

あもんノート

ユークリッド幾何学、ニュートン力学から、相対論、量子論、素粒子論、宇宙論、そして超ひも理論まで、理論物理学を簡潔にかつ幅広く網羅したノートです。TOP へは下の URL をクリックして行けます。専用の画像掲示板で、ご意見、ご質問等も受け付けております。

<http://amonphys.web.fc2.com/>

目次

第2章	関数論と応用数学	3
2.1	指数関数と対数関数	3
2.2	複素数と複素関数	4
2.3	複素微分と正則	6
2.4	マクローリン展開とテイラー展開	7
2.5	複素積分とコーシーの定理	8
2.6	留数定理	9
2.7	複素共役とエルミート共役	12
2.8	行列式の性質	13
2.9	行列の固有方程式と対角化	13
2.10	行列の指数関数とトレース	14
2.11	1階の微分方程式	16
2.12	定係数線形微分方程式	17
2.13	ガウス積分とガンマ関数	20
2.14	n 次元球の体積	21
2.15	スターリングの式	22
2.16	二項分布と正規分布	23
2.17	デルタ関数	26
2.18	フーリエ変換	27
2.19	有限区間のフーリエ変換	28

第2章 関数論と応用数学

複素関数論やこれを応用した数学は物理においてよく用いられ、重要です。ここに手短かにまとめておきます。関数論の簡単な説明の後、行列の対角化、微分方程式の解法、ガンマ関数、スターリングの式、正規分布、デルタ関数、フーリエ変換について説明し、理論物理学の準備とします。

2.1 指数関数と対数関数

極限值、

$$e = \lim_{h \rightarrow 0} (1 + h)^{1/h} \sim 2.7182818$$

を自然対数の底、あるいはネイピア数といいます。実数 x に対し、

$$\exp x = e^x$$

を指数関数といいます。指数関数の逆関数を対数関数 (\log) といいます：

$$y = \log x \Leftrightarrow x = e^y.$$

対数関数の定義域は $x > 0$ です。

$$\log(xy) = \log x + \log y, \quad \log(x^y) = y \log x$$

という性質が確かめられるでしょう。また、

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\log(1+h)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \log\left((1+h)^{1/h}\right) = \log e = 1$$

に注意すると、微分公式、

$$\frac{d}{dx} \log x = \frac{1}{x}, \quad \frac{d}{dx} e^x = e^x$$

を得ます。これらはいくまで実数における関数です。

さらに、

$$\cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}, \quad \sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}, \quad \tanh x = \frac{\sinh x}{\cosh x}$$

で定義される双曲線関数も物理ではよく登場します。

$$\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1, \quad \frac{d}{dx} \cosh x = \sinh x, \quad \frac{d}{dx} \sinh x = \cosh x$$

という性質が簡単に確かめられるでしょう。曲線 $\{(\cosh \theta, \sinh \theta) \mid \theta \text{ は実数}\}$ が双曲線になるため、この名前と呼ばれます。三角関数 $\cos \theta, \sin \theta$ は、この意味で、円関数 (circular functions) であり、そう呼ばれることもあります。

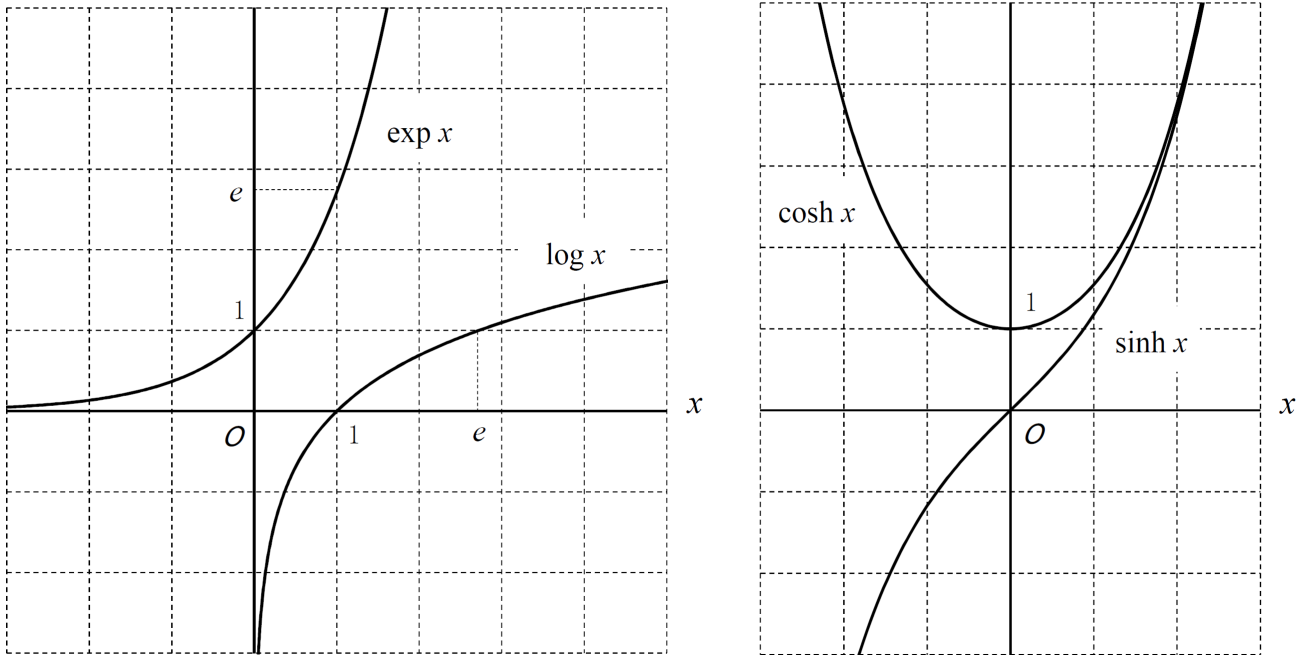


図 2.1: 指数対数関数と双曲線関数

三角関数、指数関数、対数関数、双曲線関数は初等関数と呼ばれます。

(余談) 特に工学の方面においては、自然対数を \ln と表すことがあります。この場合、 \log は常用対数を意味することが多く、すなわち、 $y = \log x \Leftrightarrow x = 10^y$ です。例えば Excel ではこのような用法になっています。一方、Excel に付属されている VBA では \log は自然対数を意味します。ややこしいですね。傾向として、理論方面に行けば行くほど、常用対数を使うことがなく、 \log は自然対数を意味するようです。

