

# あもんノート

ユークリッド幾何学、ニュートン力学から、相対論、量子論、素粒子論、宇宙論、そして超ひも理論まで、理論物理学を簡潔にかつ幅広く網羅したノートです。TOP へは下の URL をクリックして行けます。専用の画像掲示板で、ご意見、ご質問等も受け付けております。

<http://amonphys.web.fc2.com/>

# 目次

第8章	電磁気学	3
8.1	特殊相対論の基礎方程式	3
8.2	電場と磁場	4
8.3	電磁場のローレンツ変換	5
8.4	運動方程式の空間ベクトル表記	6
8.5	マックスウェル方程式の空間ベクトル表記	7
8.6	クーロン力とアンペール力	8
8.7	電圧とオームの法則	10
8.8	キルヒホッフの法則と電磁誘導	12
8.9	電磁場のエネルギーと運動量	13
8.10	ダランベルシアンと遅延ポテンシャル	14
8.11	クーロンの法則とビオ・サバールの法則	15
8.12	電磁波	17
8.13	光のドップラー効果	18
8.14	分極と磁化	19
8.15	巨視的電磁気学	20
8.16	コンデンサとコイル	21
8.17	RLC回路	22
8.18	双極子が受ける力とポテンシャル	24
8.19	双極子が作る電磁場	25
8.20	リエナール・ヴィーヘルトポテンシャル	26
8.21	質量のくりこみとローレンツ摩擦力	27
8.22	SIとCGS単位系	29

# 第8章 電磁気学

ここでは特殊相対論から空間ベクトル表記の電磁気学を演繹します。また、マックスウェル方程式の一般解と巨視的な電磁気学について簡単に触れ、電磁気学の基礎を与えます。電磁気学は歴史的には相対論の発見より先にほとんど確立していたのですが、その整合性には相対論が必要であり、よって理論的には相対論の中に属すると考えます。真空中の光速を  $c$ , クーロン定数を  $1/(4\pi\epsilon_0)$  とする自然単位系を用います。

## 8.1 特殊相対論の基礎方程式

時空のローレンツ座標を  $x^\mu = (t, \mathbf{r})_\mu$  とします。  $t$  は時間座標、  $\mathbf{r}$  は空間座標です。粒子の運動方程式は、ローレンツ座標において、

$$m_n \frac{du_n^\mu}{d\tau_n} = q_n F^\mu{}_\nu(x_n) u_n^\nu.$$

ここで  $u_n^\mu = dx_n^\mu/d\tau_n$  は粒子の固有速度、  $\tau_n$  は固有時間です。  $m_n$  は粒子の質量、  $q_n$  は電荷です。

$$F_{\mu\nu}(x) = \partial_\mu A_\nu(x) - \partial_\nu A_\mu(x)$$

は電磁場で、マックスウェル方程式、

$$\partial_\mu F^{\mu\nu}(x) = j^\nu(x)$$

に従います。ここで、

$$j^\mu(x) = \sum_n q_n \int dx_n^\mu \delta^4(x - x_n) = \sum_n q_n v_n^\mu \delta^3(\mathbf{r} - \mathbf{r}_n) \Big|_{t_n=t}$$

は4元電流密度であり、これは保存カレントでした： $\partial_\mu j^\mu = 0$ 。このことは電荷の保存を意味します。 $v_n^\mu = dx_n^\mu/dt_n$  は粒子の座標速度です。

これら方程式は、ローレンツ変換に対して不変(共変)であるのみならず、

$$A'_\mu(x) = A_\mu(x) + \partial_\mu \chi(x)$$

という4元ポテンシャルの変換に対しても不変です。これをゲージ変換といいます。実際、ゲージ変換は電磁場  $F_{\mu\nu}(x)$  を不変に保つので、特殊相対論の基礎方

程式は明らかに不変です。観測等により決定されるのは電磁場であり、4元ポテンシャルではないわけです(少なくとも古典論においては)。

$\chi(x)$  はゲージ関数と呼ばれますが、これは任意の場であり、よってこの変換は時空の各点で自由に行えます。このような変換は局所的(ローカル)であると呼ばれます。対してローレンツ変換のように変換パラメータが時空の座標に依らない場合、その変換は大域的(グローバル)であると呼ばれます。ローカルな変換に対して不変な理論は場の自由度がその分だけ余計だと考えられるため、この不変性を利用して場を減らしたり束縛することができます。

## 8.2 電場と磁場

電磁場  $F_{\mu\nu}$  は定義から反対称テンソルであるため、その独立な成分は6個です。これを、

$$F_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & E^1 & E^2 & E^3 \\ -E^1 & 0 & -B^3 & B^2 \\ -E^2 & B^3 & 0 & -B^1 \\ -E^3 & -B^2 & B^1 & 0 \end{pmatrix}_{\mu\nu}$$

とおき、 $E^i$  を電場、 $B^i$  を磁場(あるいは磁束密度)とといいます。これはすなわち、

$$F_{0i} = E^i, \quad F_{ij} = -\epsilon_{ijk} B^k$$

ということです。 $\epsilon_{ijk}$  は3次元レビ・チビタ。公式  $\epsilon_{ijk}\epsilon_{ilm} = \delta_l^j\delta_m^k - \delta_m^j\delta_l^k$  に注意すれば、後式は逆に解くことができます：

$$B^k = -\frac{1}{2}\epsilon_{kij}F_{ij}.$$

これらと電磁場の定義  $F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$  から、

$$E^i = \partial_0 A_i - \partial_i A_0 = -\partial_0 A^i - \partial_i A^0,$$

$$B^k = -\frac{1}{2}\epsilon_{kij}(\partial_i A_j - \partial_j A_i) = -\epsilon_{kij}\partial_i A_j = \epsilon_{kij}\partial_i A^j.$$

あるいは空間ベクトル表記で、

$$\mathbf{E} = -\nabla A^0 - \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}, \quad \mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$$

となります。上付き添字を標準位置として空間ベクトル表記したことに注意。ただしナブラは例外で、 $(\nabla)_i = \partial_i$  です。 $A^0$  はスカラーポテンシャル、 $\mathbf{A}$  はベクトルポテンシャルと呼ばれます。

### 8.3 電磁場のローレンツ変換

ローレンツ座標  $x^\mu$  に対して、 $x^1$  方向への速度  $v$  のブーストは、

$$x'^\mu = \begin{pmatrix} \gamma & -\gamma v & 0 & 0 \\ -\gamma v & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}_{\mu\nu} x^\nu, \quad \gamma = \frac{1}{\sqrt{1-v^2}}$$

でした。逆変換式は、

$$x^\mu = \begin{pmatrix} \gamma & \gamma v & 0 & 0 \\ \gamma v & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}_{\mu\nu} x'^\nu$$

となります。

電磁場  $F_{\mu\nu}$  はテンソルなので、その変換式は、

$$F'_{\mu\nu} = \frac{\partial x^\rho}{\partial x'^\mu} \frac{\partial x^\sigma}{\partial x'^\nu} F_{\rho\sigma}$$

ですが、行列表記すると、

$$\begin{pmatrix} 0 & E'^1 & E'^2 & E'^3 \\ -E'^1 & 0 & -B'^3 & B'^2 \\ -E'^2 & B'^3 & 0 & -B'^1 \\ -E'^3 & -B'^2 & B'^1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma & \gamma v & 0 & 0 \\ \gamma v & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} 0 & E^1 & E^2 & E^3 \\ -E^1 & 0 & -B^3 & B^2 \\ -E^2 & B^3 & 0 & -B^1 \\ -E^3 & -B^2 & B^1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \gamma & \gamma v & 0 & 0 \\ \gamma v & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

行列の積を計算して、電場と磁場のローレンツ変換式として、

$$\begin{aligned} E'^1 &= E^1, & E'^2 &= \gamma(E^2 - vB^3), & E'^3 &= \gamma(E^3 + vB^2), \\ B'^1 &= B^1, & B'^2 &= \gamma(B^2 + vE^3), & B'^3 &= \gamma(B^3 - vE^2) \end{aligned}$$

を得るでしょう。電場と磁場はローレンツ変換においてこのように入り混じって変換されます。例えばあるローレンツ系である点に電場がなく磁場だけという場合でも、別のローレンツ系ではその点に電場があったりするわけです。

## 8.4 運動方程式の空間ベクトル表記

粒子の運動方程式に  $d\tau_n/dt_n$  をかければ、

$$m_n \frac{du_n^\mu}{dt_n} = q_n F^\mu{}_\nu v_n^\nu$$

ですが、その空間成分 ( $\mu = i$ ) は、

$$F^i{}_\nu v_n^\nu = F^i{}_0 v_n^0 + F^i{}_j v_n^j = F_{0i} - v_n^j F_{ij} = E^i + v_n^j \epsilon_{ijk} B^k$$

に注意して、

$$m_n \frac{d\mathbf{u}_n}{dt_n} = q_n \mathbf{E} + q_n \mathbf{v}_n \times \mathbf{B}$$

となります。これと、

$$u_n^i = \frac{dx_n^i}{d\tau_n} = \frac{dx_n^i}{dt_n} \frac{dt_n}{d\tau_n} = \frac{v_n^i}{\sqrt{1 - v_n^j v_n^j}} \quad \therefore \mathbf{u}_n = \frac{\mathbf{v}_n}{\sqrt{1 - |\mathbf{v}_n|^2}}$$

という関係を用いれば、与えられた電場と磁場の中での粒子の運動が決定します。このとき運動方程式の時間成分 ( $\mu = 0$ ) は自動的に満たされます。運動方程式の時間成分の代わりに上式を用いるわけです。

あるいは、

$$\mathbf{F}_n = q_n \mathbf{E} + q_n \mathbf{v}_n \times \mathbf{B}$$

で  $n$  番目の粒子に働く力  $\mathbf{F}_n$  を定義すれば、

$$\mathbf{F}_n = m_n \frac{d}{dt_n} \frac{\mathbf{v}_n}{\sqrt{1 - |\mathbf{v}_n|^2}}$$

です。これが粒子の運動方程式の空間ベクトル表記です。

(余談) 時間座標  $t_n$  による微分をドットで表すと、

$$\mathbf{F}_n = \frac{m_n \dot{\mathbf{v}}_n}{\sqrt{1 - |\mathbf{v}_n|^2}} + \frac{m_n \mathbf{v}_n \cdot \dot{\mathbf{v}}_n \mathbf{v}_n}{(1 - |\mathbf{v}_n|^2)^{3/2}}$$

