子と同様に埋め尽くしていたはずですが、実際にそうでないのは、弱い相互作用に世代混合があるからと考えることができます。

## 18.8 素粒子標準模型

電磁相互作用は  $U(1)$  のゲージ理論 (QED) で、強い相互作用は  $SU(3)$  のゲージ理論 (QCD) であることがわかりました。弱い相互作用はというと、実は電磁相互作用と統一され、 $U(1)_Y \times SU(2)$  のゲージ理論の一部であることが判明します。いわゆる電弱統一理論です (グラショウ 1961, ヒッグス 1964, ワインバーグ・サラム 1967)。 $U(1)_Y$  は QED の  $U(1)$  とは異なるため添字  $Y$  で区別します。強い相互作用のカラー  $SU(3)$  とあわせ、全体で  $U(1)_Y \times SU(2) \times SU(3)$  のゲージ理論になり、これを素粒子標準模型といいます。

実のところ、荷電カレントを用いた4フェルミ型を含め、弱い相互作用に関する多くの素朴な理論はくりこみ不可能であることが古くから知られていました。荷電カレントとは別にある種の中性カレントがあるとくりこみの具合が良くなる等の現象はわかっていたものの、くりこみが可能であることが証明された弱い相互

作用のモデルはなかなか見つからなかったのです。しかし電弱統一理論においてはト・ホーフトによりそのくりこみ可能性がいち早く証明されました(1971)。一般にゲージ理論はくりこみ可能性をもたらす魔法と考えられています。

以下、標準模型の内容を紹介していきます。

まず、ゲージ場のラグランジアン密度は、

$$\mathcal{L}_{\text{gauge}} = -\frac{1}{4} f_{\mu\nu} f^{\mu\nu} - \frac{1}{4} F_{\mu\nu}^a F^{a\mu\nu} - \frac{1}{4} \mathcal{F}_{\mu\nu}^a \mathcal{F}^{a\mu\nu}$$

です。ここで、

$$\begin{aligned} f_{\mu\nu} &= \partial_\mu B_\nu - \partial_\nu B_\mu, \\ F_{\mu\nu}^a &= \partial_\mu A_\nu^a - \partial_\nu A_\mu^a - g\epsilon_{abc} A_\mu^b A_\nu^c, \\ \mathcal{F}_{\mu\nu}^a &= \partial_\mu G_\nu^a - \partial_\nu G_\mu^a - g_c f_{abc} G_\mu^b G_\nu^c \end{aligned}$$

はそれぞれのゲージ場の場の強さで、 $B_\mu$  は  $U(1)_Y$  のゲージ場、 $A_\mu^a$  は  $SU(2)$  のゲージ場、 $G_\mu^a$  は  $SU(3)$  のゲージ場(グルーオン場)です。

物質場に対する共変微分は、 $U(1)_Y$  の“電荷”が  $Y$  で、 $SU(2)$ ,  $SU(3)$  に対してそれぞれ基本表現の場合、

$$D_\mu = \partial_\mu + ig'Y B_\mu + ig \frac{\sigma^a}{2} A_\mu^a + ig_c \frac{\lambda^a}{2} G_\mu^a$$

となります。 $Y$  は超電荷(ハイパーチャージ)と呼ばれます。 $g'$ ,  $g$ ,  $g_c$  はそれぞれ  $U(1)_Y$ ,  $SU(2)$ ,  $SU(3)$  の結合定数です。

物質場としては、まず  $Y = 1/2$  の  $SU(2)$  2重項の複素スカラー場  $\Phi$  があり、ヒッグス場と呼ばれます。そのラグランジアン密度は、

$$\mathcal{L}_{\text{Higgs}} = (D_\mu \Phi)^\dagger D^\mu \Phi - U(\Phi^\dagger \Phi).$$

$U(\Phi^\dagger \Phi)$  は  $\Phi^\dagger \Phi$  の多項式で、ポテンシャル項です。

次にレプトンを記述するための3つのディラック場  $l_L$ ,  $l_R^u$ ,  $l_R^d$  があり、順に  $SU(2)$  2重項、1重項、1重項とします。 $L$ ,  $R$  はスピノルの左手型と右手型を意味します。また、これらは世代3重項です。レプトンのラグランジアン密度は、

$$\mathcal{L}_{\text{lepton}} = \bar{l}_L i\gamma \cdot D l_L + \bar{l}_R^u i\gamma \cdot D l_R^u + \bar{l}_R^d i\gamma \cdot D l_R^d$$

であり、さらにヒッグス場との相互作用項が、

$$\mathcal{L}_{1\text{-Higgs}} = -\bar{l}_L \tilde{\Phi} \Lambda_l^u l_R^u - \bar{l}_L \Phi \Lambda_l^d l_R^d + c.c.$$

で与えられます。ここで  $c.c.$  は前の部分の複素共役を意味します。これはラグランジアン密度の実性のために必要です。

$$\tilde{\Phi} = \epsilon \Phi^*, \quad \epsilon = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

は  $SU(2)$  空間における  $\Phi$  の外積的共役で、 $\Phi' = U\Phi$ ,  $U \in SU(2)$  のとき  $\tilde{\Phi}' = U\tilde{\Phi}$  となることに注意。 $\Lambda_l^u, \Lambda_l^d$  はレプトン-ヒッグス間の結合定数で、世代空間における  $3 \times 3$  の複素行列です。 $\mathcal{L}_{1\text{-Higgs}}$  の  $SU(2)$  不変性が確かめられるでしょう。

$\mathcal{L}_{1\text{-Higgs}}$  が  $U(1)_Y$  に関して不変であるために、レプトンの超電荷について、

$$Y(l_L) = -1/2 + Y(l_R^u) = 1/2 + Y(l_R^d)$$

という関係が必要ですが、

$$Y(l_L) = -1/2, \quad Y(l_R^u) = 0, \quad Y(l_R^d) = -1$$

と定義し  $U(1)_Y$  不変性を持たせます。 $Y(l_R^u) = 0$  に注意すると、 $l_R^u$  に関するマヨラナ質量項： $\bar{l}_R^C m_M l_R^u + c.c.$  ( $m_M$  は世代空間の複素行列) は  $U(1)_Y$  対称性を持ちますが、ここではこのマヨラナ質量項がないものを標準模型と呼ぶことにして、それを紹介します。マヨラナ質量項があるとレプトン数が破れます。

クォークについても同様で、 $q_L, q_R^u, q_R^d$  を順に  $SU(2)$  2重項、1重項、1重項とします。ただしレプトンと異なり、これらはカラー  $SU(3)$  3重項です。クォークのラグランジアン密度は、

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{\text{quark}} &= \bar{q}_L i\gamma \cdot D q_L + \bar{q}_R^u i\gamma \cdot D q_R^u + \bar{q}_R^d i\gamma \cdot D q_R^d, \\ \mathcal{L}_{q\text{-Higgs}} &= -\bar{q}_L \tilde{\Phi} \Lambda_q^u q_R^u - \bar{q}_L \Phi \Lambda_q^d q_R^d + c.c.. \end{aligned}$$