2.2 複素数と複素関数

実数 x, y に対し、

$$z = x + iy$$

で与えられる数を複素数といいます。ここで i は虚数単位と呼ばれる代数で、

$$i^2 = -1$$

を満たすものとし、複素数の集合は加減乗除の演算において閉じていて、実数と同様、結合法則、交換法則、分配法則を持ちます。すなわち体を成すわけです。 $z = x + iy$ に対し、 x を z の実部といい、 $\operatorname{Re} z$ と書きます。また、 y を z の虚部といい、 $\operatorname{Im} z$ と書きます。 (x, y) が作る 2 次元空間を複素平面といいます。

複素数 $z = x + iy$ の指数関数を、

$$e^z = e^x (\cos y + i \sin y)$$

で定義します。このとき、複素数 z, w に対し、

$$e^z e^w = e^{z+w}.$$

[証明] $z = x + iy, w = u + iv$ とすると、三角関数の加法定理に注意して、

$$\begin{aligned} e^z e^w &= e^x (\cos y + i \sin y) e^u (\cos v + i \sin v) \\ &= e^{x+u} (\cos y \cos v - \sin y \sin v + i(\sin y \cos v + \cos y \sin v)) \\ &= e^{x+u} (\cos(y+v) + i \sin(y+v)) = e^{x+u+i(y+v)} = e^{z+w}. \quad [\text{証明終}] \end{aligned}$$

特に、実数 θ に対し、

$$e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta$$

ですが、これはオイラーの式と呼ばれます。複素数 $z = x + iy$ は、 $x = r \cos \theta$, $y = r \sin \theta$ で極座標 r, θ を導入すると、オイラーの式により、

$$z = r e^{i\theta}$$

と表せます。これを複素数の極形式といいます (図 2.2)。

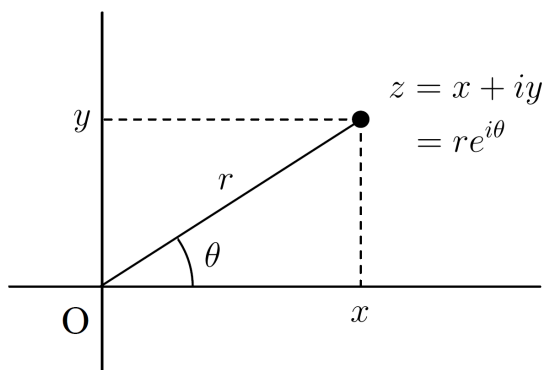


図 2.2: 複素数の極形式

$r = \sqrt{x^2 + y^2}$ を z の大きさ (ノルム) といい、 $|z|$ と書きます。 $\theta = \arctan(y/x)$ を z の偏角といい、 $\operatorname{Arg} z$ と書きます。複素数の積において、大きさは乗法的で偏角は加法的になること、すなわち、

$$|zw| = |z||w|, \quad \operatorname{Arg}(zw) = \operatorname{Arg} z + \operatorname{Arg} w$$

がわかるでしょう。

複素数においても、指数関数の逆関数として対数関数を定義します：

$$w = \log z \Leftrightarrow z = e^w.$$

一般に、 n を整数としたとき、 $e^{i2\pi n} = 1$ であることに注意すると、 r, θ を実数として、 $e^{\log r + i(\theta + 2\pi n)} = re^{i\theta}$ がわかるので、

$$\log(re^{i\theta}) = \log r + i(\theta + 2\pi n) \quad (n \text{ は整数}).$$

複素数の対数関数は多価であること(複数の値を持つこと)がわかります。

複素数 z の三角関数は、

$$\cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}, \quad \sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}$$

で定義されます。双曲線関数の定義は実数の場合と同じです。一方、複素数による“べき”は、

$$a^z = e^{z \log a}$$

で定義されます。 a, z は複素数です。このとき、

$$a^z a^w = a^{z+w}, \quad (a^z)^w = a^{zw}, \quad \log(zw) = \log z + \log w, \quad \log(a^z) = z \log a$$

が確かめられます。指数法則や対数関数の性質が、複素数の世界においても保持されるわけです。あるいは、そうなるように考慮し関数の定義域を複素数に拡張したともいえます。

[例題] 2次方程式 $z^2 = i$ を解け。

$$[\text{解}] \quad z = i^{\frac{1}{2}} = e^{\frac{1}{2} \log i} = e^{\frac{1}{2} \log e^{i\pi/2}} = e^{\frac{1}{2} i(\frac{\pi}{2} + 2\pi n)} = e^{i(\frac{\pi}{4} + \pi n)} = \pm \frac{1+i}{\sqrt{2}} \quad [\text{解終}]$$

2.3 複素微分と正則

複素数から複素数への写像 f , および複素平面の領域 S に対し、

$$\forall z \in S \left(\lim_{\Delta z \rightarrow 0} f(z + \Delta z) = f(z) \right)$$

のとき、 f は S において連続であるといいます。 Δz は複素数で、上式は Δz を任意の方向から 0 に近づけ、その極限が全て関数の値 $f(z)$ に一致するという意味です。このときさらに、

$$\forall z \in S \left(\lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{f(z + \Delta z) - f(z)}{\Delta z} = f'(z) \right)$$

を満たす関数 f' が存在するとき、 f は S において正則 (微分可能) であるといい、 f' を f の導関数といいます。

いま、 $u + iv = f(x + iy)$ とおくと、実数 u, v は共に、実数 x, y の2変数関数とみなせますが、 $\Delta z = h$ (h は実数) のとき、

$$\begin{aligned} \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{f(z + \Delta z) - f(z)}{\Delta z} &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x + iy + h) - f(x + iy)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{u(x + h, y) + iv(x + h, y) - u(x, y) - iv(x, y)}{h} = \frac{\partial u}{\partial x} + i \frac{\partial v}{\partial x}. \end{aligned}$$