を得るので、一般に運動する粒子については、力  $\mathbf{F}_n$  と加速度  $\dot{\mathbf{v}}_n$  の方向が異なることがあります。これはニュートン理論にはない特殊相対論の特徴の一つで、このことをちゃんと認識していないと不思議に思ってしまう問題 (パラドックス) が存在します。加速度  $\dot{\mathbf{v}}_n$  について解くなら、上式から  $\mathbf{v}_n \cdot \mathbf{F}_n = m_n \mathbf{v}_n \cdot \dot{\mathbf{v}}_n / (1 - |\mathbf{v}_n|^2)^{3/2}$  が得られることに注意して、

$$\dot{\mathbf{v}}_n = \frac{\sqrt{1 - |\mathbf{v}_n|^2}}{m_n} (\mathbf{F}_n - \mathbf{v}_n \mathbf{v}_n \cdot \mathbf{F}_n).$$

よって、“ニュートン理論的な意味での力” を記すなら、

$$\mathbf{F}_n^{(N)} := m_n \dot{\mathbf{v}}_n = \sqrt{1 - |\mathbf{v}_n|^2} (\mathbf{F}_n - \mathbf{v}_n \mathbf{v}_n \cdot \mathbf{F}_n)$$

ということになります。

## 8.5 マックスウェル方程式の空間ベクトル表記

マックスウェル方程式  $\partial_\mu F^{\mu\nu} = j^\nu$  の時間成分 ( $\nu = 0$ ) と空間成分 ( $\nu = i$ ) は、それぞれ、

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = j^0, \quad \nabla \times \mathbf{B} - \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} = \mathbf{j}$$

となり、順に、ガウスの法則、アンペールの法則と呼ばれます。ここで  $j^0$  は電荷密度、 $\mathbf{j}$  は電流密度と呼ばれます。一方、 $\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$  および  $\mathbf{E} = -\nabla A^0 - \partial \mathbf{A} / \partial t$  から、

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0, \quad \nabla \times \mathbf{E} + \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = 0$$

がわかり、順に、磁場に関するガウスの法則、ファラデーの法則と呼ばれます。これら4つの式がマックスウェル方程式の空間ベクトル表記で、歴史的には相対論に先だって発見され、相対論発見の礎になった方程式群です。

電荷の保存則  $\partial_\mu j^\mu = 0$  は、空間ベクトル表記で、

$$\frac{\partial j^0}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{j} = 0$$

となります。この式を空間のある領域  $V$  で積分すれば、 $V$  に含まれる総電荷を、

$$Q_V = \int_V d^3\mathbf{r} j^0$$

として、

$$\frac{dQ_V}{dt} + \int_V d^3\mathbf{r} \nabla \cdot \mathbf{j} = 0 \quad \therefore \frac{dQ_V}{dt} + \int_{\partial V} d^2\mathbf{r} \cdot \mathbf{j} = 0$$

を得ます。ここでガウスの定理を用いました(ユークリッド幾何学の章参照)。 $\partial V$  は領域  $V$  の境界面です。 $V$  が任意であることに注意すると、一般に、

$$I_S = \int_S d^2\mathbf{r} \cdot \mathbf{j}$$

は、単位時間あたりに面  $S$  を通過する総電荷量と解することができ、電流と呼ばれます。

このことを用いると、マックスウェル方程式はそれぞれ積分表示で、

$$\begin{aligned} \Psi_{\partial V} = Q_V \quad (\text{ガウス}), \quad \int_{\partial S} d\mathbf{r} \cdot \mathbf{B} = I_S + \dot{\Psi}_S \quad (\text{アンペール}), \\ \Phi_{\partial V} = 0 \quad (\text{磁場ガウス}), \quad \int_{\partial S} d\mathbf{r} \cdot \mathbf{E} = -\dot{\Phi} \quad (\text{ファラデー}) \end{aligned}$$

と表すことができます。ここで  $V$  は任意の3次元領域、 $S$  は任意の2次元領域(面)で、

$$\Psi_S = \int_S d^2\mathbf{r} \cdot \mathbf{E}, \quad \Phi_S = \int_S d^2\mathbf{r} \cdot \mathbf{B}$$

は、順に、面  $S$  を貫く電束、磁束と呼ばれます。

アンペールの法則の右辺に  $\dot{\Psi}_S$  の項が必要であることを指摘したのはマックスウェル(1864年)で、マックスウェルはこれにより電磁気学の体系を完成させました。 $\dot{\Psi}_S$  は変位電流あるいは電束電流と呼ばれます。

## 8.6 クーロン力とアンペール力

原点に静止した1つの電荷  $q$  がその周囲に作る電場  $\mathbf{E}$  は球対称性から放射状で、ガウスの法則  $\Psi_{\partial V} = Q_V$  に注意すると、

$$\mathbf{E} = E \frac{\mathbf{r}}{|\mathbf{r}|}, \quad 4\pi|\mathbf{r}|^2 E = q \quad \therefore \mathbf{E} = \frac{q\mathbf{r}}{4\pi|\mathbf{r}|^3}$$

となります(図8.1左)。よってこの電荷が位置  $\mathbf{r}$  にある別の電荷  $q'$  に及ぼす力は、

$$\mathbf{F} = q'\mathbf{E} = \frac{qq'\mathbf{r}}{4\pi|\mathbf{r}|^3}$$

となり、この力をクーロン力(静電気力)といいます。クーロン定数を  $1/(4\pi)$  とする単位系を用いていることに注意。

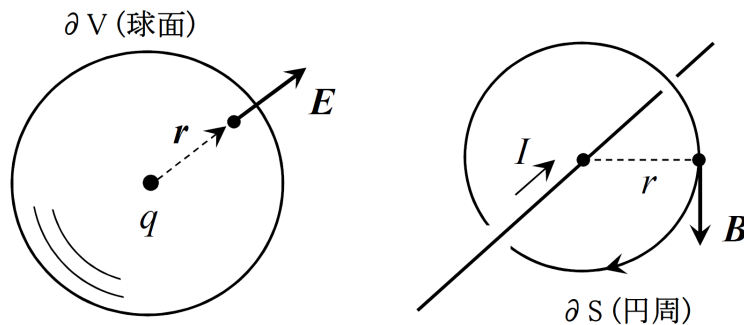


図 8.1: 点電荷と直線電流

一方、十分に長い定常的な直線電流  $I$  がその周囲に作る磁場  $\mathbf{B}$  は、軸対称性から渦状になり、定常的な場合のアンペールの法則  $\int_{\partial S} d\mathbf{r} \cdot \mathbf{B} = I_S$  に注意すると、

$$\mathbf{B} = Be\mathbf{e}_\phi, \quad 2\pi r B = I \quad \therefore \mathbf{B} = \frac{Ie}{2\pi r} \mathbf{e}_\phi$$

となります。ここで  $r$  は直線電流からの距離、 $e$  は電流の方向に対し右ねじの規則で決まる周回方向の単位ベクトルです(図8.1右)。



ところで導線を流れる電流は、電荷  $q$ 、個数密度  $n$  の荷電粒子 (キャリア) の集団が速さ  $v$  で一様に動いているモデルで表すことができます。このとき、導線の断面を時間  $\Delta t$  の間に通過する電荷量は、断面積を  $S$  として  $\Delta Q = qnSv\Delta t$  ですから、電流の大きさは、

$$I = \frac{\Delta Q}{\Delta t} = qnSv$$

と表せます。

そうすると、電流  $I$  が流れている導線が磁場  $B$  内にある場合、導線の各部が磁場から受けるローレンツ力 ( $\sum_n q_n \mathbf{v}_n \times B$ ) は、導線の各部の位置ベクトルを  $l$  として、

$$\begin{aligned} d\mathbf{F} &= qnS|dl| \mathbf{v} \times B = qnSv dl \times B \\ &= I dl \times B \end{aligned}$$

となります。この力をアンペール力、あるいは、電流が磁場から受ける力といいます。

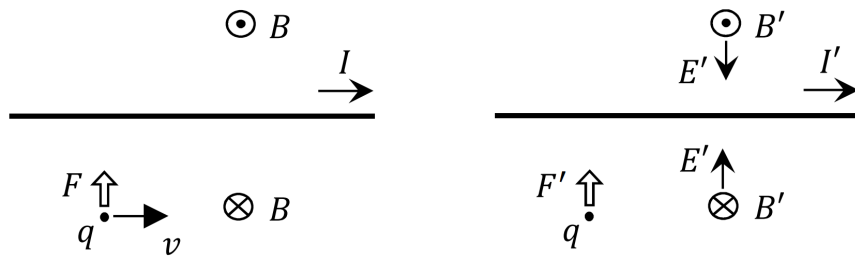
アンペール力の方向ですが、外積の規則からもわかるように、左手の親指、人差し指、薬指を互いに直交させたとき、順に  $F, B, I$  の方向になります。これをフレミングの左手の法則といい、外積を教わらない高校生がその代わりに重宝するものです。外積を知っているなら必要のない話です。

以上の事柄から、距離  $r$  だけ離れた2本の平行な電流  $I, I'$  が単位長さあたりに受ける力は、その大きさが、

$$\frac{|d\mathbf{F}|}{|dl|} = \frac{II'}{2\pi r}$$

となり、電流が同じ向きの場合は引力、反対向きの場合は斥力になることが確かめられるでしょう。

(余談) ここでの電流モデルですが、運動するキャリアとは別に静止した別の荷電粒子 (イオン) があって、全体として中和しているとします。このとき導線が運動してみえる系においては、ローレンツ収縮とその逆効果により、この導線は帯電し、電場を発していることとなります。このことは4元電流密度  $j^\mu$  のベクトル性からも確かめられるでしょう。ちなみにもしニュートン理論で考えるなら、ガリレイ変換ではローレンツ収縮は起こらないため、導線は新しい系でも帯電していないことになり、ローレンツ力の式と矛盾します (図 8.2)。ローレンツ力とアンペールの法則を含む電磁気学は、相対論を前提として初めて無矛盾になり得るわけです。また、電流が磁場を作るという現象が、すでに相対論的效果であることに注意。導線を流れる電流は、莫大な数のキャリアとイオンの中和により帯電していませんが、もしイオンがなくキャリアだけだと考えると、その電荷密度は日常的にはあり得ないくらい大きなものになります。この意味で、導線の電流密度やそれが作る磁場は非常に大きく、その大きさが相対論的效果を日常的世界に露呈させているわけです。もしこの世に導体が無かったら相対論の発見は著しく遅れたことでしょう。



直線電流の近くを電流の方向に運動する荷電粒子。荷電粒子はローレンツ力により導線の方向の力を受ける。

荷電粒子の静止系では導線は負に帯電していることになり、荷電粒子はやはり導線の方向の力を受ける。しかし導線が帯電する理由は相対論でなくては説明ができない。

図 8.2: 直線電流とローレンツ力

## 8.7 電圧とオームの法則

ある経路  $C$  における電場の線積分、

$$V = \int_C d\mathbf{r} \cdot \mathbf{E}$$

を、この経路における電圧といいます。電池などの電源は安定した電圧を作り出す装置といえます。

電荷  $q$  の荷電粒子が定常的な電場  $E$  から力を受け、経路  $C$  を通って移動したとき、この間に粒子が得るエネルギーは、

$$\Delta p^0 = qV$$

と表せます。

[証明] 粒子の質量を  $m$ 、運動量を  $p$  とします。このとき粒子のエネルギーは、 $p^0 = \sqrt{|\mathbf{p}|^2 + m^2}$  なので、

$$dp^0 = d\sqrt{|\mathbf{p}|^2 + m^2} = \frac{2\mathbf{p} \cdot d\mathbf{p}}{2\sqrt{|\mathbf{p}|^2 + m^2}} = \frac{\mathbf{p}}{p^0} \cdot d\mathbf{p} = \frac{d\mathbf{r}}{dt} \cdot d\mathbf{p} = d\mathbf{r} \cdot \frac{d\mathbf{p}}{dt}$$