クォーク-ヒッグス間の結合定数を  $\Lambda_q^u, \Lambda_q^d$  と書きました。クォークの超電荷は、

$$Y(q_L) = 1/6, \quad Y(q_R^u) = 2/3, \quad Y(q_R^d) = -1/3$$

と定義されます。

以上のラグランジアン密度を全て合わせ、

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{\text{SM}} &= \mathcal{L}_{\text{gauge}} + \mathcal{L}_{\text{Higgs}} + \mathcal{L}_{\text{lepton}} + \mathcal{L}_{1\text{-Higgs}} + \mathcal{L}_{\text{quark}} + \mathcal{L}_{q\text{-Higgs}} \\ &= -\frac{1}{4} f_{\mu\nu} f^{\mu\nu} - \frac{1}{4} F_{\mu\nu}^a F^{a\mu\nu} - \frac{1}{4} \mathcal{F}_{\mu\nu}^a \mathcal{F}^{a\mu\nu} + (D_\mu \Phi)^\dagger D^\mu \Phi - U(\Phi^\dagger \Phi) \\ &\quad + \bar{l}_L i\gamma \cdot D l_L + \bar{l}_R^u i\gamma \cdot D l_R^u + \bar{l}_R^d i\gamma \cdot D l_R^d - \bar{l}_L \tilde{\Phi} \Lambda_l^u l_R^u - \bar{l}_L \Phi \Lambda_l^d l_R^d + c.c. \\ &\quad + \bar{q}_L i\gamma \cdot D q_L + \bar{q}_R^u i\gamma \cdot D q_R^u + \bar{q}_R^d i\gamma \cdot D q_R^d - \bar{q}_L \tilde{\Phi} \Lambda_q^u q_R^u - \bar{q}_L \Phi \Lambda_q^d q_R^d + c.c. \end{aligned}$$

が標準模型 (Standard Model) のラグランジアン密度です。少々仰々しい理論ですが、重力を除く3つの相互作用を記述しなかつ実用的な理論なので、仕方ないといえるでしょう。例えばよりシンプルな統一理論があった場合、この標準模型を演繹できることが、正しい理論であることの必要条件になります。そういえるくらいに、この標準模型は高エネルギー加速器実験においてその正しさが検証されています。逆にいうと、特に近年では、標準模型からのずれを探すのが

高エネルギー加速器実験の役割になっています。そういう意味で、標準模型は素粒子論における叩き台なわけです。

標準模型に現れる場を表にまとめておきましょう。

名称	記号	$O(3,1)$	$Y$	$SU(2)$	$SU(3)$	世代
$U(1)_Y$ ゲージ	$B_\mu$	4				
$SU(2)$ ゲージ	$A_\mu^a$	4		3		
$SU(3)$ ゲージ	$G_\mu^a$	4			8	
ヒッグス	$\Phi$	$1_C^+$	$+1/2$	2	1	1
左レプトン	$l_L$	$2^*$	$-1/2$	2	1	3
右上レプトン	$l_R^u$	2	0	1	1	3
右下レプトン	$l_R^d$	2	-1	1	1	3
左クォーク	$q_L$	$2^*$	$+1/6$	2	3	3
右上クォーク	$q_R^u$	2	$+2/3$	1	3	3
右下クォーク	$q_R^d$	2	$-1/3$	1	3	3

(余談) パリティの破れた ( $\gamma_5$  を内包する) ゲージ場の量子論はアノマリー (量子異常) によって矛盾を引き起こす可能性もあるのですが、標準模型においてはレプトンとクォークにおけるアノマリーの寄与がちょうど相殺し、矛盾を引き起こしません。このレプトン・クォーク間の相殺は偶然とは考えにくく、レプトンとクォークを統一する大統一理論が背後にあることを予想させます。

## 18.9 ウィークボゾン

くりこみ理論によれば、場の量子論のくりこまれたパラメーター (各種定数) はエネルギーレベルによって動くわけですが、標準模型の場合、重要な分岐を与えるのはヒッグスポテンシャル  $U(\Phi^\dagger\Phi)$  です。この中の  $\Phi^\dagger\Phi$  の1次の項、すなわち質量項の係数が負になると、自発的対称性の破れを生じます (相対論的場の量子論の章参照)。

いま、対称性の破れた相 (南部・ゴールドストーン相) にあるとして、

$$\Phi(x) = \frac{v}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \phi(x), \quad \langle 0 | \phi(x) | 0 \rangle = 0$$

とおきます。もともと  $U(1)_Y \times SU(2)$  の自由度があったことから  $v$  は正の実数と仮定できます。このとき、

$$D_\mu \Phi = \left( \partial_\mu + ig' \frac{1}{2} B_\mu + ig \frac{\sigma^a}{2} A_\mu^a \right) \Phi = \frac{iv}{2\sqrt{2}} \begin{pmatrix} gA_\mu^1 - igA_\mu^2 \\ g'B_\mu - gA_\mu^3 \end{pmatrix} + O(\phi)$$

で、 $O(\phi)$  は  $\phi$  を含む項です。そうするとヒッグス場のラグランジアン密度は、

$$\mathcal{L}_{\text{Higgs}} = \frac{g^2 v^2}{8} ((A^1)^2 + (A^2)^2) + \frac{v^2}{8} (g'B - gA^3)^2 + (\text{定数}) + O(\phi)$$

であり、これはゲージ場に質量を与えます。ここで、

$$W_\mu = \frac{1}{\sqrt{2}} (A_\mu^1 - iA_\mu^2)$$

およびゲージ場の質量を対角化するために、

$$\begin{pmatrix} A_\mu^3 \\ B_\mu \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta_W & \sin \theta_W \\ -\sin \theta_W & \cos \theta_W \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Z_\mu \\ A_\mu \end{pmatrix}$$

というゲージ場の組み換えを行うと、特に、

$$\tan \theta_W = \frac{g'}{g}$$

において  $A_\mu$  の質量を 0 とすることができ、

$$\mathcal{L}_{\text{Higgs}} = M_W^2 W_\mu^* W^\mu + \frac{1}{2} M_Z^2 Z_\mu Z^\mu + (\text{定数}) + O(\phi)$$

$$M_W = \frac{gv}{2}, \quad M_Z = \frac{gv}{2 \cos \theta_W}$$

を得ます。

複素ベクトル場  $W_\mu$  の粒子を W ボゾンといい、実ベクトル場  $Z_\mu$  の粒子を Z ボゾンといいます。あわせてウィークボゾンと呼ばれ、後で見るように弱い相互作用を媒介する粒子となります。 $A_\mu$  は質量を獲得せず、これが電磁場の 4 元ポテンシャル (光子の場) です。 $\theta_W$  はワインバーグ角と呼ばれます。

ゲージ場の強さは新しい表示で、

$$f_{\mu\nu} = -\sin \theta_W F_{\mu\nu}^Z + \cos \theta_W F_{\mu\nu}^A,$$

$$F_{\mu\nu}^3 = \cos \theta_W F_{\mu\nu}^Z + \sin \theta_W F_{\mu\nu}^A - ig W_\mu^* W_\nu - (\mu\nu),$$

$$F_{\mu\nu}^1 = \frac{1}{\sqrt{2}} (F_{\mu\nu}^W + F_{\mu\nu}^{W*}) - \frac{ig}{\sqrt{2}} (W_\mu - W_\mu^*) (\sin \theta_W A_\nu + \cos \theta_W Z_\nu) - (\mu\nu),$$

$$F_{\mu\nu}^2 = \frac{i}{\sqrt{2}} (F_{\mu\nu}^W - F_{\mu\nu}^{W*}) + \frac{g}{\sqrt{2}} (W_\mu + W_\mu^*) (\sin \theta_W A_\nu + \cos \theta_W Z_\nu) - (\mu\nu)$$