同様に、 $\Delta z = ih$ のとき、

$$\lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{f(z + \Delta z) - f(z)}{\Delta z} = \frac{\partial v}{\partial y} - i \frac{\partial u}{\partial y}$$

が示せるので、考えている領域において f が正則である条件は、

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \quad \text{かつ} \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$$

となり、これをコーシー・リーマン方程式といいます。

実数の場合と同様に、次の微分公式を証明できます。

$$\begin{aligned} \frac{d}{dz} z^a &= az^{a-1}, & \frac{d}{dz} a^z &= a^z \log a, & \frac{d}{dz} \log z &= \frac{1}{z}, \\ \frac{d}{dz} \sin z &= \cos z, & \frac{d}{dz} \cos z &= -\sin z, \\ \frac{d}{dz} \sinh z &= \cosh z, & \frac{d}{dz} \cosh z &= \sinh z. \end{aligned}$$

(余談) コーシー・リーマン方程式から、実2変数関数 u, v は、それぞれ、 $\Delta u = 0$, $\Delta v = 0$ を満たします。ここで $\Delta = (\partial/\partial x)^2 + (\partial/\partial y)^2$ は2次元ラプラシアンです。一般に $\Delta \phi = 0$ を満たす2変数関数 ϕ は調和関数と呼ばれます。よって u, v は調和関数ということになります。

2.4 マクローリン展開とテイラー展開

正則な関数 f を次のように多項式展開したとしましょう：

$$f(z) = c_0 + c_1 z + c_2 z^2 + \cdots = \sum_{k=0}^{\infty} c_k z^k.$$

ここで c_k ($k = 0, 1, 2, \dots$) は複素数の定数です。この式を n 回微分し $z = 0$ とおけば、 f の n 階導関数を $f^{(n)}$ として、 $f^{(n)}(0) = c_n n!$ を得るので、

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} z^k.$$

これを f のマクローリン展開といいます。

例えば $f(z) = e^z$ とすると、 $f^{(k)}(z) = e^z \therefore f^{(k)}(0) = 1$ なので、

$$e^z = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} z^k = 1 + z + \frac{1}{2!} z^2 + \frac{1}{3!} z^3 + \dots$$

また、 $f(z) = \sin z$ とすると、

$$f^{(k)}(z) = \begin{cases} \sin z & (k = 0 \pmod{4}) \\ \cos z & (k = 1 \pmod{4}) \\ -\sin z & (k = 2 \pmod{4}) \\ -\cos z & (k = 3 \pmod{4}) \end{cases} \therefore f^{(k)}(0) = \begin{cases} 0 & (k = 0, 2 \pmod{4}) \\ 1 & (k = 1 \pmod{4}) \\ -1 & (k = 3 \pmod{4}) \end{cases}$$

がわかるので、

$$\sin z = z - \frac{1}{3!} z^3 + \frac{1}{5!} z^5 - \frac{1}{7!} z^7 + \dots$$

同様に考えて、

$$\cos z = 1 - \frac{1}{2!} z^2 + \frac{1}{4!} z^4 - \frac{1}{6!} z^6 + \dots$$

を得るでしょう。

一方、マクローリン展開の式において $g(z) = f(z - a)$ とおくと、

$$g(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{g^{(k)}(a)}{k!} (z - a)^k$$

を得ますが、これを関数 g の a におけるテイラー展開といいます。

2.5 複素積分とコーシーの定理

複素数による積分は一般に複素平面上の経路に依存した概念であり、経路を C としたとき、

$$\int_C dz f(z)$$

と書きます。ここで dz は、 $z = x + iy$ に対し、 $dz = dx + idy$ という微分形式として理解します。

複素平面のある領域 S において関数 f が正則であるとき、

$$\int_{\partial S} dz f(z) = 0$$

です。これをコーシーの定理といいます。 ∂S は S の境界を成す閉曲線で、反時計周りの向きを持つものとします。

[証明] $z = x + iy$, $f(z) = u + iv$ とすると、

$$\begin{aligned} d(dz f(z)) &= -dz \wedge df(z) = -(dx + idy) \wedge (du + idv) \\ &= -(dx + idy) \wedge \left(\frac{\partial u}{\partial x} dx + \frac{\partial u}{\partial y} dy + i \frac{\partial v}{\partial x} dx + i \frac{\partial v}{\partial y} dy \right) \\ &= dx \wedge dy \left(i \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} - i \frac{\partial v}{\partial y} \right) \end{aligned}$$

ですが、コーシー・リーマン方程式からこれは S のどの点においても 0 です。よってストークスの定理: $\int_{\partial S} \alpha = \int_S d\alpha$ において $\alpha = dz f(z)$ とおくことにより与題を得ます。[証明終]

コーシーの定理から、領域 S において関数 f が正則なら、図 2.3 に示す 2 つの経路 C, C' における f の積分値は同じです。このことから一般に、複素積分の値は、積分経路を被積分関数が正則な領域を掃くよう変形しても変わらないこととなります。

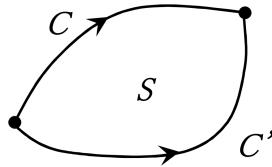


図 2.3: 積分経路の変形

領域 S において関数 g が正則のとき、

$$\int_{\partial S} dz \frac{g(z)}{(z-a)^n} = \frac{2\pi i}{(n-1)!} g^{(n-1)}(a) \quad (a \in S, \quad n = 1, 2, \dots)$$