一方、粒子の運動方程式は  $d\mathbf{p}/dt = q\mathbf{E}$  ですから、 $dp^0 = q d\mathbf{r} \cdot \mathbf{E}$ 。これを経路  $C$  で積分して与題を得ます。[証明終]

いま、導体の内部に電場  $E$  があるとします。また、キャリアが導体に対し速度  $v$  で運動したとき、その速さに比例し反対向きの抵抗力  $-kv$  を受けると仮定します。電流が定常的であるとすると、キャリアに対する合力は 0 のはずなので、キャリアの電荷を  $q$  として、

$$q\mathbf{E} - kv = 0.$$

一方、キャリアの個数密度を  $n$  とすると、電流密度は  $j = qnv$  と書けるので、

$$E = \rho j, \quad \rho = \frac{k}{q^2 n}$$

を得ます。すなわち導体の内部では電場と電流密度は比例することになり、これをオームの法則といいます。比例係数  $\rho$  は抵抗率(電気抵抗率)と呼ばれ、これは導体の種類や温度によって決まる量と考えられますが、ちゃんとした導出には量子論と統計力学が必要です。抵抗率の逆数は導電率(電気伝導率)と呼ばれます。

特に導体が線状で、すなわち導線の場合、上式をその導線に沿って線積分すれば、導線の長さを  $l$ , 断面積を  $S$  として、

$$V = RI, \quad R = \frac{\rho l}{S}$$

を得ます。 $V$  は導線にかかる電圧、 $I$  は導線を通る電流です。 $R$  は導線の抵抗と呼ばれます。

ちなみに導体が磁場  $B$  中で非相対論的な速さで運動している場合は、導体の速度を  $u$  として、力のつりあいの式は、

$$qE + qv \times B - k(v - u) = 0.$$

また、電流密度は  $j = qnv - qnu$  と書けるので、

$$E = \rho j - \frac{1}{qn} j \times B - u \times B.$$

これをここでは拡張されたオームの法則と呼びましょう。導線の場合、導線に沿って線積分すると、

$$V = RI - \int_{\text{導線}} dl \cdot (u \times B)$$

となります。

(余談) 特に定常的な系においては、 $E = -\nabla A^0$  なので、

$$V = \int_C dr \cdot E = - \int_C dr \cdot \nabla A^0 = - \int_C A^0 = A^0(r_1) - A^0(r_2).$$

ここで  $r_1, r_2$  は経路  $C$  の始点および終点です。すなわち電圧  $V$  は経路に依存しなくなります。このときのスカラーポテンシャル  $A^0$  を電位というため、電圧は電位差とも呼ばれます。また、さらに電流が流れてない導体内では、オームの法則から  $E = 0$  なので、そのような導体内では電位  $A^0$  が一定になることがわかります。しかしいずれにせよ、電位の概念が意味をなすのは定常的な系だけです。初等的な電磁気学の教科書では定常的な系を主として扱うため、電位の概念に固執し、非定常的な場合を上手く理解できない人が多いので注意が必要です。

## 8.8 キルヒホッフの法則と電磁誘導

導線で結ばれた電気回路があるとき、電荷保存則から、任意の分岐点に流入する電流の和は 0 になります：

$$\sum_i I_i = 0.$$

ただし電流が分岐点から流出する方向に定義されているときは、その電流の符号を逆にします。これをキルヒホッフの第1法則といいます。

また、ファラデーの法則  $\int_{\partial S} dr \cdot \mathbf{E} = -\dot{\Phi}_S$  から、任意の閉回路一周における電圧の和は、

$$\sum_i V_i = -\dot{\Phi}_S$$

となります。 $S$  は閉回路が囲う面を意味します。これをキルヒホッフの第2法則といいます。 $-\dot{\Phi}_S$  は閉回路を貫く磁束の時間変化率を意味していることに注意。これを回路の誘導起電力といいます。誘導起電力が 0 でない場合の第2法則は、特に(ファラデーの)電磁誘導の法則と呼ばれます。

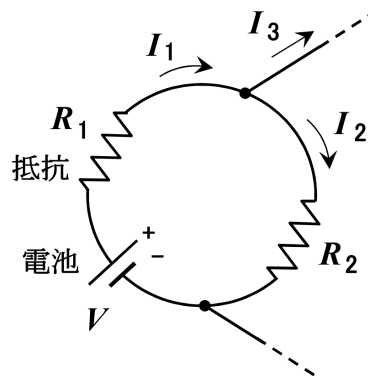


図 8.3: キルヒホッフの法則

例えば図 8.3 のような電気回路があり、磁場の変動がない、あるいは無視できる場合、キルヒホッフの法則とオームの法則から、

$$I_1 - I_2 - I_3 = 0, \quad -V + R_1 I_1 + R_2 I_2 = 0$$

がいえます。電池においては、プラス極からマイナス極の方向に電場があることに注意してください。

(余談) 導線が磁場中で運動している問題が与えられた場合、特に高校生は電磁誘導の法則を使って解くよう習い、そうするでしょうが、これは厳密には間違いで、拡張されたオームの法則を用いるのが本当です。あまり知られていないようですが重要です。簡単な例として、四角い回路が運動し磁場が存在する領域に突入する問題を考えてみましょう(図 8.4 左)。ただし回路の速さ  $u$  は光の速さより十分小さいとします。また、回路下部には抵抗があり、導線の抵抗率は 0 に近似できるものとします。このとき拡張されたオームの法則から回路上部の導線内部には電場を生じます。

一方、磁場の時間的変化  $\partial B/\partial t$  はあくまで 0 なので、ファラデーの法則から回路一周の電場積分は各時刻 0 になるはずで、このため回路に電流が流れ回路下部にある抵抗に電場を生じることになります。次にこの現象を回路の静止系で考えてみましょう。このとき磁場の存在する領域は速さ  $u$  で下に広がってゆきます(図 8.4 右)。よってこの系においては誘導起電力が存在し、回路一周の電場積分は 0 にならず、やはり回路には電流が流れることになります。またこの場合、電磁場のローレンツ変換から、回路外部の磁場の存在する領域には横方向の電場が存在することに注意。基準系の違いによるこれら 2 つの見解をごっちゃにはしてはいけません。ごっちゃにしても仕方がないといえるのは、拡張されたオームの法則や相対論を知らない高校生まででしょう。

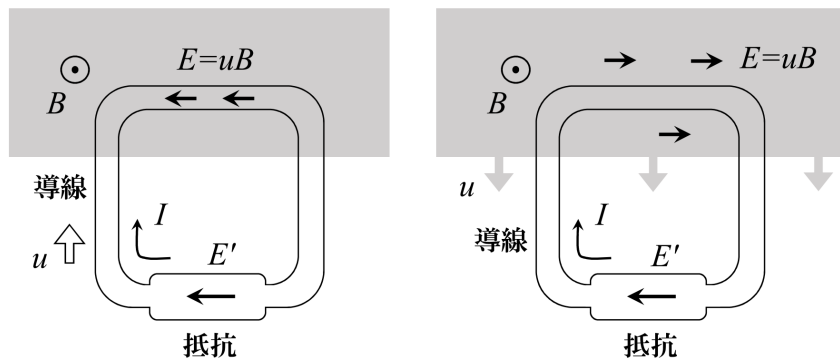


図 8.4: 拡張オームと電磁誘導

## 8.9 電磁場のエネルギーと運動量

エネルギー運動量テンソル  $T^{\mu\nu}$  はローレンツ座標で保存カレントでした。すなわち、

$$\partial_\mu T^{\mu\nu} = 0.$$

ここで、 $P^0 = \int d^3r T^{00}$  がエネルギー、 $P^j = \int d^3r T^{0j}$  が運動量でしたから、 $T^{00}$  はエネルギー密度、 $T^{i0}$  はエネルギー流密度、 $T^{0j}$  は運動量密度、 $T^{ij}$  は運動量流密度と解釈できます。

エネルギー運動量テンソルに対する電磁場の寄与は、

$$T_{em}^{\mu\nu} = F^{\mu\lambda} F_\lambda^\nu + \frac{1}{4} g^{\mu\nu} F_{\rho\sigma} F^{\rho\sigma}$$

でした。 $F_{\rho\sigma} F^{\rho\sigma} = -2|\mathbf{E}|^2 + 2|\mathbf{B}|^2$  が確かめられることに注意すると、電磁場のエネルギー密度は、

$$T_{em}^{00} = \frac{1}{2} (|\mathbf{E}|^2 + |\mathbf{B}|^2)$$

と表されます。また、電磁場のエネルギー流密度と運動量密度は同じで、

$$T_{em}^{0i} = (\mathbf{E} \times \mathbf{B})_i$$

となります。これはポインティングベクトルとも呼ばれます。さらに、電磁場の運動量流密度 (応力テンソルの逆符号) は、

$$T_{em}^{ij} = -E^i E^j - B^i B^j + T_{em}^{00} \delta_j^i$$

と計算されます。

## 8.10 ダランベルシアンと遅延ポテンシャル

ここで少し数学です。

$$\square = \partial^\mu \partial_\mu = \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \Delta, \quad \Delta = \partial_i \partial_i$$

と書き、偏微分演算子  $\square$  をダランベルシアンといいます。 $\Delta$  はラプラシアンです。 $\mu$  を正の実数としたとき、 $(\Delta - \mu^2)G(\mathbf{r}) = \delta^3(\mathbf{r})$  の解が、湯川ポテンシャル:

$$G(\mathbf{r}) = \int \frac{d^3 \mathbf{k}}{(2\pi)^3} \frac{-1}{|\mathbf{k}|^2 + \mu^2} e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}} = -\frac{1}{4\pi|\mathbf{r}|} e^{-\mu|\mathbf{r}|}$$