と書けます。ここで  $(\mu\nu)$  は前の項の  $\mu, \nu$  を入れ替えた式です。また、

$$F_{\mu\nu}^A = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu, \quad F_{\mu\nu}^Z = \partial_\mu Z_\nu - \partial_\nu Z_\mu, \quad F_{\mu\nu}^W = \partial_\mu W_\nu - \partial_\nu W_\mu.$$

そうすると、ゲージ場のラグランジアン密度は、

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_{\text{gauge}} = & -\frac{1}{4} F_{\mu\nu}^A F^{A\mu\nu} - \frac{1}{4} F_{\mu\nu}^Z F^{Z\mu\nu} - \frac{1}{2} F_{\mu\nu}^{W^*} F^{W\mu\nu} - \frac{1}{4} \mathcal{F}_{\mu\nu}^a \mathcal{F}^{a\mu\nu} \\ & + ig (F_{\mu\nu}^{W^*} W^\mu - F_{\mu\nu}^W W^{\mu*}) (\sin \theta_W A^\nu + \cos \theta_W Z^\nu) \\ & + ig W_\mu^* W_\nu (\sin \theta_W F^{A\mu\nu} + \cos \theta_W F^{Z\mu\nu}) + (g \text{ の 2 次})\end{aligned}$$

と展開されます。\$W\_\mu\$ が 4 元ポテンシャル \$A\_\mu\$ と極小相互作用 (場の 3 次での結合) をするのに対し、\$Z\_\mu\$ は 4 元ポテンシャルと極小相互作用しません。それゆえ \$W\$ ボゾンは荷電粒子であり、\$Z\$ ボゾンは中性粒子と考えられます。

## 18.10 レプトンの相互作用

レプトンのラグランジアン密度において共変微分を展開すると、

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_{\text{lepton}} = & \bar{l}_L i \gamma \cdot \partial l_L + \bar{l}_R^u i \gamma \cdot \partial l_R^u + \bar{l}_R^d i \gamma \cdot \partial l_R^d \\ & - \bar{l}_L \gamma^\mu \left( g' \left( -\frac{1}{2} \right) B_\mu + g \frac{\sigma^a}{2} A_\mu^a \right) l_L - \bar{l}_R^d \gamma^\mu g' (-1) B_\mu l_R^d\end{aligned}$$

ですが、\$SU(2)\$ 2 重項である \$l\_L\$ を、

$$l_L = \begin{pmatrix} l_L^u \\ l_L^d \end{pmatrix}$$

とおき、

$$\begin{aligned}g' Y B_\mu = & g \sin \theta_W A_\mu(Y) + \frac{g}{\cos \theta_W} Z_\mu (-Y \sin^2 \theta_W), \\ g' Y B_\mu + g \frac{\sigma^a}{2} A_\mu^a = & \frac{g}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & W_\mu \\ W_\mu^* & 0 \end{pmatrix} + g \sin \theta_W A_\mu \begin{pmatrix} Y + \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & Y - \frac{1}{2} \end{pmatrix} \\ & + \frac{g}{\cos \theta_W} Z_\mu \begin{pmatrix} -(Y + \frac{1}{2}) \sin^2 \theta_W + \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & -(Y - \frac{1}{2}) \sin^2 \theta_W - \frac{1}{2} \end{pmatrix}\end{aligned}$$

に注意すると、

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_{\text{lepton}} = & \bar{l}^u i \gamma \cdot \partial l^u + \bar{l}^d i \gamma \cdot \partial l^d \\ & - \frac{g}{2\sqrt{2}} (W_\mu^* J_{Wl}^\mu + W_\mu J_{Wl}^{\mu*}) - g \sin \theta_W A_\mu J_{Al}^\mu - \frac{g}{4 \cos \theta_W} Z_\mu J_{Zl}^\mu.\end{aligned}$$

ここで、

$$\begin{aligned}J_{Wl}^\mu = & \bar{l}^d \gamma^\mu (1 - \gamma_5) l^u, \quad J_{Al}^\mu = -\bar{l}^d \gamma^\mu l^d, \\ J_{Zl}^\mu = & \bar{l}^u \gamma^\mu (1 - \gamma_5) l^u - \bar{l}^d \gamma^\mu (1 - 4 \sin^2 \theta_W - \gamma_5) l^d\end{aligned}$$

です。  $l^{u(d)} = l_L^{u(d)} + l_R^{u(d)}$  は完全な  $2 + 2^*$  のディラック場で、世代空間における成分を、

$$l^u = \begin{pmatrix} \nu_e \\ \nu_\mu \\ \nu_\tau \end{pmatrix}, \quad l^d = \begin{pmatrix} e \\ \mu \\ \tau \end{pmatrix}$$

とし、順にニュートリノ族および電子族と考えます。そうすると電磁カレント  $J_{Al}^\mu$  の部分に注意して、

$$e = g \sin \theta_W$$

が素電荷ということになります。ニュートリノ族の電荷は 0 で、電子族の電荷が  $-1$  であることがわかります。

また、荷電カレント  $J_{Wl}^\mu$  の部分が粒子の種類を変える弱い相互作用のはずで、4 フェルミ型との比較から、摂動の最低次において、

$$-i \frac{G_F}{\sqrt{2}} = \left( \frac{-ig}{2\sqrt{2}} \right)^2 \frac{-i}{p^2 - M_W^2}, \quad p^2 \ll M_W^2$$

です (図 18.7)。すなわち、4 フェルミ型は実は  $W$  ボソンを媒介とする過程であり、しかし  $W$  ボソンの質量が大きいため、低エネルギーにおいてはその伝播関数が一点に縮んでみえると解釈できるわけです。

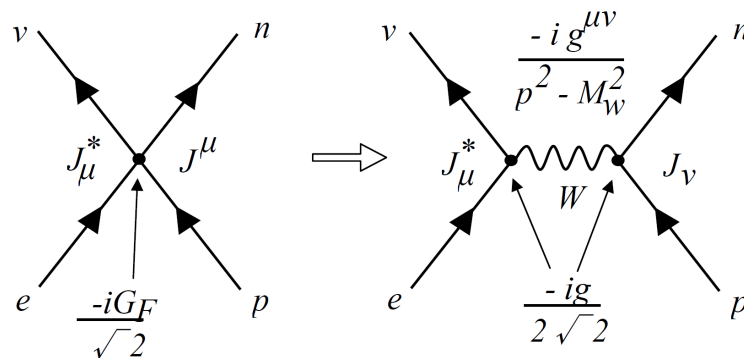


図 18.7: 4 フェルミ型の正体

そうすると  $M_W = gv/2$  だったので、

$$\sqrt{2} G_F v^2 = 1$$

という関係式を得ます。さらに  $G_F$  の近似値を用いると、

$$v \sim 246 \text{ GeV}$$

を得ます。

一方、 $J_{Zl}^\mu$  は中性カレントと呼ばれ、これは粒子の種類を変えません。レプトンの弾性散乱実験から中性カレントの存在と効果が詳しく計測され、それによりワインバーグ角について、

$$\sin^2 \theta_W \sim 0.231$$

という近似値が知られています。これと  $e = g \sin \theta_W \sim 0.303$  から、

$$g \sim 0.630, \quad M_W = \frac{gv}{2} \sim 78 \text{ GeV}, \quad M_Z = \frac{gv}{2 \cos \theta_W} \sim 88 \text{ GeV}$$