がいえます。これをコーシーの積分定理、あるいはグルサの公式といいます。

[証明] まず $\int_{\partial S} dz g(z)/(z-a)$ という積分を考えると、被積分関数は領域 S においては点 a を除き正則なので、積分経路を a の周りの小さな円にすることができます。そこで、積分変数を $z = a + re^{i\theta}$ ($r \rightarrow 0$) とおいて、

$$\int_{\partial S} dz \frac{g(z)}{z-a} = \lim_{r \rightarrow 0} \int_0^{2\pi} ire^{i\theta} d\theta \frac{g(a + re^{i\theta})}{re^{i\theta}} = 2\pi i g(a).$$

この式を a で $(n-1)$ 回微分して与題を得ます。[証明終]

2.6 留数定理

複素数 z の (1 価の) 関数 $f(z)$ が $z = a$ で発散し、整数 n に対し $\lim_{z \rightarrow a} (z-a)^n f(z)$ が 0 でない値に収束するとき、複素数 a を関数 f の n 位の極といいます。例え

ば、 $f(z) = z/((z-i)^3(z+2)^2)$ のとき、 f は i に 3 位の極、 -2 に 2 位の極を持つというわけです。

関数 f が領域 S においていくつかの極 a_i ($i = 1, 2, \dots, N$) を持ち、その他の点において正則なら、

$$\int_{\partial S} dz f(z) = 2\pi i \sum_{i=1}^N \text{Res}(a_i),$$

$$\text{Res}(a) = \frac{1}{(n-1)!} \lim_{z \rightarrow a} \left(\frac{d}{dz} \right)^{n-1} (z-a)^n f(z) \quad (n \text{ は極 } a \text{ の位数})$$

です。Res(a) を留数といい、この定理を留数定理といいます。

[証明] コーシーの定理から積分 $\int_{\partial S} dz f(z)$ は S 内で f が持つ極の周りの積分の和になります (図 2.4 参照。×印は極を意味します)。特に極 a の周りの積分は $f(z) = g(z)/(z-a)^n$ とおけば $g(z)$ は a の近傍で正則とみなされるため、ちょうどグルサの公式に帰着し、よって与題が得られます。[証明終]

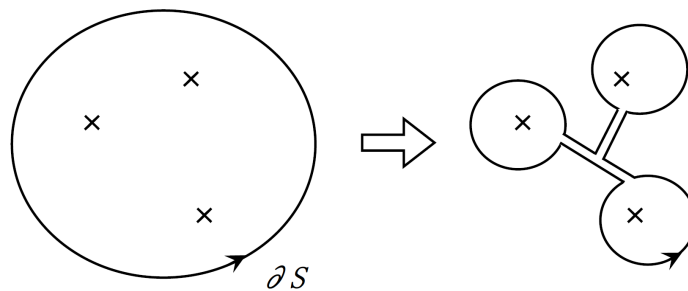


図 2.4: 留数定理

留数定理により、閉曲線における複素積分は、閉曲線内部にある極の情報だけから求められるわけです。またその応用により、通常計算が困難とされる実積分を計算することもできます。以下に例を 2 つあげます。

[例題] 広義積分 : $I = \int_0^{\infty} \frac{dx}{x^4 + 1}$ の値を求めよ。

[解] まず、十分大きな実数 R に対し図 2.5 のような周回経路 C を考え、

$$I' = \int_C \frac{dz}{z^4 + 1}$$

とおきます。

C の内部における極は、 $e^{i\pi/4}$, $e^{i3\pi/4}$ にあり、共に位数は 1 です。留数は、

$$\text{Res}(e^{i\pi/4}) = \lim_{z \rightarrow e^{i\pi/4}} \frac{z - e^{i\pi/4}}{z^4 + 1} = \lim_{z \rightarrow e^{i\pi/4}} \frac{1}{4z^3} = \frac{e^{-i3\pi/4}}{4}$$

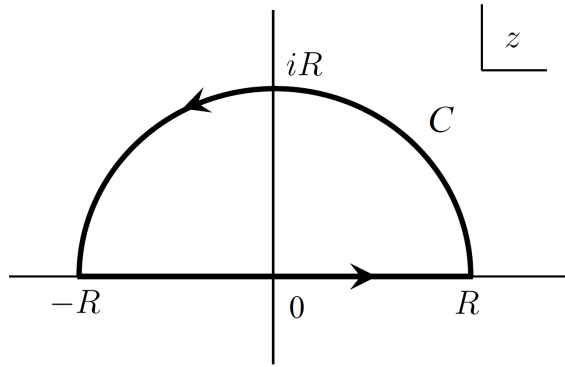


図 2.5: 閉曲線 C

途中、計算を手早く行うためロピタルの定理を用いました。同様に $\text{Res}(e^{i3\pi/4}) = e^{-i\pi/4}/4$ がわかるので、留数定理から、

$$I' = 2\pi i \left(\frac{e^{-i3\pi/4}}{4} + \frac{e^{-i\pi/4}}{4} \right) = \frac{\pi}{\sqrt{2}}.$$

一方、

$$I' = \int_{-R}^R \frac{dx}{x^4 + 1} + \int_0^\pi \frac{iRe^{i\theta} d\theta}{(Re^{i\theta})^4 + 1}$$

ですが、 $R \rightarrow \infty$ で前の項は $2I$ 、後ろの項は 0 になるので、 $I' = 2I$. よって、

$$I = \frac{I'}{2} = \frac{\pi}{2\sqrt{2}}. \quad [\text{解終}]$$

[例題] 定積分: $I = \int_0^{2\pi} \frac{d\phi}{(1 + \epsilon \cos \phi)^2}$ の値を求めよ。ただし $0 < \epsilon < 1$.