であったことを思い出しましょう (解析力学の章参照)。これを利用すると、

$$\square F(x) = \delta^4(x)$$

が次のようにして解けます。

$$\begin{aligned} F(x) &= \int \frac{d\omega d^3 \mathbf{k}}{(2\pi)^4} \frac{e^{i\omega t + i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}}}{|\mathbf{k}|^2 - \omega^2} = \int \frac{d\omega}{2\pi} e^{i\omega t} \lim_{\epsilon \rightarrow +0} \int \frac{d^3 \mathbf{k}}{(2\pi)^3} \frac{e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}}}{|\mathbf{k}|^2 + (\epsilon \pm i\omega)^2} \\ &= \int \frac{d\omega}{2\pi} e^{i\omega t} \lim_{\epsilon \rightarrow +0} \frac{e^{-(\epsilon \pm i\omega)|\mathbf{r}|}}{4\pi|\mathbf{r}|} = \frac{1}{4\pi|\mathbf{r}|} \int \frac{d\omega}{2\pi} e^{i\omega(t \mp |\mathbf{r}|)} = \frac{\delta(t \mp |\mathbf{r}|)}{4\pi|\mathbf{r}|}. \end{aligned}$$

これをダランベルシアンの逆、あるいは主要解といいます。

さて、マックスウェル方程式  $\partial_\mu F^{\mu\nu} = j^\nu$  を4元ポテンシャルで書くと、

$$\square A^\mu - \partial^\mu \partial \cdot A = j^\mu.$$

ここで  $\partial \cdot A = \partial_\mu A^\mu$  はローレンツ計量による内積を意味します。4元ポテンシャルには、ゲージ不変性、すなわち関数1個分の不定性があるので、この不定性を利用し、

$$\partial \cdot A = 0$$

を仮定します。実際、 $\partial \cdot A' = \partial \cdot A + \square \chi$  ですから、ゲージ関数として、

$$\chi(x) = - \int d^4 x' F(x-x') \partial \cdot A(x')$$

を選ぶことによって、常に  $\partial \cdot A = 0$  を実現できます。このゲージ固定の方法は、ローレンツゲージ、あるいは共変ゲージと呼ばれます。このゲージ固定法においては、いまだ  $\square \chi = 0$  を満たすような  $\chi$  によるゲージ不変性が残っていることに注意して下さい。

ローレンツゲージにより、マックスウェル方程式は、

$$\square A^\mu = j^\mu$$

と簡単になります。ダランベルシアンを使って解けば、

$$\begin{aligned} A^\mu(x) &= \int d^4x' F(x-x') j^\mu(x') = \int dt' d^3\mathbf{r}' \frac{\delta(t-t' \mp |\mathbf{r}-\mathbf{r}'|)}{4\pi|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} j^\mu(t', \mathbf{r}') \\ &= \int d^3\mathbf{r}' \frac{j^\mu(t \mp |\mathbf{r}-\mathbf{r}'|, \mathbf{r}')}{4\pi|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} \end{aligned}$$

となります。これはローレンツゲージ条件も満たします。なぜなら、

$$\begin{aligned} \partial \cdot A &= \int d^4x' \partial_\mu F(x-x') j^\mu(x') = - \int d^4x' \partial'_\mu F(x-x') j^\mu(x') \\ &= \int d^4x' F(x-x') \partial'_\mu j^\mu(x') \end{aligned}$$

は電荷保存則により 0 になるからです。

$\mathbf{R} = \mathbf{r} - \mathbf{r}'$  と書けば、

$$A^\mu(t, \mathbf{r}) = \int d^3\mathbf{r}' \frac{j^\mu(t \mp |\mathbf{R}|, \mathbf{r}')}{4\pi|\mathbf{R}|}$$

複号がありますが、 $t - |\mathbf{R}|$  の場合を遅延ポテンシャル、 $t + |\mathbf{R}|$  の場合を先進ポテンシャルといいます。これらはマックスウェル方程式の特殊解にすぎませんが、特に空間の遠方で 0 に漸近する特徴を持っているため重要です。

## 8.11 クーロンの法則とビオ・サバールの法則

もし 4 元電流密度が時間に依存せず、すなわち考えている系が定常的なら、遅延ポテンシャルは、

$$A^\mu(\mathbf{r}) = \int d^3\mathbf{r}' \frac{j^\mu(\mathbf{r}')}{4\pi|\mathbf{R}|}, \quad \mathbf{R} = \mathbf{r} - \mathbf{r}'$$

となって、4 元ポテンシャルも定常的になります。この式は、系が定常的な場合、マックスウェル方程式が  $\Delta A^\mu = -j^\mu$  となり、ラプラシアンが  $G(\mathbf{r}) = -1/(4\pi|\mathbf{r}|)$  であることからただちにわかるでしょう。

そうすると電場は、

$$\mathbf{E} = -\nabla A^0 = -\nabla \int d^3\mathbf{r}' \frac{j^0(\mathbf{r}')}{4\pi|\mathbf{R}|}.$$

ここで  $\nabla|\mathbf{R}|^{-1} = -\mathbf{R}/|\mathbf{R}|^3$  に注意すると、

$$\mathbf{E} = \int d^3\mathbf{r}' \frac{j^0(\mathbf{r}')\mathbf{R}}{4\pi|\mathbf{R}|^3}$$

となります。これをクーロンの法則といいます。一方、磁場は、

$$\begin{aligned} B^i &= \epsilon_{ijk}\partial_j A^k = \epsilon_{ijk}\partial_j \int d^3\mathbf{r}' \frac{j^k(\mathbf{r}')}{4\pi|\mathbf{R}|} = \epsilon_{ijk} \int d^3\mathbf{r}' \frac{j^k(\mathbf{r}')}{4\pi} \left( -\frac{R^j}{|\mathbf{R}|^3} \right) \\ &= \int d^3\mathbf{r}' \frac{\epsilon_{ikj}j^k(\mathbf{r}')R^j}{4\pi|\mathbf{R}|^3} \quad \therefore \mathbf{B} = \int d^3\mathbf{r}' \frac{\mathbf{j}(\mathbf{r}') \times \mathbf{R}}{4\pi|\mathbf{R}|^3} \end{aligned}$$

となり、これをビオ・サバルの法則といいます。電荷密度や電流密度が定常的な場合、これらの法則によって電場や磁場を決定できるわけです。

特に電流密度が導線にそってだけ存在する場合、導線に流れる電流を  $I$ 、導線の各部の位置ベクトルを  $\mathbf{r}'$  とし、 $d^3\mathbf{r}' \mathbf{j}(\mathbf{r}') = I d\mathbf{r}'$  ですから、ビオ・サバルの法則は、

$$\mathbf{B} = \int_{\text{導線}} \frac{I d\mathbf{r}' \times \mathbf{R}}{4\pi|\mathbf{R}|^3}$$

となります。

[例題] 無限に長い直線電流  $I$  がその周囲に作る磁場を求めよ。

[解]  $\mathbf{r} = (x, y, z)$ ,  $\mathbf{r}' = (0, 0, s)$ ,  $-\infty < s < \infty$  とし、

$$\mathbf{B} = \int_{\text{導線}} \frac{I d\mathbf{r}' \times \mathbf{R}}{4\pi|\mathbf{R}|^3} = \frac{I(-y, x, 0)}{4\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{ds}{(x^2 + y^2 + (z-s)^2)^{3/2}}.$$

この積分は、 $s-z = \sqrt{x^2 + y^2} \tan \theta$  で積分変数を  $\theta$  に置換すれば実行できて、

$$\mathbf{B} = \frac{I(-y, x, 0)}{2\pi(x^2 + y^2)} = \frac{I\mathbf{e}}{2\pi r}.$$

ここで  $r = \sqrt{x^2 + y^2}$  は直線電流からの距離、 $\mathbf{e} = (-y, x, 0)/r$  は右ねじの規則によりできる周回方向の単位ベクトルです。[解終]

この例題の結果は、先に示したアンペールの法則によるものとももちろん同じになっています。



## 8.12 電磁波

真空、すなわち4元電流密度が0のとき、マックスウェル方程式とローレンツゲージ条件は、

$$\square A^\mu = 0, \quad \partial \cdot A = 0$$

です。これは波動解、

$$A^\mu = \alpha^\mu \sin(k \cdot x + \beta), \quad k^0 = |\mathbf{k}|, \quad k \cdot \alpha = 0$$

を持ちます。 $k^0$  は角振動数、 $\mathbf{k}$  は波数ベクトル、 $\alpha^\mu$  は振幅を意味します。 $k^\mu$  は4元波数ベクトルと呼ばれます。

ところがこのとき、 $\square \chi = 0$  を満たす  $\chi = (\alpha^0/k^0) \cos(k \cdot x + \beta)$  をゲージ関数としてゲージ変換  $A'^\mu = A^\mu + \partial^\mu \chi$  を行えば  $\alpha'^0 = 0$  となるので、一般性を失うことなく  $\alpha^0 = 0$  を仮定できます。そうすると上の波動解は、

$$A^0 = 0, \quad \mathbf{A} = \boldsymbol{\alpha} \sin(k \cdot x + \beta), \quad k^0 = |\mathbf{k}|, \quad \mathbf{k} \cdot \boldsymbol{\alpha} = 0$$

と書けます。この波動を電磁波といいます。電磁波は光や電波の正体です。 $k^0 = |\mathbf{k}|$  なので電磁波が伝わる速さは  $k^0/|\mathbf{k}| = 1$  (光の速さ) です。

対応する電場と磁場は、

$$\begin{aligned} \mathbf{E} &= -\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} = -k^0 \boldsymbol{\alpha} \cos(k \cdot x + \beta), \\ \mathbf{B} &= \nabla \times \mathbf{A} = -\mathbf{k} \times \boldsymbol{\alpha} \cos(k \cdot x + \beta) \end{aligned}$$

であり、よって、

$$\mathbf{k} \cdot \mathbf{E} = 0, \quad \mathbf{k} \cdot \mathbf{B} = 0, \quad \mathbf{E} \cdot \mathbf{B} = 0, \quad |\mathbf{E}| = |\mathbf{B}|$$

が確かめられます。すなわち電磁波は電場と磁場が直交した横波です (図 8.5)。

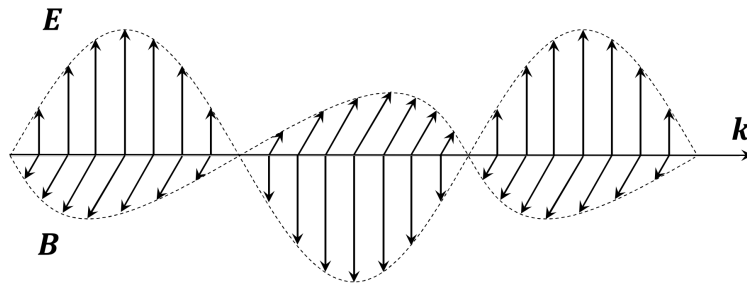


図 8.5: 電磁波

電磁波のポインティングベクトルは、

$$\mathbf{E} \times \mathbf{B} = k^0 \boldsymbol{\alpha} \times (\mathbf{k} \times \boldsymbol{\alpha}) \cos^2(k \cdot x + \beta) = |\boldsymbol{\alpha}|^2 k^0 \mathbf{k} \cos^2(k \cdot x + \beta)$$