がわかり、これらは実際に観測されている  $W$  ボゾンと  $Z$  ボゾンの質量：80 GeV, 91 GeV とおおよそ一致しています。また、高次補正を取り入れるとこれら質量の予言値は 2 ~ 3% 増加することが知られていて、さらによく一致することになります。このことは電弱統一理論の正しさと自発的対称性の破れが実際に起こっていることの証拠の一つと考えられます。

電磁相互作用と弱い相互作用は出発点は同じなのですが、ゲージ場が質量を持たなかった部分が電磁相互作用で、ゲージ場が質量を持った部分が弱い相互作用だというわけです。ウィークボゾンの質量が陽子の質量に比べ非常に大きいため、弱い相互作用は極めて短距離においてしか働かず、電磁相互作用に比べて弱く見えるわけです。

対称性の破れのエネルギースケールが 100 GeV のオーダーであり、これは温度にして  $10^{15}$  ケルビンという途方もない高温であることに注意して下さい。しかしこれを凌ぐ高温が大域的に実現されれば対称性は回復されるはずで、実際、ビッグバン直後の宇宙の極めて初期においては対称性があらわな相 (ウィグナー相： $\langle 0 | \Phi(x) | 0 \rangle = 0$ ) にあったのだらうと考えられています。

## 18.11 質量行列とその対角化

レプトンとヒッグスの相互作用項は、対称性の破れた相で、

$$\mathcal{L}_{l\text{-Higgs}} = -\bar{l}_L^u M_l^u l_R^u - \bar{l}_L^d M_l^d l_R^d + c.c. + O(\phi), \quad M_l^{u(d)} = \frac{v}{\sqrt{2}} \Lambda_l^{u(d)}$$

となり、 $M_l^{u(d)}$  を一般に質量行列といいます。これは世代空間における  $3 \times 3$  複素行列です。一方、もともとのレプトン場  $l_L, l_R^u, l_R^d$  には世代空間におけるユニタリ変換の自由度があるので、3つのユニタリ行列を  $U_1, U_2, U_3$  として、

$$l_L \rightarrow U_1 l_L, \quad l_R^u \rightarrow U_2 l_R^u, \quad l_R^d \rightarrow U_3 l_R^d$$

という場の再定義が可能です。これにより  $M_l^d$  を対角成分が全て非負の実数になるように対角化することができます(\*)。すなわち一般性を失うことなく、

$$M_l^d = \text{diag}(m_e, m_\mu, m_\tau) \quad (m_e, m_\mu, m_\tau \text{ は非負の実数})$$



を仮定できて、

$$\mathcal{L}_{1\text{-Higgs}} = (-\bar{l}_L^u M_l^u l_R^u + c.c.) - m_e \bar{e}e - m_\mu \bar{\mu}\mu - m_\tau \bar{\tau}\tau + O(\phi).$$

のように電子族の質量項が得られます。

(\*注) 一般の複素行列  $A$  に対して  $A^\dagger A$  はエルミート行列でその固有値は非負の実数ですから、あるユニタリ行列  $U$  に対し  $U^\dagger A^\dagger A U = H$  は対角成分が全て非負の実対角行列です。よって  $H^{-1/2} U^\dagger A^\dagger A U H^{-1/2} = 1$  と変形すると  $A U H^{-1/2}$  がユニタリ行列とわかるのでこれを  $U'$  とおくと  $U'^\dagger A U = H^{1/2}$  が得られます。つまり一般の複素行列  $A$  は2つのユニタリ行列で挟むことにより非負の実対角行列に対角化することができます。

## 18.12 ニュートリノ振動

ここでさらにニュートリノ族の質量行列  $M_l^u$  を対角化するには注意が必要です。 $l_L$  はもともと1つの  $SU(2)$  2重項であり、このため  $l_L^u$  のユニタリ変換は  $l_L^d$  と同じ行列  $U_1$  で行われます。しかし  $U_1$  は  $M_l^d$  の対角化のためにすでに使ってしまったので、もはや自由とはみなせないのです。よってこの場合、

$$l^u \rightarrow U_\nu l^u$$

という場の自由度とは別のユニタリ変換を行って、初めて  $M_l^u$  を対角化することができます：

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{1\text{-Higgs}} = & -m_1 \bar{\nu}_1 \nu_1 - m_2 \bar{\nu}_2 \nu_2 - m_3 \bar{\nu}_3 \nu_3 \\ & - m_e \bar{e}e - m_\mu \bar{\mu}\mu - m_\tau \bar{\tau}\tau + O(\phi). \end{aligned}$$

ただしこの場合、レプトンの相互作用のうち荷電カレントだけは、

$$J_{Wl}^\mu = \bar{l}^d \gamma^\mu (1 - \gamma_5) U_\nu l^u$$

と変更されることになります。質量が対角化されたニュートリノ族は、上のように  $\nu_1, \nu_2, \nu_3$  と番号付けで書くのが普通です。弱い相互作用が対角化された元のニュートリノ族との関係は、

$$\begin{pmatrix} \nu_e \\ \nu_\mu \\ \nu_\tau \end{pmatrix} = U_\nu \begin{pmatrix} \nu_1 \\ \nu_2 \\ \nu_3 \end{pmatrix}$$

ということになります。

ニュートリノ族の質量を対角化せず、弱い相互作用(その荷電カレント)を対角化したまま考えた場合、ニュートリノ族は非対角的な質量項によって確率的に振動して移り変わることになります(\*)。この現象をニュートリノ振動といいます。

ニュートリノ振動は、ポンテコルボ (1957) や牧・中川・坂田 (1962) により定式化されたため、ユニタリ行列  $U_\nu$  はポンテコルボ牧中川坂田行列 (PMNS 行列) と呼ばれます。

ただしニュートリノ族については前述のマヨラナ質量項を持つ可能性も考えられ、いまだそのモデルは確証に至っておらず、日本を情報発信基地として実験が繰り返されています。ニュートリノは弱い相互作用しかしないため、透過性が強く、精度を得るためには大規模な装置 (ニュートリノを捕らえるための巨大な水槽とこれを取り巻く多数の高感度カメラ) が必要になるのです。

(\*注) 例えば簡単のため 2 世代の混合だけを考え、

$$|\nu_e\rangle = \cos\theta|\nu_1\rangle + \sin\theta|\nu_2\rangle$$

とし、これが運動量が  $k$  の 1 粒子状態であるとすると、 $\nu_e$  が時間  $T$  後に再び  $\nu_e$  に観測される確率は、系のハミルトニアンを  $H$  として、

$$\begin{aligned} P &= |\langle\nu_e|e^{-iHT}|\nu_e\rangle|^2 = |(\cos\theta\langle\nu_1| + \sin\theta\langle\nu_2|)(\cos\theta e^{-iE_1T}|\nu_1\rangle + \sin\theta e^{-iE_2T}|\nu_2\rangle)|^2 \\ &= |\cos^2\theta e^{-iE_1T} + \sin^2\theta e^{-iE_2T}|^2 = \cos^4\theta + \sin^4\theta + 2\cos^2\theta\sin^2\theta\cos((E_1-E_2)T) \\ &= 1 - \sin^2(2\theta)\sin^2\frac{(E_1-E_2)T}{2} \end{aligned}$$