[解] $z = e^{i\phi}$ とおくと、 $d\phi = dz/(iz)$, $\cos \phi = (z + z^{-1})/2$ に注意して、

$$I = \int_C \frac{dz}{iz} \frac{1}{\left(1 + \epsilon \frac{z + z^{-1}}{2}\right)^2} = \frac{4}{i\epsilon^2} \int_C dz \frac{z}{\left(z^2 + \frac{2}{\epsilon}z + 1\right)^2}.$$

ここで C は 0 を中心とする単位円です。2次方程式 $z^2 + (2/\epsilon)z + 1 = 0$ の解が、 $\alpha_{\pm} = (-1 \pm \sqrt{1 - \epsilon^2})/\epsilon$ で、このうち α_+ のみが C の内部にあるとわかるので、留数定理を用いて、

$$\begin{aligned} I &= \frac{4}{i\epsilon^2} \int_C dz \frac{z}{(z - \alpha_+)^2(z - \alpha_-)^2} = \frac{4}{i\epsilon^2} 2\pi i \lim_{z \rightarrow \alpha_+} \frac{d}{dz} \frac{z}{(z - \alpha_-)^2} \\ &= \frac{8\pi}{\epsilon^2} \lim_{z \rightarrow \alpha_+} \frac{-z - \alpha_-}{(z - \alpha_-)^3} = \frac{8\pi}{\epsilon^2} \frac{-\alpha_+ - \alpha_-}{(\alpha_+ - \alpha_-)^3} = \frac{8\pi}{\epsilon^2} \frac{2/\epsilon}{(2\sqrt{1 - \epsilon^2}/\epsilon)^3} \\ &= \frac{2\pi}{(1 - \epsilon^2)^{3/2}}. \quad [\text{解終}] \end{aligned}$$

2.7 複素共役とエルミート共役

複素数 $z = x + iy$ に対し、

$$z^* = x - iy$$

で z の複素共役を定義します。このとき、

$$z^*z = |z|^2 \geq 0 \quad (\text{等号成立は } z = 0).$$

一方、複素数を成分とする行列 A に対して、

$$(A^*)_{ij} = A_{ij}^*$$

で複素共役 A^* を定義します。すなわち行列の複素共役は、その各成分を複素共役とした行列です。また、複素共役の転置、

$$A^\dagger = A^{*T}$$

でエルミート共役を定義します。性質、

$$(A + B)^\dagger = A^\dagger + B^\dagger, \quad (cA)^\dagger = c^*A^\dagger, \quad (AB)^\dagger = B^\dagger A^\dagger$$

が確かめられるでしょう。ここで c は複素数です。

複素数を成分とするベクトル (N 行 1 列の行列) a, b について、

$$\langle a, b \rangle = a^\dagger b = a_i^* b_i$$

で内積を定義します。このとき、

$$\langle a, b \rangle^* = \langle b, a \rangle, \quad \langle a, a \rangle \geq 0 \quad (\text{等号成立は } a = 0)$$

が確かめられます。 $|a| = \sqrt{\langle a, a \rangle}$ でベクトルの大きさ (ノルム) を定義するのは実ベクトルと同じです。

$A^\dagger = A$ を満たす行列 A はエルミート行列と呼ばれます。 $A^\dagger A = \delta$ を満たす行列 A はユニタリ行列と呼ばれます (δ は単位行列)。エルミート行列は対称行列の複素数版、ユニタリ行列は直交行列の複素数版と考えることができます。ユニタリ行列による線形変換 (ユニタリ変換) は複素ベクトルの内積を保存することが確かめられるでしょう:

$$(a' = Aa \text{ かつ } b' = Ab \text{ かつ } A^\dagger A = \delta) \Rightarrow \langle a', b' \rangle = \langle a, b \rangle.$$

これは直交行列が実ベクトルの内積を保存することの複素数版です。

[例題] $U = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -i & i \end{pmatrix}$ がユニタリ行列であることを確かめよ。

[解] $U^\dagger U = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & i \\ 1 & -i \end{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -i & i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \delta.$ [解終]

2.8 行列式の性質

N 個の縦ベクトル v_1, v_2, \dots, v_N を横に並べて作った行列を (v_1, v_2, \dots, v_N) と書きます。すなわち、

$$(v_1, v_2, \dots, v_N)_{ij} = (v_j)_i.$$

もし各々の縦ベクトルが N 次のベクトルなら、この行列は正方行列となり、その行列式は、

$$\det(v_1, v_2, \dots, v_N) = \epsilon_{i_1 i_2 \dots i_N} (v_1)_{i_1} (v_2)_{i_2} \dots (v_N)_{i_N}$$

で与えられるでしょう。このとき次の性質を示すことができます：

$$\det(\dots, v, \dots, u, \dots) = -\det(\dots, u, \dots, v, \dots).$$

すなわち、正方行列の任意の2つの列を交換すると、その行列式は符号を変えます。また、 c を複素数として、

$$\det(\dots, v, \dots, u + cv, \dots) = \det(\dots, v, \dots, u, \dots)$$

を示すことも容易でしょう。すなわち、正方行列の任意の列に別の列の定数倍を加えても、その行列式は変わりません。これら性質は行列の列に関するものですが、 $\det A^T = \det A$ に注意すると、行についても同様に成り立ちます。

以上の性質を上手く利用すると、行列式を比較的速く計算することができます。例えば、

$$\det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & -5 & -7 \\ 2 & -1 & -5 \end{pmatrix} = 1 \times \det \begin{pmatrix} -5 & -7 \\ -1 & -5 \end{pmatrix} = 18.$$

最初の変形では、2列目から1列目の2倍を、3列目から1列目の3倍を引いています。そうして1行目の成分に0を増やすことで、後の余因子展開が簡単になるというわけです。(余因子展開についてはユークリッド幾何学の章を参照。)

2.9 行列の固有方程式と対角化

N 次正方行列 A に対し、方程式、

$$Av = \lambda v \quad (v \neq 0)$$

を A の固有方程式といい、複素数 λ を固有値、 v をその固有値に関する固有ベクトルといいます。

いま、行列 A の固有値が N 個求まり、固有値 λ_k に関する固有ベクトルを \boldsymbol{v}_k とすると、

$$\begin{aligned} A(\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \dots, \boldsymbol{v}_N) &= (\lambda_1 \boldsymbol{v}_1, \lambda_2 \boldsymbol{v}_2, \dots, \lambda_N \boldsymbol{v}_N) \\ &= (\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \dots, \boldsymbol{v}_N) \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_N). \end{aligned}$$