と計算されるので、 $\cos^2(k \cdot x + \beta)$  の一周期平均が  $1/2$  であることに注意すると、電磁波が単位時間あたりに運ぶエネルギーは、電磁波の進む方向と垂直な単位面積当たりで、 $|\alpha|^2(k^0)^2/2$  であることがわかります。

様々な  $k, \alpha, \beta$  に関する電磁波の重ね合わせは、フーリエ解析の観点から、真空におけるマクスウェル方程式の一般解になります。線形微分方程式の一般解は、特殊解と斉次型一般解の重ね合わせなので、遅延ポテンシャルと様々な電磁波の重ね合わせはマクスウェル方程式の一般解になります。

## 8.13 光のドップラー効果

電磁波の式、

$$A^\mu = \alpha^\mu \sin(k \cdot x + \beta)$$

を別のローレンツ座標系  $x'^\mu = \Lambda^\mu{}_\nu x^\nu$  において表すと、 $A^\mu$  が4元ベクトルであることに注意して、

$$A'^\mu = \Lambda^\mu{}_\nu A^\nu = \alpha'^\mu \sin(k' \cdot x' + \beta), \quad \alpha'^\mu = \Lambda^\mu{}_\nu \alpha^\nu, \quad k' \cdot x' = k \cdot x.$$

最後の式は  $k'^\mu$  を定義する式ですが、これは4元波数ベクトルがローレンツベクトルとして振る舞うことを意味しています。

いま、あるローレンツ系で  $x^1$  軸と角  $\theta$  を成す方向に進む電磁波を考え、特にその4元波数ベクトルを  $k^\mu = (\omega, \omega \cos \theta, \omega \sin \theta, 0)_\mu$  としましょう。これが元のローレンツ系に対して  $x^1$  方向に速さ  $V$  で進む新しいローレンツ系において  $k'^\mu = (\omega', \omega' \cos \theta', \omega' \sin \theta', 0)_\mu$  になったとします。そうすると、4元波数ベクトルのローレンツベクトル性から、

$$\begin{pmatrix} \omega' \\ \omega' \cos \theta' \\ \omega' \sin \theta' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma & -\gamma V & 0 \\ -\gamma V & \gamma & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \omega \\ \omega \cos \theta \\ \omega \sin \theta \end{pmatrix}, \quad \gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - V^2}}.$$

ここから、

$$\omega' = \frac{1 - V \cos \theta}{\sqrt{1 - V^2}} \omega, \quad \cos \theta' = \frac{\cos \theta - V}{1 - V \cos \theta}$$

を得るでしょう。前式は観測する系によって光の振動数(周波数)が変わる現象で、光のドップラー効果を意味しています。一方、後式は特殊相対論の章でも紹介した、光行差の式に他なりません。これは三角関数の半角公式に注意して、

$$\tan \frac{\theta'}{2} = \sqrt{\frac{1 + V}{1 - V}} \tan \frac{\theta}{2}$$

と表すこともできます。

## 8.14 分極と磁化

実際の物質の多くは、電場や磁場をかけるとこれにตอบสนองし、その内部で電荷の偏りや電流を生じます。これらの現象をそれぞれ、分極、磁化といいます。

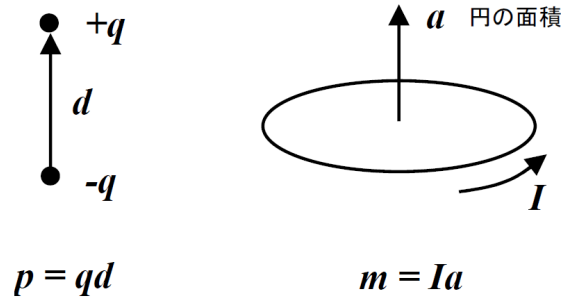


図 8.6: 電気双極子と磁気双極子

物質分子の分極は、おおざっぱに、位置ベクトル差  $d$  だけ離れた 2 点に  $+q$  と  $-q$  の電荷が配置されたモデル (図 8.6 左) で近似でき、これを電気双極子、 $\mathbf{p} = q\mathbf{d}$  をそのモーメントといいます。これらが多数あるとき、モーメントの密度、

$$\mathbf{P}(\mathbf{r}) = \sum_n \mathbf{p}_n \delta^3(\mathbf{r} - \mathbf{r}_n)$$

は分極ベクトルと呼ばれます。 $\mathbf{p}_n$  は  $n$  番目の電気双極子のモーメント、 $\mathbf{r}_n$  はその中心の位置ベクトルです。発散をとると、各々の双極子は小さいとして、

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \mathbf{P}(\mathbf{r}) &= \sum_n q_n \mathbf{d}_n \cdot \nabla \delta^3(\mathbf{r} - \mathbf{r}_n) \\ &= \sum_n q_n \left( \delta^3(\mathbf{r} - \mathbf{r}_n + \mathbf{d}_n/2) - \delta^3(\mathbf{r} - \mathbf{r}_n - \mathbf{d}_n/2) \right) \end{aligned}$$

ですから、これは電気双極子が有する電荷密度と符号が逆で等しいことがわかります。電気双極子の電荷密度を分極電荷密度と呼び、 $j_P^0$  と書けば、

$$\nabla \cdot \mathbf{P} = -j_P^0.$$

また、この式を時間で微分し、分極電荷の電荷保存則  $\frac{\partial j_P^0}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{j}_P = 0$  を適用すれば、

$$\frac{\partial \mathbf{P}}{\partial t} = \mathbf{j}_P$$

を得るでしょう。上式には本来、任意のベクトル場の回転  $\nabla \times \alpha$  を加える不定性がありますが、それは  $\mathbf{P}$  が定常的なとき  $\mathbf{j}_P = 0$  という条件で消しました。

一方、物質分子の磁化は、おおざっぱに、内面積  $a$  の円周に電流  $I$  が流れているモデル (図 8.6 右) で近似でき、これを磁気双極子、 $m = Ia$  をそのモーメントといいます。これらが多数あるとき、モーメントの密度、

$$M(\mathbf{r}) = \sum_n m_n \delta^3(\mathbf{r} - \mathbf{r}_n)$$

は磁化ベクトルと呼ばれます。今度は回転をとって、

$$\begin{aligned} \nabla \times M(\mathbf{r}) &= - \sum_n I_n \mathbf{a}_n \times \nabla \delta^3(\mathbf{r} - \mathbf{r}_n) = - \sum_n I_n \int_{\mathbf{a}_n} d^2 \mathbf{r}' \times \nabla \delta^3(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \\ &= \sum_n I_n \int_{\mathbf{a}_n} d^2 \mathbf{r}' \times \nabla' \delta^3(\mathbf{r} - \mathbf{r}') = \sum_n I_n \int_{\partial \mathbf{a}_n} d\mathbf{r}' \delta^3(\mathbf{r} - \mathbf{r}'). \end{aligned}$$

各々の磁気双極子の円周  $\partial \mathbf{a}_n$  に微小な断面積があるとすると、それらは3次元体積を持つ環とみなせませんが、その内部領域を  $V_n$  とし、磁気双極子が有する電流密度を  $j_M(\mathbf{r})$  と書けば、上式は、

$$\nabla \times M(\mathbf{r}) = \sum_n \int_{V_n} d^3 \mathbf{r}' j_M(\mathbf{r}') \delta^3(\mathbf{r} - \mathbf{r}')$$

と書けます。環の外では  $j_M$  が 0 であることを考慮すると、 $\sum_n \int_{V_n} \rightarrow \int_{\text{全空間}}$  と変形できるので、結局、

$$\nabla \times M = j_M$$

を得ます。

(余談) ここでの導出は、特に磁化ベクトルの方は数学的にかなり高度であるため、ほとんどの教科書においてちゃんと説明されていません。ある種のごまかしが横行していて、それにより頭をひねる学生が多いところだと思われます。

## 8.15 巨視的電磁気学

物質がある場合、全体の電荷密度  $j^0$  は、分極による電荷密度  $j_P^0$  とそれ以外の電荷密度  $j_T^0$  の和になり、また、全体の電流密度  $j$  は、分極による電流密度  $j_P$ 、磁化による電流密度  $j_M$ 、それ以外の電流密度  $j_T$  の和になります。

そうすると、マックスウェル方程式のうち、ガウスの法則、およびアンペールの法則は、

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = j_T^0 + j_P^0, \quad \nabla \times \mathbf{B} - \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} = j_T + j_P + j_M.$$

よって、

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = j_T^0 - \nabla \cdot \mathbf{P}, \quad \nabla \times \mathbf{B} - \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} = j_T + \frac{\partial \mathbf{P}}{\partial t} + \nabla \times \mathbf{M}$$

ですが、これは、

$$D = E + P, \quad H = B - M$$

により、物質の応答がくりこまれた電場と磁場  $D, H$  を定義すると、

$$\nabla \cdot D = j_T^0, \quad \nabla \times H - \frac{\partial D}{\partial t} = j_T$$

と簡単になります。マックスウェル方程式の残りの2式は変更ありません：

$$\nabla \cdot B = 0, \quad \nabla \times E + \frac{\partial B}{\partial t} = 0.$$

物質の応答の効果がくりこまれたこの形式の電磁気学を、巨視的電磁気学といいます。

また、

$$D = \varepsilon E, \quad B = \mu H$$

とおき、 $\varepsilon$  を誘電率、 $\mu$  を透磁率と呼ぶと、これらは多くの場合、物質固有の定数になります。ただし温度や圧力には依存します。値の範囲は、誘電率については  $1 \leq \varepsilon$  であり、透磁率については  $0 \leq \mu$  です。真空は  $\varepsilon = \mu = 1$  です。  $0 \leq \mu < 1$  の場合を反磁性といい、特に  $\mu = 0$  は完全反磁性と呼ばれ、超伝導に伴って現れます。一方、 $\mu > 1$  は常磁性と呼ばれます。

また、これとは別に強磁性と呼ばれる性質を持つ物質があり、その場合、 $\mu$  は物質固有の定数とはみなせなくなり、 $B$  と  $H$  の関係は変化の時間的履歴などにも依存します。この現象をヒステリシスといいます。この辺りの事情をきちんと理解するためには、統計力学の知識が必要になります。強磁性体には、鉄、ニッケルがあります。

(余談) 特にSIでは、 $E$  を電場、 $B$  を磁束密度と呼び、 $D$  を電束密度、 $H$  を磁場と呼びます。これは歴史的な  $E$ - $H$  対応に基づく、あまり好ましくない慣習です。またSIでは誘電率や透磁率が次元を持つ量となり、 $E$  と  $D$ 、 $B$  と  $H$  がそれぞれ異なる次元を持つことになり、非常に複雑です。自然単位系では  $E, B, D, H$  さらには  $P, M$  も全て同じ次元で、質量次元2です。