と計算されます。ここで  $E_i = \sqrt{|\mathbf{k}|^2 + m_i^2}$  です。特に超相対論的:  $|\mathbf{k}| \gg m_i$  の場合、

$$P \sim 1 - \sin^2(2\theta)\sin^2\frac{(m_1^2 - m_2^2)L}{4|\mathbf{k}|}$$

となります。ここで  $L$  ( $\sim T$ ) はニュートリノが飛行した距離を意味します。

## 18.13 クォークの相互作用

クォークについても事情はレプトンと同様です。

クォークのラグランジアン密度において共変微分を展開すると、

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{\text{quark}} &= \bar{q}_L i\gamma \cdot \nabla q_L + \bar{q}_R^u i\gamma \cdot \nabla q_R^u + \bar{q}_R^d i\gamma \cdot \nabla q_R^d \\ &\quad - \bar{q}_L \gamma^\mu \left( g' \frac{1}{6} B_\mu + g \frac{\sigma^a}{2} A_\mu^a \right) q_L - \bar{q}_R^u \gamma^\mu g' \frac{2}{3} B_\mu q_R^u - \bar{q}_R^d \gamma^\mu g' \left( -\frac{1}{3} \right) B_\mu q_R^d. \end{aligned}$$

ここで  $\nabla_\mu$  はカラー  $SU(3)$  の部分だけを含む共変微分で、

$$\nabla_\mu = \partial_\mu + ig_c \frac{\lambda^a}{2} G_\mu^a$$

です。  $SU(2)$  2重項である  $q_L$  を、

$$q_L = \begin{pmatrix} q_L^u \\ q_L^d \end{pmatrix}$$

とおき、レプトンのところで示した  $g'YB_\mu$  および  $g'YB_\mu + g(\sigma^a/2)A_\mu^a$  に関する展開式を用いると、

$$\mathcal{L}_{\text{quark}} = \bar{q}^u i\gamma \cdot \nabla q^u + \bar{q}^d i\gamma \cdot \nabla q^d - \frac{g}{2\sqrt{2}}(W_\mu^* J_{Wq}^\mu + W_\mu J_{Wq}^{\mu*}) - g \sin \theta_W A_\mu J_{Aq}^\mu - \frac{g}{4 \cos \theta_W} Z_\mu J_{Zq}^\mu,$$

$$J_{Wq}^\mu = \bar{q}^d \gamma^\mu (1 - \gamma_5) q^u, \quad J_{Aq}^\mu = \frac{2}{3} \bar{q}^u \gamma^\mu q^u - \frac{1}{3} \bar{q}^d \gamma^\mu q^d,$$

$$J_{Zq}^\mu = \bar{q}^u \gamma^\mu \left(1 - \frac{8}{3} \sin^2 \theta_W - \gamma_5\right) q^u - \bar{q}^d \gamma^\mu \left(1 - \frac{4}{3} \sin^2 \theta_W - \gamma_5\right) q^d$$

のように、荷電カレント、電磁カレント、中性カレントを得ます。ここで  $q^{u(d)} = q_L^{u(d)} + q_R^{u(d)}$  であり、世代空間における成分を、

$$q^u = \begin{pmatrix} u \\ c \\ t \end{pmatrix}, \quad q^d = \begin{pmatrix} d' \\ s' \\ b' \end{pmatrix}$$

とおきます。

一方、クォークとヒッグスの相互作用項は、

$$\mathcal{L}_{\text{q-Higgs}} = -\bar{q}_L^u M_q^u q_R^u - \bar{q}_L^d M_q^d q_R^d + c.c. + O(\phi), \quad M_q^{u(d)} = \frac{v}{\sqrt{2}} \Lambda_q^{u(d)}.$$

世代空間におけるユニタリ変換の自由度と、それとは別のユニタリ変換  $q^d \rightarrow U_q q^d$  を用いて質量行列を対角化すれば、クォークの質量項、

$$\mathcal{L}_{\text{q-Higgs}} = -m_u \bar{u}u - m_c \bar{c}c - m_t \bar{t}t - m_d \bar{d}d - m_s \bar{s}s - m_b \bar{b}b + O(\phi)$$

を得ます。ただし荷電カレントは、

$$J_{Wq}^\mu = \bar{q}^d U_q^\dagger \gamma^\mu (1 - \gamma_5) q^u$$

と変更され、弱い相互作用に世代混合を生じます。

質量を対角化したとき、ダッシュを取り除き  $q^d = (d, s, b)^T$  としたことに注意してください。クォークはニュートリノとは異なり電磁相互作用や強い相互作用をするため、観測時は必ず質量が対角化されていると考えられるので、弱い相互作用を対角化する表示にはあまり意味がありません。ユニタリ行列  $U_q$  は先に述べたCKM行列に他なりません。

## 18.14 CP の破れ

空間反転してなおかつ粒子反粒子を入れ換える CP は、相対論的場の理論においては本当の意味での空間反転と考えられるものです。それゆえ CP 対称性は当然自然界が保有している対称性と信じられていたわけですが、弱い相互作用においては CP がわずかに破れていることが実験的にわかっています。鏡にうつった世界は、粒子反粒子を逆に考えれば、ほとんどこの世界と同じ法則にのっとっているのですが、ほんのわずかに違うというわけです。

例えば、

$$|K^0\rangle = |d\bar{s}\rangle, \quad |\bar{K}^0\rangle = |s\bar{d}\rangle, \quad CP|q_f\bar{q}_{f'}\rangle = -|q_{f'}\bar{q}_f\rangle$$

から、

$$CP|K^0\rangle = -|\bar{K}^0\rangle, \quad CP|\bar{K}^0\rangle = -|K^0\rangle$$

ですから、

$$|K_{\pm}^0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|K^0\rangle \mp |\bar{K}^0\rangle)$$

を定義すると、これらは  $CP = \pm 1$  の固有状態です。ところが  $K_{\pm}^0$  はわずかな確率で  $CP = +1$  の状態である  $\pi^0\pi^0$  や  $\pi^+\pi^-$  に崩壊するのです (クローニン・フィッチ 1964)。

標準模型 (特にそのクォークセクター) が CP を破るためには、CKM 行列が実行列でなければよいことが次のようにしてわかります。

[証明] 一般に2つのディラック場  $\psi_1, \psi_2$  について、

$$(\bar{\psi}_1\gamma^\mu(\gamma_5)\psi_2)^{CP} = \bar{\psi}_1^*\gamma_\mu^*(\gamma_5)\psi_2^*$$

であったことに注意します。SU(2) ゲージ場  $A_\mu^a$  に対して、その行列表示：

$$A_\mu = \sigma^a A_\mu^a = \begin{pmatrix} A_\mu^3 & \sqrt{2}W_\mu \\ \sqrt{2}W_\mu^* & -A_\mu^3 \end{pmatrix}$$