ここで $\text{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_N)$ は $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_N$ を対角成分とする対角行列です (非対角成分が全て0の行列)。よってもし $(\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \dots, \boldsymbol{v}_N)$ の逆行列が存在するなら、

$$A = B \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_N) B^{-1}, \quad B = (\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \dots, \boldsymbol{v}_N)$$

がわかりますが、この変形を行列 A の対角化といいます。

[例題] 2次正方行列 $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ を対角化せよ。

[解] 固有方程式は、

$$A\boldsymbol{v} = \lambda\boldsymbol{v} \quad \therefore \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \boldsymbol{v} = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} \boldsymbol{v} \quad \therefore \begin{pmatrix} -\lambda & 1 \\ 1 & -\lambda \end{pmatrix} \boldsymbol{v} = \mathbf{0}.$$

$$\boldsymbol{v} \neq \mathbf{0} \text{ より } \det \begin{pmatrix} -\lambda & 1 \\ 1 & -\lambda \end{pmatrix} = \lambda^2 - 1 = 0 \quad \therefore \lambda = \pm 1.$$

このとき $\boldsymbol{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ \pm 1 \end{pmatrix}$ (複号同順) で固有方程式が満たされるので、

$$A = B \text{diag}(1, -1) B^{-1}, \quad \text{ここで } B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}. \quad \text{[解終]}$$

ただし固有ベクトル \boldsymbol{v} にはそれぞれ定数倍の不定性があるため、行列 B にもこれに関連した不定性があることに注意してください。

2.10 行列の指数関数とトレース

正方行列 A の指数関数は、

$$e^A = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} A^n$$

のように定義されます。すなわち形式的に指数関数のマクローリン展開を行列に適用し定義するわけです。

二項定理：

$$(a+b)^s = \sum_{n=0}^s {}_s C_n a^n b^{s-n} = \sum_{n=0}^s \frac{s!}{n!(s-n)!} a^n b^{s-n}$$

に注意すると、正方行列 A, B が互いに可換なとき、

$$\begin{aligned} e^A e^B &= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{n!m!} A^n B^m = \sum_{s=0}^{\infty} \sum_{n=0}^s \frac{1}{n!(s-n)!} A^n B^{s-n} \\ &= \sum_{s=0}^{\infty} \frac{1}{s!} (A+B)^s = e^{A+B} \end{aligned}$$

がわかります。よって e^A の逆行列は e^{-A} です。また、 A がエルミート行列のとき e^{iA} がユニタリ行列になることもわかるでしょう。

一方、正方行列 A, B に対して一般に $(BAB^{-1})^n = BA^n B^{-1}$ であることに注意すると、

$$e^{BAB^{-1}} = B e^A B^{-1}.$$

また、 $\text{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_N)^n = \text{diag}(\lambda_1^n, \lambda_2^n, \dots, \lambda_N^n)$ に注意すれば、

$$e^{\text{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_N)} = \text{diag}(e^{\lambda_1}, e^{\lambda_2}, \dots, e^{\lambda_N})$$

が確かめられます。

[例題] $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ のとき $U = e^{i\theta A}$ を求めよ。

[解] 先の例題の結果と上の性質に注意して、

$$\begin{aligned} U &= e^{i\theta B \text{diag}(1, -1) B^{-1}} = B e^{\text{diag}(i\theta, -i\theta)} B^{-1} = B \text{diag}(e^{i\theta}, e^{-i\theta}) B^{-1} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{i\theta} & 0 \\ 0 & e^{-i\theta} \end{pmatrix} \frac{1}{-2} \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta & i \sin \theta \\ i \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}. \quad \text{[解終]} \end{aligned}$$

正方行列 A の対角成分の和を $\text{tr}A$ と書いて、 A のトレース (跡) といいます：

$$\text{tr}A = A_{ii}.$$

このとき、

$$\text{tr}(A+B) = \text{tr}A + \text{tr}B, \quad \text{tr}(cA) = c \text{tr}A, \quad \text{tr}(AB) = \text{tr}(BA)$$

という性質が簡単に確かめられるでしょう (c は複素数)。また、

$$\det e^A = e^{\text{tr}A}$$

が次のように証明されます (*).

[証明] N 次正方行列 A , N 次単位行列 δ , 無限小量 ϵ に対して、

$$\begin{aligned}\det(\delta + \epsilon A) &= \epsilon_{i_1 i_2 \dots i_N} (\delta_{1 i_1} + \epsilon A_{1 i_1}) (\delta_{2 i_2} + \epsilon A_{2 i_2}) \cdots (\delta_{N i_N} + \epsilon A_{N i_N}) \\ &= \epsilon_{12 \dots N} + \epsilon_{i_1 2 \dots N} \epsilon A_{1 i_1} + \epsilon_{1 i_2 \dots N} \epsilon A_{2 i_2} + \cdots + \epsilon_{12 \dots i_N} \epsilon A_{N i_N} \\ &= 1 + \epsilon (A_{11} + A_{22} + \cdots + A_{NN}) = 1 + \epsilon \operatorname{tr} A.\end{aligned}$$

よって、 $\det e^{\epsilon A} = e^{\epsilon \operatorname{tr} A}$ ですが、両辺 n 乗し n を無限に大きく取り $n\epsilon = 1$ とおけば与題を得ます。[証明終]

(*注) $\det e^A = e^{\operatorname{tr} A}$ の証明は、もし行列 A が $A = BHB^{-1}$ のように対角化できるなら (H は対角行列)、

$$\det e^{BHB^{-1}} = \det(Be^H B^{-1}) = \det e^H, \quad \operatorname{tr}(BHB^{-1}) = \operatorname{tr}(B^{-1}BH) = \operatorname{tr} H$$

に注意して簡単です。しかし行列 B が正則とは限らず、 A が対角化可能とは限りません。 A が対角化可能でない場合を別に考察して証明を完成させることもできるでしょうが、上のように無限小量を導入して証明するのが簡単です。

2.11 1 階の微分方程式

微分方程式は、微分を含んだ方程式のことで、それを満たす関数を求めることを、その微分方程式を解くといいます。物理では微分方程式を解くことが必要になってきます。代表的な形と解き方について、ここで簡単に説明します。