## 8.16 コンデンサとコイル

電気を貯蓄する装置としてコンデンサがあります(図8.7左)。断面積  $S$  の接近した2枚の導体が、それぞれ  $+Q, -Q$  だけ帯電しているとします。コンデンサ内部に生じる電場の大きさを  $E$  とすると、内部に挟まれた物質の誘電率を  $\varepsilon$  とし、ガウスの法則から、 $DS = Q, D = \varepsilon E$ 。また、2枚の導体間の距離を  $d$ 、電圧を  $V$  とすると、 $V = Ed$  です。一般に、

$$Q = CV$$

でコンデンサの電気容量  $C$  を定義すると、

$$C = \frac{\epsilon S}{d}$$

が得られるでしょう。誘電率が大きい物質を挟むことで、コンデンサの電気容量は大きくなるわけです。

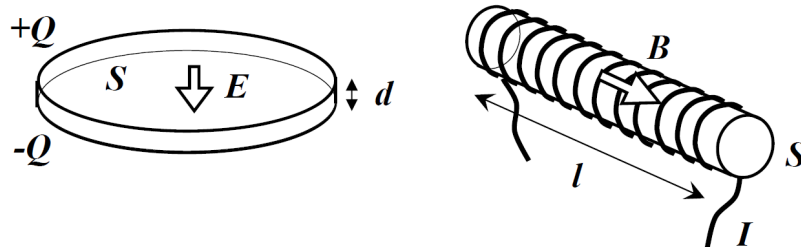


図 8.7: コンデンサとコイル

一方、磁場を作る装置にソレノイドコイル(電磁石)があります(図8.7右)。コイルの長さを  $l$ , 芯の断面積を  $S$ , 導線の巻数を  $N$  とします。また、コイルはその半径に比べ十分長いと仮定し<sup>(\*)</sup>、導線に流れる電流の大きさを  $I$  とします。コイル内部に生じる磁場の大きさを  $B$  とすると、芯である物質の透磁率を  $\mu$  として、アンペールの法則から、 $Hl = NI$ ,  $B = \mu H$ 。また、回路を貫く磁束を  $\Phi$  とすると、 $\Phi = NBS$  です。一般に、

$$\Phi = LI$$

でコイルのインダクタンス  $L$  を定義すると、

$$L = \frac{\mu SN^2}{l}$$

が得られるでしょう。透磁率が大きい物質を芯とすることで、コイルのインダクタンスは大きくなるわけです。コイルの芯には強磁性体である鉄がよく用いられます。

(\*注) 実際のソレノイドコイルはもちろんこの条件を満たさないため、そのようなコイルのインダクタンスにはある種の補正が必要になります。これは長岡係数と呼ばれる補正因子により与えられます。

## 8.17 RLC 回路

ここで図8.8のように、交流電源、抵抗、コンデンサ、コイルを直列に繋いだ回路を考えてみましょう。抵抗の抵抗値を  $R$ , コンデンサの電気容量を  $C$ , コイルのインダクタンスを  $L$  とします。また、交流電源の電圧を  $V_0 \sin(\omega t)$  とします。 $t$  は

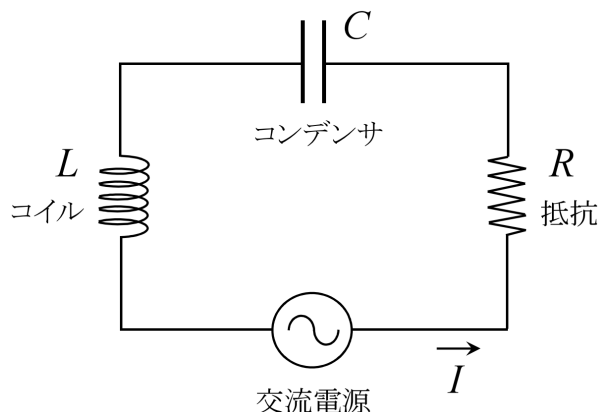


図 8.8: RLC 回路

時間で、よって  $\omega$  は電源電圧の角振動数を意味します。このような回路は RLC 回路と呼ばれます。

回路に流れる電流を  $I(t)$ 、コンデンサの帯電量を  $Q(t)$  とすると、キルヒホッフの第 2 法則から、

$$-V_0 \sin(\omega t) + RI(t) + \frac{Q(t)}{C} = -\frac{d}{dt} LI(t), \quad Q(t) = \int^t dt' I(t')$$

ですが、時間で微分して整理すると、

$$(Ld_t^2 + Rd_t + C^{-1}) I(t) = V_0 \omega \cos(\omega t)$$

となります。  $d_t = d/dt$  は時間微分演算子を意味します。これは  $I(t)$  に関する定係数線形微分方程式なので、簡単に解けます。

まず斉次一般解は、特性方程式  $L\lambda^2 + R\lambda + C^{-1} = 0$  の解  $\lambda$  の実部が必ず負になることに注意すると、十分に時間が経ったときに減衰し 0 に漸近するものであることがわかるでしょう。一方、特解は、

$$\begin{aligned} I(t) &= \frac{1}{Ld_t^2 + Rd_t + C^{-1}} V_0 \omega \operatorname{Re} e^{i\omega t} = \operatorname{Re} \frac{V_0 \omega e^{i\omega t}}{-L\omega^2 + iR\omega + C^{-1}} \\ &= \operatorname{Re} \frac{V_0 e^{i\omega t}}{\sqrt{((C\omega)^{-1} - L\omega)^2 + R^2} e^{i\theta}} = \frac{V_0 \cos(\omega t - \theta)}{\sqrt{((C\omega)^{-1} - L\omega)^2 + R^2}}. \end{aligned}$$

ここで、  $\tan \theta = R / ((C\omega)^{-1} - L\omega)$  です。これが十分に時間が経った後の時刻  $t$  における電流で、交流電源の電圧  $V_0 \sin(\omega t)$  とは一般に位相がずれた同じ角振動数の振動になっています。特にその振幅は、

$$(C\omega)^{-1} - L\omega = 0 \quad \therefore \omega = \frac{1}{\sqrt{LC}}$$

のときに最大となりますが、このような現象は共振と呼ばれ、特定の周波数を拾い出す電波の受信等に利用されます。また、このときの周波数(振動数)  $f = \omega/(2\pi) = 1/(2\pi\sqrt{LC})$  を回路の共振周波数といいます。

## 8.18 双極子が受ける力とポテンシャル

電気双極子が電場から受ける力は、電気双極子の中心位置を  $\mathbf{r}$  として、

$$\mathbf{F} = q\mathbf{E}\left(\mathbf{r} + \frac{\mathbf{d}}{2}\right) - q\mathbf{E}\left(\mathbf{r} - \frac{\mathbf{d}}{2}\right) = q\mathbf{d} \cdot \nabla \mathbf{E}(\mathbf{r}) = \mathbf{p} \cdot \nabla \mathbf{E}.$$

また、トルクは、

$$\mathbf{N} = \frac{\mathbf{d}}{2} \times (q\mathbf{E}) + \left(-\frac{\mathbf{d}}{2}\right) \times (-q\mathbf{E}) = \mathbf{d} \times (q\mathbf{E}) = \mathbf{p} \times \mathbf{E}$$

と評価されます。

一方、磁気双極子が磁場から受ける力は、磁気双極子の中心位置を  $\mathbf{r}$ 、中心から円周に向かうベクトルを  $\mathbf{r}'$  として、

$$\mathbf{F} = \int_{\partial a} I d\mathbf{r}' \times \mathbf{B}(\mathbf{r} + \mathbf{r}') = I \int_{\partial a} d\mathbf{r}' \times (\mathbf{r}' \cdot \nabla \mathbf{B}) = I \int_a (d^2 \mathbf{r}' \times \nabla') \times (\mathbf{r}' \cdot \nabla \mathbf{B}).$$

成分表示すると、

$$F^i = I \int_a \epsilon_{ijk} \epsilon_{jlm} d^2 x'_l \partial'_m x'^n \partial_n B^k = I (\delta_l^k \delta_m^i - \delta_m^k \delta_l^i) a_l \partial_m B^k = I (a_k \partial_i B^k - a_i \partial_k B^k)$$

ですが、ここで磁場に関するガウスの法則  $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$  に注意して、

$$\mathbf{F} = I \nabla \mathbf{B} \cdot \mathbf{a} = \nabla \mathbf{B} \cdot \mathbf{m}$$

と整理されます。トルクは、

$$\begin{aligned} \mathbf{N} &= \int_{\partial a} \mathbf{r}' \times (I d\mathbf{r}' \times \mathbf{B}) = I \int_{\partial a} d\mathbf{r}' \mathbf{r}' \cdot \mathbf{B} = I \int_a (d^2 \mathbf{r}' \times \nabla') \mathbf{r}' \cdot \mathbf{B} \\ &= I \mathbf{a} \times \mathbf{B} = \mathbf{m} \times \mathbf{B} \end{aligned}$$

となります。

磁気双極子の移動に関して、

$$d\mathbf{r} \cdot \mathbf{F} = d\mathbf{r} \cdot \nabla \mathbf{B} \cdot \mathbf{m} = d\mathbf{B} \cdot \mathbf{m} = d(\mathbf{m} \cdot \mathbf{B}).$$

また、回転に関して、

$$d\boldsymbol{\theta} \cdot \mathbf{N} = d\boldsymbol{\theta} \cdot (\mathbf{m} \times \mathbf{B}) = \mathbf{B} \cdot (d\boldsymbol{\theta} \times \mathbf{m}) = \mathbf{B} \cdot d\mathbf{m} = d(\mathbf{m} \cdot \mathbf{B})$$



であることに注意すると、

$$U = -\mathbf{m} \cdot \mathbf{B}$$

は定常磁場  $B$  内における磁気双極子のポテンシャルということになります。

一方、電気双極子については、場の定常性を仮定し、 $E = -\nabla A^0$  と書けることに注意すれば、

$$d\mathbf{r} \cdot \mathbf{F} = d\mathbf{r} \cdot (\mathbf{p} \cdot \nabla \mathbf{E}) = -d\mathbf{r} \cdot (\mathbf{p} \cdot \nabla \nabla A^0) = -d\mathbf{r} \cdot \nabla (\mathbf{p} \cdot \nabla A^0) = d(\mathbf{p} \cdot \mathbf{E}).$$

回転に関しては磁気双極子と同様なので、

$$U = -\mathbf{p} \cdot \mathbf{E}$$

は定常電場  $E$  内における電気双極子のポテンシャルということになります。これらは特に量子論や物性物理で重要になります。

(余談) 磁気双極子が磁場から受ける力の式は、電気双極子が電場から受ける力の式とは微妙に異なることに注意。成分表示で、 $F^i = p^j \partial_j E^i$  と  $F^i = m^j \partial_i B^j$  です。例えば磁気双極子を磁気単極子2つの結合とみなすようなインチキでは、このことを正しく導けません。