を定義すると、SU(2) 2重項のディラック場  $\psi$  に対し、

$$(\bar{\psi}\gamma^\mu A_\mu\psi)^{CP} = \bar{\psi}^*\gamma_\mu^* A_\mu^{CP}\psi^* = -\psi^\dagger\gamma_\mu^\dagger A_\mu^{CPT}\bar{\psi}^\dagger = -\bar{\psi}\gamma_\mu A_\mu^{CPT}\psi$$

となるので、 $\bar{\psi}\gamma^\mu A_\mu\psi$  の CP 不変性から、 $A_\mu^{CP} = -A^{\mu T}$ . よって、

$$W_\mu^{CP} = -W^{\mu*}$$

です。クォークの荷電カレントと W ボゾンの結合項は、

$$\mathcal{L}_{Wq} = -\frac{g}{2\sqrt{2}} (W_\mu^* J_{Wq}^\mu + W_\mu J_{Wq}^{\mu*}), \quad J_{Wq}^\mu = \bar{q}^d U_q^\dagger \gamma^\mu (1 - \gamma_5) q^u$$

でしたが、

$$(W_\mu^* J_{Wq}^\mu)^{\text{CP}} = -W^\mu \bar{q}^{d*} U_q^\dagger \gamma_\mu^* (1 - \gamma_5) q^{u*} = W_\mu (\bar{q}^d U_q^T \gamma^\mu (1 - \gamma_5) q^u)^*.$$

一方で、 $W_\mu J_{Wq}^{\mu*} = W_\mu (\bar{q}^d U_q^\dagger \gamma^\mu (1 - \gamma_5) q^u)^*$  ですから、これらを比較して、 $\mathcal{L}_{Wq}$  の CP 不変性は  $U_q^* = U_q$  と同値であることがわかります。[証明終]

ここで仮に世代数が  $n$  だと考えてみましょう。そうすると  $U_q$  は  $n$  次ユニタリ行列ですから、その実自由度は本来  $n^2$  です。しかし  $q^u$  と  $q^d$  の各世代成分 ( $2n$  個ある) が位相変換を行っても質量の対角化は保たれるので、この自由度を用いて  $U_q$  の自由度を減らせます。ただしこれら位相変換が全て同一の場合は  $U_q$  に変化を与えないので、結局、 $U_q$  の実質的な実自由度は、

$$n^2 - (2n - 1) = (n - 1)^2$$

であると考えられます。一方、 $n$  次直交行列の実自由度は  $n(n - 1)/2$  なので、

$$(n - 1)^2 - \frac{n(n - 1)}{2} = \frac{(n - 1)(n - 2)}{2} > 0$$

が CP の破れの条件になります。すなわち  $n \geq 3$  です。世代数が 3 以上なら標準模型は自然に CP を破ると考えられるわけです (小林・益川 1973)。

ちなみに  $Z$  ボゾンの崩壊幅の精密測定によれば、4 世代目はまずないだろうと考えられています。もしあったとしたら  $\nu_4$  の質量は  $M_Z/2$  より大きくなければいけません。すなわち  $> 45$  GeV です。これは少々不自然です。また、クォーク閉じ込めを実現すると考えられる QCD の漸近的自由性は、クォークのフレーバー数  $\leq 16$  を必要とします。すなわち仮に新しい世代があったとしても、それは 8 世代までであることは確定的です。

(余談) 小林と益川が CP の破れから 3 世代目のクォークの存在を提唱したのは 1973 年ですが、加速器実験においてチャームクォークが発見されたのは翌年の 1974 年です。実験ではまだ 2 世代目のクォークすら出揃っていない時に、理論においてはすでに 3 世代目のクォークの必要性が唱えられていたわけです。3 世代目のレプトンである  $\tau$  粒子の発見は 1975 年、ボトムクォークの発見は 1977 年、トップクォークの発見は 1995 年です。小林と益川が 2008 年によようやくノーベル賞を受賞したのに対し、イタリア人のカビボにノーベル賞が与えられることはなく、カビボは 2010 年に亡くなっています。これを公平でないと考える人は少なくないようです。

## 18.15 ヒッグス粒子

ヒッグス場  $\Phi(x)$  のラグランジアン密度は、

$$\mathcal{L}_{\text{Higgs}} = (D_\mu \Phi)^\dagger D^\mu \Phi - U(\Phi^\dagger \Phi)$$

でした。ここでは簡単のため、

$$U(\Phi^\dagger\Phi) = a\Phi^\dagger\Phi + b(\Phi^\dagger\Phi)^2$$

というような2次関数のポテンシャルを考えましょう。特に  $a < 0$  (南部・ゴールドストーン相) の場合、

$$\Phi(x) = \frac{v}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \phi_1(x) \\ \phi_2(x) \end{pmatrix}$$

とおき、複素数場  $\phi_i(x)$  を定義します。このとき、

$$U(\Phi^\dagger\Phi) = \frac{v^2}{4}(2a + bv^2) + \sqrt{2}v(a + bv^2) \operatorname{Re} \phi_2 \\ + (a + bv^2)(|\phi_1|^2 + |\phi_2|^2) + 2bv^2(\operatorname{Re} \phi_2)^2 + \dots$$

を得るでしょう。ここで  $\dots$  は場の3次以上の項、すなわち相互作用項を意味します。

場の1次の項が消えるよう、実数  $v$  は、

$$a + bv^2 = 0$$

を満たすよう選ばれるわけですが、このとき、

$$U(\Phi^\dagger\Phi) = -\frac{bv^4}{4} + 2bv^2(\operatorname{Re} \phi_2)^2 + \dots$$

一方、

$$(D_\mu\Phi)^\dagger D^\mu\Phi = \partial_\mu\phi_1^* \partial^\mu\phi_1 + \partial_\mu\phi_2^* \partial^\mu\phi_2 + \dots$$

ここで  $\dots$  はゲージ場を含む項を意味します。よって結局、

$$\mathcal{L}_{\text{Higgs}} = \frac{bv^4}{4} + \partial_\mu\phi_1^* \partial^\mu\phi_1 + \partial_\mu\phi_2^* \partial^\mu\phi_2 - 2bv^2(\operatorname{Re} \phi_2)^2 + \dots$$

あるいは、複素数場  $\phi_2(x)$  を、

$$\phi_2(x) = \frac{1}{\sqrt{2}} (\varphi(x) + i\chi(x))$$

のように2つの実数場  $\varphi(x)$ ,  $\chi(x)$  で表せば、

$$\mathcal{L}_{\text{Higgs}} = \frac{bv^4}{4} + \partial_\mu\phi_1^* \partial^\mu\phi_1 + \frac{1}{2}(\partial\chi)^2 + \frac{1}{2}(\partial\varphi)^2 - bv^2\varphi^2 + \dots$$

となります。複素数場  $\phi_1(x)$  と実数場  $\chi(x)$  は質量項を持たず、いわゆる南部・ゴールドストーンボゾンの場と考えられますが、これらの場の粒子は非物理的モードとなり、原理的に観測できないことが証明されます。これは QED において縦