1 階の微分方程式は、1 階微分だけを含んだ微分方程式のことで、

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y)$$

という形です。これを一般に解析的に解くことは難しいですが、

$$\frac{dy}{dx} = p(x)q(y)$$

のように、右辺が x, y それぞれの関数の積に分離する場合は、変数分離形と呼ばれ、基本的に、

$$\int \frac{dy}{q(y)} = \int dx p(x)$$

と変形され、不定積分に帰着します。不定積分はそれ自体解析的とみなされるので、これで微分方程式が解けたと考えられます。変数分離形は容易に解けます。

[例題] 微分方程式 $\frac{dy}{dx} = 3x^2 y$ を解け。

[解] $y = 0 (\forall x)$ は解。 $y \neq 0$ のときは、

$$\int \frac{dy}{y} = 3 \int dx x^2 \quad \therefore \log y = x^3 + A \quad \therefore y = e^{x^3+A} = Be^{x^3}.$$

ここで $A, B = e^A$ は定数。このとき $y = 0$ は $B = 0$ において実現されるので、一般解は $y = Be^{x^3}$ 。 [解終]

また、変数分離形でない場合でも、 $y = u(x)v(x)$ とおき関数 $v(x)$ を都合よく選ぶことで、変数分離形に帰着して解けることがあります。

[例題] 微分方程式 $\frac{dy}{dx} = \frac{2y}{x} + x$ を解け。

[解] $y = uv$ とおくと、

$$\frac{du}{dx}v + u \frac{dv}{dx} = \frac{2uv}{x} + x \quad \therefore \frac{du}{dx}v + u \left(\frac{dv}{dx} - \frac{2v}{x} \right) = x.$$

左辺の括弧内が 0 になるように v を選ぶことにすると、

$$\frac{dv}{dx} = \frac{2v}{x} \quad \therefore \int \frac{dv}{v} = 2 \int \frac{dx}{x} \quad \therefore \log v = 2 \log x + A \quad \therefore v = e^{2 \log x + A} = Bx^2.$$

特に $B = 1$ として $v = x^2$ に選びます。そうすると、

$$\frac{du}{dx}x^2 = x \quad \therefore \frac{du}{dx} = \frac{1}{x} \quad \therefore u = \log x + C \quad \therefore y = uv = x^2 \log x + Cx^2.$$

ここで C は任意定数です。 [解終]

(余談) 特に、

$$\frac{dy}{dx} = f\left(\frac{y}{x}\right)$$

という形の微分方程式は、 $y = xu(x)$ とおくことで変数分離形に帰着することが確かめられるでしょう。このような微分方程式は同次形と呼ばれます。

2.12 定係数線形微分方程式

x による微分演算子を $D = d/dx$ とし、また、 ϕ を N 次の多項式としたとき、

$$\phi(D)y = f(x)$$

という形の微分方程式は、 N 階の定係数線形微分方程式と呼ばれ、容易に解くことができます。ここで f は任意の関数です。もう少し具体的に書けば、 N 次多項式 ϕ の n 次の係数を a_n として、

$$(a_N D^N + a_{N-1} D^{N-1} + \cdots + a_1 D + a_0) y = f(x)$$

という形です。 a_n が x に依存せず定数なので、定係数といい、微分方程式が y について1次なので、線形というわけです。特に $f(x) = 0$ のときは斉次(同次)であるといい、このため右辺の $f(x)$ は非斉次項と呼ばれます。

上の微分方程式の解が1つ見つかり、線形性から、それに $\phi(D)y = 0$ の解を加えてもやはり解になっています。よって上の微分方程式の一般解は、特殊解(特解)1つと、斉次方程式 $\phi(D)y = 0$ の一般解を加えたものになります。

斉次方程式 $\phi(D)y = 0$ の一般解は $y = e^{\lambda x}$ とおくことで得られます。このとき、

$$\phi(\lambda) = 0$$

ですが、これを特性方程式といいます。特性方程式は N 次方程式で、これを解くことで N 個の解 $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_N$ が得られ、このとき $y = e^{\lambda_n x}$ ($n = 1, 2, \dots, N$) は全て解なので、これらの線形結合、

$$y = C_1 e^{\lambda_1 x} + C_2 e^{\lambda_2 x} + \dots + C_N e^{\lambda_N x}$$

も解です。ここで C_n は任意の定数ですが、これらが N 個あって自由に選べるので、これは一般解といえます。ただし特性方程式が重解を持つときは注意が必要です。例えば、 λ が m 重解のときは、

$$(D - \lambda)f(x)e^{\lambda x} = f'(x)e^{\lambda x} \quad \therefore (D - \lambda)^m f(x)e^{\lambda x} = f^{(m)}(x)e^{\lambda x}$$

に注意し、 $e^{\lambda x}, x e^{\lambda x}, \dots, x^{m-1} e^{\lambda x}$ がそれぞれ独立な解であることがわかります。よってこれらの線形結合により、やはり一般解を構成できることになります。

例を見るのが早いでしょう。

[例題] 微分方程式 $y^{(4)} - y^{(3)} - 3y^{(2)} + 5y^{(1)} - 2y = 0$ を解け。ただし $y^{(n)}$ は x による y の n 階微分を意味する。

[解] 与式は $(D^4 - D^3 - 3D^2 + 5D - 2)y = 0 \quad \therefore (D - 1)^3(D + 2)y = 0$ なので、特性方程式は $(\lambda - 1)^3(\lambda + 2) = 0$ で、その解は $\lambda = 1$ (3重解) および $\lambda = -2$ です。よって一般解は、

$$y = C_1 e^x + C_2 x e^x + C_3 x^2 e^x + C_4 e^{-2x}$$

と書けます。ここで、 C_1, C_2, C_3, C_4 は任意定数です。[解終]