## 8.19 双極子が作る電磁場

原点にモーメント  $p$  の静止した電気双極子があるとき、これによって生じるスカラーポテンシャルは、

$$\begin{aligned} A^0(\mathbf{r}) &= \int d^3\mathbf{r}' \frac{j_P^0(\mathbf{r}')}{4\pi|\mathbf{R}|} = \int d^3\mathbf{r}' \frac{-\nabla' \cdot \mathbf{P}(\mathbf{r}')}{4\pi|\mathbf{R}|} = \int d^3\mathbf{r}' \mathbf{P}(\mathbf{r}') \cdot \nabla' \frac{1}{4\pi|\mathbf{R}|} \\ &= \int d^3\mathbf{r}' (\mathbf{p} \delta^3(\mathbf{r}')) \cdot \frac{\mathbf{R}}{4\pi|\mathbf{R}|^3} = \frac{\mathbf{p} \cdot \mathbf{r}}{4\pi|\mathbf{r}|^3}, \quad \mathbf{R} = \mathbf{r} - \mathbf{r}'. \end{aligned}$$

よって生じる電場は、

$$\mathbf{E} = -\nabla A^0 = -\nabla \frac{\mathbf{r}}{4\pi|\mathbf{r}|^3} \cdot \mathbf{p}$$

と書けますが、ここで、

$$\nabla \frac{\mathbf{r}}{4\pi|\mathbf{r}|^3} = \frac{\nabla \mathbf{r}}{4\pi|\mathbf{r}|^3} + \mathbf{r} \nabla \frac{1}{4\pi|\mathbf{r}|^3} = \frac{\delta}{4\pi|\mathbf{r}|^3} + \mathbf{r} \frac{-3}{4\pi|\mathbf{r}|^4} \frac{\mathbf{r}}{|\mathbf{r}|} = \frac{|\mathbf{r}|^2 \delta - 3\mathbf{r}\mathbf{r}}{4\pi|\mathbf{r}|^5}$$

に注意して、

$$\mathbf{E} = \frac{3\mathbf{p} \cdot \mathbf{r}\mathbf{r} - \mathbf{p}|\mathbf{r}|^2}{4\pi|\mathbf{r}|^5}$$

となります (図 8.9)。

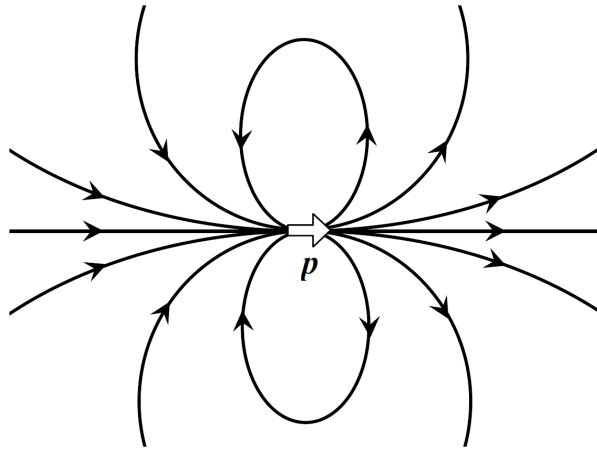


図 8.9: 双極子が作る場

一方、原点にモーメント  $m$  の静止した磁気双極子があるとき、これによって生じるベクトルポテンシャルは、

$$\begin{aligned} \mathbf{A}(\mathbf{r}) &= \int d^3\mathbf{r}' \frac{\mathbf{j}_M(\mathbf{r}')}{4\pi|\mathbf{R}|} = \int d^3\mathbf{r}' \frac{\nabla' \times \mathbf{M}(\mathbf{r}')}{4\pi|\mathbf{R}|} = \int d^3\mathbf{r}' \mathbf{M}(\mathbf{r}') \times \nabla' \frac{1}{4\pi|\mathbf{R}|} \\ &= \int d^3\mathbf{r}' (\mathbf{m} \delta^3(\mathbf{r}')) \times \frac{\mathbf{R}}{4\pi|\mathbf{R}|^3} = \frac{\mathbf{m} \times \mathbf{r}}{4\pi|\mathbf{r}|^3}. \end{aligned}$$

よって生じる磁場は、

$$\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A} = \nabla \times \left( \mathbf{m} \times \frac{\mathbf{r}}{4\pi|\mathbf{r}|^3} \right) = \mathbf{m} \nabla \cdot \frac{\mathbf{r}}{4\pi|\mathbf{r}|^3} - \mathbf{m} \cdot \nabla \frac{1}{4\pi|\mathbf{r}|^3}$$

と展開されますが、前の項は  $r \neq 0$  においては消え、

$$\mathbf{B} = \frac{3\mathbf{m} \cdot \mathbf{r} \mathbf{r} - \mathbf{m} |\mathbf{r}|^2}{4\pi|\mathbf{r}|^5}$$

となります。電気双極子が作る電場と磁気双極子が作る磁場は、完全に同形になるわけです。

## 8.20 リエナール・ヴィーヘルトポテンシャル

マックスウェル方程式の特殊解である遅延ポテンシャルは、

$$A^\mu(t, \mathbf{r}) = \int d^3\mathbf{r}' \frac{j^\mu(t - |\mathbf{R}|, \mathbf{r}')}{4\pi|\mathbf{R}|}, \quad \mathbf{R} = \mathbf{r} - \mathbf{r}'$$

でした。ここでは一般に複数の運動する荷電粒子が作る4元ポテンシャルを求めるために、遅延ポテンシャルの式に4元電流密度の式  $j^\mu(x) = \sum_n q_n \int dx_n^\mu \delta^4(x - x_n)$

を代入してみましょう：

$$\begin{aligned} A^\mu(t, \mathbf{r}) &= \int d^3\mathbf{r}' \frac{1}{4\pi|\mathbf{R}|} \sum_n q_n \int dx_n^\mu \delta(t-|\mathbf{R}|-t_n) \delta^3(\mathbf{r}'-\mathbf{r}_n) \\ &= \sum_n q_n \int dx_n^\mu \frac{\delta(t-|\mathbf{R}_n|-t_n)}{4\pi|\mathbf{R}_n|} \quad \text{ここで } \mathbf{R}_n = \mathbf{r} - \mathbf{r}_n. \end{aligned}$$

残っている積分は各粒子の世界線上の積分ですが、積分変数を  $s_n = t_n + |\mathbf{R}_n| - t$  に置換すると、

$$\begin{aligned} \frac{ds_n}{dt_n} &= 1 + \frac{d}{dt_n} \sqrt{\mathbf{R}_n \cdot \mathbf{R}_n} = 1 + \frac{1}{2|\mathbf{R}_n|} 2\mathbf{R}_n \cdot \frac{d\mathbf{R}_n}{dt_n} = 1 - \frac{\mathbf{R}_n \cdot \mathbf{v}_n}{|\mathbf{R}_n|} \\ \therefore dx_n^\mu &= \frac{dx_n^\mu}{dt_n} \frac{dt_n}{ds_n} ds_n = \frac{v_n^\mu ds_n}{1 - \mathbf{R}_n \cdot \mathbf{v}_n / |\mathbf{R}_n|} \end{aligned}$$

に注意して、

$$A^\mu(t, \mathbf{r}) = \sum_n \frac{q_n v_n^\mu}{4\pi(|\mathbf{R}_n| - \mathbf{R}_n \cdot \mathbf{v}_n)} \Big|_{t_n=t-|\mathbf{R}_n|}$$

を得ます。これが一般に運動する荷電粒子が作る4元ポテンシャルで、リエナール・ヴィーヘルトポテンシャルと呼ばれます。

(余談) リエナール・ヴィーヘルトポテンシャルの導出は、多くの初等的あるいは工学的な教科書において、ごまかしていたり煩雑であったりします。それはそのような教科書では4元電流密度の定義が不明瞭だからです。ここでは4元電流密度を4次元デルタ関数を用いて明瞭に定義したことにより導出が簡潔になっています。

## 8.21 質量のくりこみとローレンツ摩擦力

荷電粒子の速さが光の速さより十分遅い場合を考えると、 $v_n$  の高次項が無視でき、リエナール・ヴィーヘルトポテンシャルの時間成分、すなわちスカラーポテンシャルは、

$$A^0 = \sum_n \frac{q_n}{4\pi} \left( \frac{1}{|\mathbf{R}_n|} + \frac{\mathbf{R}_n \cdot \mathbf{v}_n}{|\mathbf{R}_n|^2} \right) \Big|_{t_n=t-|\mathbf{R}_n|}$$

です。これを  $t_n = t$  において展開すると、

$$A^0 = \sum_n \frac{q_n}{4\pi} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-|\mathbf{R}_n|)^k}{k!} \left( \frac{d}{dt_n} \right)^k \left( \frac{1}{|\mathbf{R}_n|} + \frac{\mathbf{R}_n \cdot \mathbf{v}_n}{|\mathbf{R}_n|^2} \right) \Big|_{t_n=t}$$

ですが、

$$\frac{d}{dt_n} \frac{1}{|\mathbf{R}_n|} = \frac{d\mathbf{r}_n}{dt_n} \cdot \nabla_n \frac{1}{|\mathbf{R}_n|} = \frac{\mathbf{R}_n \cdot \mathbf{v}_n}{|\mathbf{R}_n|^3}$$

に注意して、やはり  $v_n$  の高次を無視すると、

$$A^0 = \sum_n \frac{q_n}{4\pi} \left( \frac{1}{|\mathbf{R}_n|} - \frac{\mathbf{R}_n \cdot \dot{\mathbf{v}}_n}{2|\mathbf{R}_n|^2} + \frac{\mathbf{R}_n \cdot \ddot{\mathbf{v}}_n}{3|\mathbf{R}_n|^3} + \dots \right) \Big|_{t_n=t}$$

と計算されます。同様に、ベクトルポテンシャルについて、

$$\mathbf{A} = \sum_n \frac{q_n \mathbf{v}_n}{4\pi |\mathbf{R}_n|} \Big|_{t_n=t-|\mathbf{R}_n|} = \sum_n \frac{q_n}{4\pi} \left( \frac{\mathbf{v}_n}{|\mathbf{R}_n|} - \dot{\mathbf{v}}_n + \dots \right) \Big|_{t_n=t}$$

ですから、これらの式から、

$$\nabla A^0 = \sum_n \frac{q_n}{4\pi} \left( -\frac{\mathbf{R}_n}{|\mathbf{R}_n|^3} - \frac{\dot{\mathbf{v}}_n}{2|\mathbf{R}_n|^2} + \frac{\mathbf{R}_n \mathbf{R}_n \cdot \dot{\mathbf{v}}_n}{2|\mathbf{R}_n|^3} + \frac{\ddot{\mathbf{v}}_n}{3|\mathbf{R}_n|^3} + \dots \right) \Big|_{t_n=t}$$

$$\text{および } \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} = \sum_n \frac{q_n}{4\pi} \left( \frac{\dot{\mathbf{v}}_n}{|\mathbf{R}_n|} - \ddot{\mathbf{v}}_n + \dots \right) \Big|_{t_n=t}.$$