波やスカラーモードの光子が非物理的モードになることと同様なメカニズムです (詳しくはゲージ場の量子論の章参照)。

一方、実数場  $\varphi(x)$  の場の粒子は物理的モードにあって、質量  $\sqrt{2b}v$  を持つことがわかります。これをヒッグス粒子といいます。2011 ~ 2013 年の加速器実験でヒッグス粒子の存在が確かめられ、その質量が (125 ~ 126) GeV にあることが判明しています。すなわち  $b \sim 0.13$  です。

## 18.16 1重項ヒッグス場の導入

素粒子標準模型についてはここまでで述べた通りですが、ここでは標準模型の素朴で簡単な拡張として、 $SU(2)$  1重項で超電荷  $y$  のスカラー場  $S(x)$  の導入を考えてみましょう。これを1重項ヒッグス場と呼ぶことにします。そのラグランジアン密度は、

$$\mathcal{L}_S = (D^\mu S)^* D_\mu S - U_S(S^* S), \quad D_\mu S = \partial_\mu S + ig'y B_\mu S.$$

2重項ヒッグス場  $\Phi(x)$  とは異なり、1重項ヒッグス場  $S(x)$  はレプトンやクォークの場と結合できません。なぜならもしそのような結合があるなら、ローレンツ対称性、および  $SU(2)$  ゲージ対称性の要請から、 $S \bar{l}_L l_L$  や  $S \bar{l}_R^{u(d)} l_R^{u(d)}$  のような形しかあり得ませんが、一般にディラック場  $\psi(x)$  に対し  $\bar{\psi}_L \psi_L = \bar{\psi}_R \psi_R = 0$  だからです。ただし厳密には、 $S \bar{l}_R^{u(d)C} l_R^{u(d)}$  という結合だけは上の対称性の要求を満たしますが、このような結合はマヨラナ質量項と同様、粒子数を破るので、ここでは考えないことにします。

拡張された標準模型のラグランジアン密度は、

$$\mathcal{L}'_{\text{SM}} = \mathcal{L}_{\text{SM}} + \mathcal{L}_S.$$

標準模型の理念からすると、1重項ヒッグス場の存在は極めて自然であることに注意してください。レプトンやクォークに  $SU(2)$  2重項と1重項がそれぞれあるのに対し、ヒッグスだけが2重項だけというのは、どちらかといえば不自然であり、また一般的ではありません。1重項ヒッグス場もあるのだが、しかしその存在は観測されにくいと考えた方が自然です。

例えば  $y = 0$  の場合を考えると、1重項ヒッグス場は他の場と一切相互作用をしないことになり、重力以外でこれを感知することができないことになります。このような場の粒子は標準宇宙論で存在が仮定されているダークマターの候補になり得るものです (宇宙論の章参照)。

一方、 $y \neq 0$  の場合、1重項ヒッグス場は他の場と相互作用することになるので、その場の粒子は現在の高エネルギー加速器では発見できないくらい大きな質量を持つものと考えられます。しかしもし“超低温領域”が大域的に実現されれば、1

重項ヒッグス場の有効質量は小さくなり、さらに低温では真空が相転移し、南部・ゴールドストーン相：

$$S(x) = \frac{u}{\sqrt{2}} + s(x), \quad \langle 0|s(x)|0 \rangle = 0$$

が実現される可能性があります。この超低温相において何が起こるのかを考えてみましょう。

上の相において、2つのヒッグス場のラグランジアン密度は、それぞれ、

$$\mathcal{L}_{\text{Higgs}} = \frac{v^2}{8} (g'B - gA^3)^2 + (B_\mu, A_\mu^3 \text{ を含まない項}),$$

$$\mathcal{L}_S = \frac{(ug'y)^2}{2} B \cdot B + (B_\mu, A_\mu^3 \text{ を含まない項})$$

と展開されるので、 $B_\mu$  と  $A_\mu^3$  が混合しています。これを対角化するために、

$$\begin{pmatrix} A_\mu^3 \\ B_\mu \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta_W & \sin \theta_W \\ -\sin \theta_W & \cos \theta_W \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Z_\mu \\ A_\mu \end{pmatrix}$$

で  $Z_\mu, A_\mu$  を定義するわけですが、そうすると、

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{\text{Higgs}} &= \frac{v^2}{8} (g' \cos \theta_W - g \sin \theta_W)^2 A \cdot A \\ &\quad - \frac{v^2}{4} (g' \sin \theta_W + g \cos \theta_W)(g' \cos \theta_W - g \sin \theta_W) A \cdot Z + (A_\mu \text{ を含まない項}), \end{aligned}$$

$$\mathcal{L}_S = \frac{(g'yu)^2}{2} \cos^2 \theta_W A \cdot A - (g'yu)^2 \sin \theta_W \cos \theta_W A \cdot Z + (A_\mu \text{ を含まない項})$$

を得るので、混合項が消える条件は、

$$\frac{v^2}{4} (g' \tan \theta_W + g)(g' - g \tan \theta_W) + (g'yu)^2 \tan \theta_W = 0$$

となり、これがワインバーグ角  $\theta_W$  の条件式になります。もし1重項ヒッグス場の真空期待値が0で、 $u = 0$  なら、上式は  $\tan \theta_W = g'/g$  を与え、これは通常のワインバーグ角です。しかし  $u \neq 0$  においては、そうはならなくなります。

いま、少なくとも相転移直後（臨界点近く）では  $(u/v)^2 \ll 1$  が妥当と考えられるので、これを仮定し、また、

$$\tan \theta_W = \frac{g'}{g} (1 + 4\alpha)$$

とおきます。ただし  $\alpha$  は  $(u/v)^2$  と同程度の十分小さな摂動とし、これらの高次項は無視するものとします。そうすると、

$$\alpha = \frac{(g'yu/v)^2}{g'^2 + g^2}$$



を得るでしょう。これが通常のワインバーグ角からのずれを意味する、オーダーパラメータになります。この結果、ラグランジアン密度における  $A \cdot A$  の項の係数は、やはり  $\alpha$  と  $(u/v)^2$  の高次項を無視し、

$$\frac{v^2}{8} (g' \cos \theta_W - g \sin \theta_W)^2 + \frac{(g'yu)^2}{2} \cos^2 \theta_W = \frac{\alpha(gv)^2}{2}$$

となります。すなわち、4元ポテンシャル  $A_\mu$  が質量項を持ち、その質量は、

$$m_\gamma = \sqrt{\alpha}gv = \frac{g'gyu}{\sqrt{g'^2 + g^2}}$$

となります。1重項ヒッグス場に関する相転移で、残りの  $U(1)$  ゲージ対称性も破れ、光子が質量を獲得することになるわけです。

また、レプトンのラグランジアン密度は、共変微分を展開して、

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{\text{lepton}} = & \bar{l}_L i \gamma \cdot \partial l_L + \bar{l}_R^u i \gamma \cdot \partial l_R^u + \bar{l}_R^d i \gamma \cdot \partial l_R^d \\ & - \bar{l}_L \gamma^\mu \left( g' \left( -\frac{1}{2} \right) B_\mu + g \frac{\sigma^a}{2} A_\mu^a \right) l_L - \bar{l}_R^d \gamma^\mu (g'(-1)B_\mu) l_R^d \end{aligned}$$