よって、電場  $\mathbf{E}$  は、

$$\mathbf{E} = -\nabla A^0 - \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} = \sum_n \mathbf{E}_n,$$

$$\mathbf{E}_n = \frac{q_n}{4\pi} \left( \frac{\mathbf{R}_n}{|\mathbf{R}_n|^3} - \frac{\dot{\mathbf{v}}_n}{2|\mathbf{R}_n|^2} - \frac{\mathbf{R}_n \mathbf{R}_n \cdot \dot{\mathbf{v}}_n}{2|\mathbf{R}_n|^3} + \frac{2\ddot{\mathbf{v}}_n}{3|\mathbf{R}_n|^3} + \dots \right) \Big|_{t_n=t}$$

となります。

$\mathbf{E}_n$  の式は、 $n$  番目の荷電粒子が周囲に作る電場を意味していますが、荷電粒子自身の位置  $\mathbf{r} = \mathbf{r}_n$  においては、第1項、第3項、そして実は…の部分も、特異性は強いものの、ベクトル場の“つむじ”になっていて、0とみなされます。しかし一方、第2項の  $-\dot{\mathbf{v}}_n/2|\mathbf{R}_n|$  は真に発散し、第4項の  $2\ddot{\mathbf{v}}_n/3$  も0にはなりません。遅延効果によって、荷電粒子がそれ自身の位置に無限に大きな電場を作ってしまうわけです：

$$\mathbf{E}_n(t_n, \mathbf{r}_n) = -\frac{q_n \dot{\mathbf{v}}_n}{8\pi|\mathbf{0}|} + \frac{q_n \ddot{\mathbf{v}}_n}{6\pi}.$$

このような自己に影響を及ぼす無限大の電場は、一見まずいようですが、無限大部分は粒子の加速度  $\dot{\mathbf{v}}_n$  に比例しているため、運動方程式  $m_n \dot{\mathbf{v}}_n = q_n \mathbf{E} + q_n \mathbf{v}_n \times \mathbf{B}$  の質量にくりこむことが可能です。すなわち、

$$m_n^{(r)} \dot{\mathbf{v}}_n = q_n (\mathbf{E} - \mathbf{E}_n) + q_n \mathbf{v}_n \times \mathbf{B} + \frac{q_n^2 \ddot{\mathbf{v}}_n}{6\pi}, \quad m_n^{(r)} = m_n + \frac{q_n^2}{8\pi|\mathbf{0}|}$$

とすることができるわけです。 $m_n^{(r)}$  はくりこまれた質量と呼ばれ、実際に観測される質量と考えられます。対してもとの質量  $m_n$  は裸の質量と呼ばれ、これはマ

イナス無限大と考えます。マイナス無限大 + プラス無限大で、結果有限というわけです。

一方、 $q_n^2 \ddot{v}_n / 6\pi$  はローレンツ摩擦力と呼ばれ、加速度の時間微分に比例した力です。例えば荷電粒子が振動や円運動等をする時、これに伴って電磁波が遠方に伝わり、このとき電磁波がエネルギーを持ち去るため、荷電粒子はその分のエネルギーを失うはずですが、このような現象を放射減衰といいます。実際に荷電粒子はローレンツ摩擦力を通じてエネルギーを失うわけです。

ここで、原点に静止した荷電粒子の系のエネルギーを考えてみましょう：

$$\begin{aligned} P_n^0 &= m_n + \int d^3\mathbf{r} T_{em}^{00} = m_n + \int d^3\mathbf{r} \frac{1}{2} |\mathbf{E}|^2 \\ &= m_n + \lim_{\epsilon \rightarrow +0} \int_{|\mathbf{r}| > \epsilon} d^3\mathbf{r} \frac{1}{2} \left( \frac{q_n}{4\pi|\mathbf{r}|^2} \right)^2 = m_n + \lim_{\epsilon \rightarrow +0} \frac{q_n^2}{8\pi\epsilon}. \end{aligned}$$

後ろの項はやはり無限大で、 $P_n^0$  はくりこまれた質量  $m_n^{(r)}$  と同定できるように思われます。しかしきちんと評価するには何らかの正則化が必要です。電磁気学の正則化についてはスカラー場と正則化の章で述べることにします。

## 8.22 SI と CGS 単位系

このノートでは自然単位系を用いていますが、近年の電磁気学の教科書の多くはSI (国際単位系) を用いています。その使用が推奨されているからです。

SI では、s (秒)、m (メートル)、kg (キログラム)、C (クーロン)、あるいは C の代わりに電流の単位である  $A = C/s$  (アンペア) を基本単位と考えます。ローレンツ力の式、およびマクスウェル方程式は、次のように書かれます：

$$\begin{aligned} \mathbf{F} &= q\mathbf{E} + q\mathbf{v} \times \mathbf{B}, & \nabla \cdot \mathbf{E} &= \frac{j^0}{\epsilon_0}, & \nabla \times \mathbf{B} - \epsilon_0\mu_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} &= \mu_0 \mathbf{j}, \\ \nabla \cdot \mathbf{B} &= 0, & \nabla \times \mathbf{E} + \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} &= 0. \end{aligned}$$

$\epsilon_0$  は真空の誘電率、 $\mu_0$  は真空の透磁率と呼ばれる普遍定数です。このとき、真空の光速  $c$  とクーロン定数  $k_0$  は、それぞれ、

$$c = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0\mu_0}}, \quad k_0 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}$$

で与えられることになります。このノートで用いている自然単位系は、SI において  $\epsilon_0 = \mu_0 = 1$  と定めたものとも考えることもできます。

一方、電磁気学が形成された当時広く用いられていたのはCGS単位系と呼ばれるもので、s(秒)、cm(センチメートル)、g(グラム)の3つを基本単位と考えます。

CGS 単位系にはいくつかのバージョンがありますが、それぞれ下表のように  $\epsilon_0$ ,  $\mu_0$  を定め、かつ磁束密度  $B$  を再定義することで得ることができます：

	$\epsilon_0$	$\mu_0$	SI の $B$	考案者
電磁単位系 (emu)	$1/(4\pi c^2)$	$4\pi$	$B$	ウェーバー
静電単位系 (esu)	$1/(4\pi)$	$4\pi/c^2$	$B$	マックスウェル
ガウス単位系	$1/(4\pi)$	$4\pi/c^2$	$B/c$	ヘルムホルツ・ヘルツ
ヘヴィサイド単位系	1	$1/c^2$	$B/c$	ヘヴィサイド・ローレンツ

例えば CGS ガウス単位系においては、電磁気学の諸式は、

$$\begin{aligned}
 \mathbf{F} &= q\mathbf{E} + q\frac{\mathbf{v}}{c} \times \mathbf{B}, & \nabla \cdot \mathbf{E} &= 4\pi j^0, & \nabla \times \mathbf{B} - \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} &= \frac{4\pi \mathbf{j}}{c}, \\
 \nabla \cdot \mathbf{B} &= 0, & \nabla \times \mathbf{E} + \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} &= \mathbf{0}
 \end{aligned}$$

と書かれることになります。このときクーロン力の式は、

$$\mathbf{F} = \frac{qq'\mathbf{r}}{|\mathbf{r}|^3}$$

のように簡単になるでしょう。いま、「1 esu の電荷 2 つが 1 cm の距離にあるとき 2 電荷間のクーロン力の大きさが  $1 \text{ dyn} = \text{g cm s}^{-2}$  になる」として静電単位 esu を定義すると、

$$\text{dyn} = \frac{\text{esu}^2}{\text{cm}^2} \quad \therefore \text{esu} = \text{dyn}^{1/2} \text{cm} = \text{g}^{1/2} \text{cm}^{3/2} \text{s}^{-1}.$$

CGS ガウス単位系では電荷の単位は g, cm, s の組立てとして与えられるわけです。一方、場  $E$ ,  $B$  の単位は  $\text{dyn/esu} = \text{g}^{1/2} \text{cm}^{-1/2} \text{s}^{-1}$  となりますが、これをガウス (Gs) といいます。

CGS ガウス単位系やヘヴィサイド単位系は、マックスウェル方程式が  $E$ ,  $B$  について対称に表され、 $E$ - $H$  対応を誤解させる SI に比べ単純で自然な形式と考えられるため、分野によっては今でも用いられます。また、古い文献の多くは何らかの CGS 単位系で書かれているので注意が必要です。ここで用いた自然単位系はヘヴィサイド単位系において  $c = 1$  としたものとも考えることもできます。

一般に、マックスウェル方程式に  $\pi$  が現れない単位系を有理系といいます。SI やヘヴィサイド単位系やここでの自然単位系は有理系です。対して、CGS ガウス単位系は非有理系ということになります。

# 索引

あ	
RLC 回路	23
アンペア	29
アンペールの法則	7
アンペール力	9
インダクタンス	22
運動方程式	6
SI	29
オームの法則	11
か	
ガウス	30
ガウスの法則	7
拡張されたオームの法則	11
完全反磁性	21
キャリア	9
強磁性	21
共振	24
共振周波数	24
共変ゲージ	15
局所的	4
巨視的電磁気学	21
キルヒホッフの第 1 法則	12
キルヒホッフの第 2 法則	12
クーロンの法則	16
クーロン力	8
くりこまれた質量	28
グローバル	4
ゲージ関数	4
ゲージ変換	3
コイル	22
国際単位系	29
コンデンサ	21
さ	
CGS 単位系	29
磁化	19
磁化ベクトル	20
磁気双極子	20
4 元波数ベクトル	17
磁束	8
磁束密度	4
磁場	4, 21
磁場に関するガウスの法則	7
主要解	14
常磁性	21
真空の透磁率	29
真空の誘電率	29
スカラーポテンシャル	4
静電気力	8
静電単位	30
先進ポテンシャル	15
ソレノイドコイル	22
た	
大域的	4
ダランベルシアン	14
ダランベルシアンの逆	14
遅延ポテンシャル	15
抵抗	11
抵抗率	11
電圧	10
電位	11
電位差	11
電荷密度	7
電気双極子	19
電気抵抗率	11
電気伝導率	11
電気容量	22
電磁気学	3
電磁石	22
電磁波	17
電磁誘導の法則	12
電束	8
電束電流	8
電束密度	21
電場	4
電波	17
電流	7
電流密度	7
透磁率	21
導電率	11
ドップラー効果	18

な	
長岡係数	22
は	
裸の質量	28
反磁性	21
ビオ・サバールの法則	16
光	17
ヒステリシス	21
ファラデーの法則	7
フレミングの左手の法則	9
分極	19
分極ベクトル	19
ベクトルポテンシャル	4
変位電流	8
ポインティングベクトル	14
放射減衰	29
ま	
マックスウェル方程式	7
や	
誘電率	21
誘導起電力	12
有理系	30
ら	
リエナール・ヴィーヘルトポテンシャル	27
ローカル	4
ローレンツゲージ	15
ローレンツ摩擦力	29