ですが、今の場合、

$$\begin{aligned} g'Y B_\mu = & g' \cos \theta_W Y A_\mu + (A_\mu \text{ を含まない項}), \\ g'Y B_\mu + g \frac{\sigma^a}{2} A_\mu^a = & g' \cos \theta_W \left( Y + \frac{\sigma^3}{2} (1 + 4\alpha) \right) A_\mu + (A_\mu \text{ を含まない項}) \end{aligned}$$

であることに注意して、

$$\mathcal{L}_{\text{lepton}} = -g' \cos \theta_W A_\mu J_{Al}^\mu + (A_\mu \text{ を含まない項}).$$

ここで、

$$\begin{aligned} J_{Al}^\mu = & 2\alpha \bar{l}_L^u \gamma^\mu l_L^u + (-1 - 2\alpha) \bar{l}_L^d \gamma^\mu l_L^d + (-1) \bar{l}_R^d \gamma^\mu l_R^d \\ = & \bar{l}^u \gamma^\mu (\alpha - \alpha \gamma_5) l^u + \bar{l}^d \gamma^\mu (-1 - \alpha + \alpha \gamma_5) l^d \end{aligned}$$

はレプトンの電磁カレントです。すなわち今考えている相においては、ニュートリノ族が帯電し、また電子族についても軸性部分 ( $\gamma_5$  を含む項) が生じ、電磁相互作用がパリティを破ることになります。

このように現在の宇宙とはまったく異なる相が超低温において実現される可能性があるというのは興味深いでしょう。現在の宇宙の輻射温度はおよそ 2.7 K で、大域的に実現された低温としては銅の電子系において  $\sim 10^{-5}$  K といった記録があります。ここで述べた拡張された標準模型は、さらにもっと低温において、真空

の相転移が起こり、光子が質量を獲得し、ニュートリノが帯電する可能性があることを示唆しているわけです。

また、超低温の実現でなくても、高エネルギー加速器によって1重項ヒッグス粒子を発見することによっても、この理論の検証は可能です。検証のために超低温と超高エネルギーという相対する二つのアプローチがあるというのも、なかなか面白いことです。

(余談) 1重項ヒッグス場を含む標準模型の研究は独自に行ったものですが、素朴で簡単な模型なので、一部では知られている可能性が高いと思われます。

## 18.17 さらに統一

素粒子標準模型は電磁力と弱い相互作用を電弱力として統一する理論でしたが、さらに強い相互作用をも統一する大統一理論 (GUT = Grand Unified Theory) としては、超対称性をもつ  $SU(5)$  ゲージ理論が結合定数に関するくりこみ群の考察からもっともらしいと考えられています。これはレプトンとクォークを統一する理論でもあり、そこではゲージ対称性が、

$$SU(5) \rightarrow U(1)_Y \times SU(2) \times SU(3)$$

と自発的に破れることにより標準模型が演繹されます。この対称性の破れのスケールはおよそ  $10^{15}$  GeV と考えられています。

しかしこうした大統一理論においても、理論に含まれる沢山の定数(ヒッグスとの結合定数)の由来は、標準模型と同様、説明されません。また、どうして世代が存在するかについても答えてはくれません。それゆえ標準模型からの抜本的な飛躍にはなっていないのです。

重力を含めた統一理論、すなわち量子重力理論については、点粒子が重力相互作用する単純な一般相対論の量子化では、くりこみ不可能であったり致命的なローカルアノマリーを持つなどして上手くいかないことがわかり(ウィッテン・アルバレゴメ 1982)、ハドロンひも模型を改良した超ひも理論が有力候補であろうと考えられています。これは10次元時空においてアノマリーを持たないことが証明され、理論として無矛盾になり得ることがわかっています(グリーン・シュワルツ 1984)。もともとのハドロンひも模型においては、開いたひもでスピン1, 閉じたひもでスピン2の零質量モードを生じることが知られていたため、これらモードをゲージ粒子と重力子だと考えれば、量子重力を含む完全な統一理論、すなわち万物の理論 (TOE = Theory Of Everything) になるのではないかと考えたわけです(詳しくはひも理論入門の章参照)。

しかし余分な次元がどのようにコンパクト化しているかなどの問題(カラビ・ヤウ多様体の問題)があり、なかなか標準模型を演繹することは難しいようです。こ

のことは超ひも理論と関係が深い11次元超重力理論にもいえ、一般に多次元統一理論の特徴であり、難点です。このような理論からは物理的に意味のある結果を得ることが恐ろしく難しいのです。しかしながら標準模型や大統一理論に含まれる多くの定数が時空の余分な次元の構造に由来しているという考えは魅力的で、多次元時空は統一理論家の必須アイテムになっています。

一番日常的で身近な重力相互作用が、統一理論においては予想以上に高い障壁になっているのです。電弱統一のエネルギースケールは  $10^2$  GeV でした。量子重力のエネルギースケールは  $G^{-1/2} \sim 10^{19}$  GeV です ( $G$  は万有引力定数)。相対論的場の量子論がこんな桁違いなスケールにわたって広く適用できると考えるのは楽観的すぎるのではないか、という意見も出ているようです。このことは  $10^{15}$  GeV をエネルギースケールとする大統一理論についてもいえます。

# 索引

あ	
アイソスピン	12
アップ	8
アノマリー	20
1重項ヒッグス場	31
いにしえ素粒子論	8
ウィークボゾン	21
か	
核力	6
GUT	34
荷電カレント	5, 23
荷電独立性	6
カビボ角	16
カビボ小林益川行列	17
カラー	9
カレント-カレント型	4
QCD	9
QCD 起源	13
極小相互作用	22
クォーク	8
グルーオン	9
原子	3
原子核	3
格子ゲージ理論	9
構造定数	5
小林益川行列	17
さ	
3-3 共鳴	11
CKM 行列	17
CP の破れ	28
質量行列	24
Z ボゾン	21
ストレンジ	8
ストレンジネス	12
ストレンジ粒子	9
スファレロン	6
世代	8
世代構造	6
前期素粒子論	8
素電荷	23
素粒子標準模型	17
素粒子論	3
た	
ダークマター	31
大統一理論	20, 34
粒子	10
ダウン	8
W ボゾン	21
チャーム	8
中性カレント	24
中性子	3
中性微子	3
超電荷	18
超ひも理論	34
強い相互作用	6
電子	3
電磁カレント	23
電弱起源	13
電弱統一理論	17
トップ	8
な	
内部量子数	14
二中間子論	8
ニュートリノ	3
ニュートリノ振動	25
は	
ハイパーチャージ	18
粒子	6
ハドロン	8
ハドロンひも模型	9
バリオン	5
バリオン 10 重項	11
バリオン 8 重項	11
パリティの破れ	5
万物の理論	34
PMNS 行列	26
ヒッグス起源	13
ヒッグス場	18
標準模型	17

V-A 型	5
V 粒子	9
フェルミの結合定数	4
4 フェルミ型	4
フレーバー	9
崩壊	3
崩壊定数	7
ボトム	8
ポンテコルボ牧中川坂田行列	26
<hr/>	
ま	
$\mu$ 粒子	6
メソン	8
<hr/>	
や	
湯川型	6
陽子	3
陽電子	7
弱い相互作用	4
4 フェルミ型	4
<hr/>	
ら	
量子異常	20
量子色力学	9
量子重力理論	34
レプトン	5
<hr/>	
わ	
ワインバーグ角	21