[例題] 微分方程式 $y'' - 5y' + 6y = x^2 + 1$ を解け。

[解] 右辺が0のときは、 $(D^2 - 5D + 6)y = 0 \quad \therefore (D - 2)(D - 3)y = 0$ なので、斉次一般解は、 $y = C_1 e^{2x} + C_2 e^{3x}$ 。一方、特解は、

$$y = \frac{1}{D^2 - 5D + 6} (x^2 + 1) = \frac{1}{6} x^2 + \frac{5}{18} x + \frac{37}{108}$$

なので、一般解は、 $y = \frac{18x^2 + 30x + 37}{108} + C_1 e^{2x} + C_2 e^{3x}$ です。[解終]

ここで $(D^2 - 5D + 6)^{-1}(x^2 + 1)$ は、 $(D^2 - 5D + 6)$ を演算すると $(x^2 + 1)$ になる式という意味で、図 2.6 のように割り算と同様な逆算により導出できます。

$$\begin{array}{r}
 \frac{1}{6}x^2 + \frac{5}{18}x + \frac{37}{108} \\
 6 - 5D + D^2 \overline{) \begin{array}{l} x^2 + 1 \\ x^2 - \frac{5}{3}x + \frac{1}{3} \\ \hline \frac{5}{3}x + \frac{2}{3} \\ \frac{5}{3}x - \frac{25}{18} \\ \hline \frac{37}{18} \\ \frac{37}{18} \\ \hline 0 \end{array} }
 \end{array}$$

図 2.6: 微分演算子による割り算

一方、非斉次項に指数関数や三角関数が含まれる場合は、

$$\frac{1}{\phi(D)} e^{\alpha x} f(x) = e^{\alpha x} \frac{1}{\phi(D + \alpha)} f(x)$$

という公式が有用になります。

[証明] $D e^{\alpha x} f(x) = e^{\alpha x} (D + \alpha) f(x)$ が簡単に確かめられるので、これにより、任意の多項式 ϕ について、 $\phi(D) e^{\alpha x} f(x) = e^{\alpha x} \phi(D + \alpha) f(x)$ がわかります。よって、

$$\phi(D) e^{\alpha x} \frac{1}{\phi(D + \alpha)} f(x) = e^{\alpha x} \phi(D + \alpha) \frac{1}{\phi(D + \alpha)} f(x) = e^{\alpha x} f(x)$$

ですが、これは与題と等価です。[証明終]

三角関数を非斉次項に持つ例を見ておきましょう。

[例題] 微分方程式 $y'' + y = \cos(Ax)$ を解け。ただし A は正の実数とする。

[解] 右辺が 0 のときは、 $(D^2 + 1)y = 0$ で、 $\lambda^2 + 1 = 0$ の解は $\lambda = \pm i$ なので、斉次一般解は、 $y = C_1 e^{ix} + C_2 e^{-ix}$ 。これはオイラーの式に注意すると、 $y = B_1 \cos x + B_2 \sin x$ と書くこともできます。 B_1, B_2 は任意定数です。一方、特

解は、 $\cos(Ax) = \operatorname{Re} e^{iAx}$ に注意して、

$$y = \frac{1}{D^2 + 1} \operatorname{Re} e^{iAx} = \operatorname{Re} e^{iAx} \frac{1}{(D + iA)^2 + 1} 1$$

$$= \operatorname{Re} e^{iAx} \frac{1}{1 - A^2 + 2iAD + D^2} 1 = \begin{cases} \operatorname{Re} e^{iAx} \frac{1}{1 - A^2} = \frac{\cos(Ax)}{1 - A^2} & (A \neq 1) \\ \operatorname{Re} e^{ix} \frac{x}{2i} = \frac{x \sin x}{2} & (A = 1) \end{cases}$$

と計算されるので、一般解は、

$$y = B_1 \cos x + B_2 \sin x + \begin{cases} \frac{\cos(Ax)}{1 - A^2} & (A \neq 1) \\ \frac{x \sin x}{2} & (A = 1) \end{cases}$$

となります。[解終]

微分方程式の解き方は以上です。特に物理においては、これくらい知っていれば基礎知識として十分です。

(余談) 物理においては対称性から保存則が得られるので、対称性が十分ある系は1階の微分方程式に帰着し、多くの場合それは変数分離形です。そうでない場合でも線形近似と摂動論により計算することが多く、非線形で高階な微分方程式の解を知ることはそれ自体が1つの数理的分野となっていて、非線形物理などと呼ばれます。例えばカオスは一部の非線形微分方程式の解が有する数理現象で、その振る舞いは非常に複雑なものになります。

2.13 ガウス積分とガンマ関数

広義積分、

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} dx e^{-x^2}$$

をガウス積分といいます。自乗を作ると、

$$I^2 = \int_{-\infty}^{\infty} dx e^{-x^2} \int_{-\infty}^{\infty} dy e^{-y^2} = \int_{-\infty}^{\infty} dx \int_{-\infty}^{\infty} dy e^{-x^2 - y^2}$$

ですが、積分変数を極座標に変換し、

$$I^2 = \int_0^{\infty} dr \int_0^{2\pi} d\theta r e^{-r^2} = 2\pi \int_0^{\infty} dr r e^{-r^2}.$$

この積分は積分変数を $s = r^2$ に置換すれば実行できて、結果、 $I^2 = \pi$ を得ます。よって、

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx e^{-x^2} = \sqrt{\pi}.$$

あるいはここから、

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx e^{-ax^2} = \sqrt{\frac{\pi}{a}} \quad (a > 0)$$

という公式を得ます。

一方、 $x > 0$ に対して、

$$\Gamma(x) = \int_0^{\infty} dt t^{x-1} e^{-t}$$

でガンマ関数を定義します。容易に、

$$\Gamma(1) = 1, \quad \Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$$

が確かめられるので、正の整数 n に対して、

$$\Gamma(n) = (n-1)!$$

です。すなわちガンマ関数は階乗の定義域を正の実数にまで拡張した関数になっています。 $\Gamma(1/2)$ はガウス積分に帰着することがわかり、

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}.$$

また、

$$\Gamma(1+\epsilon) = \epsilon\Gamma(\epsilon) \quad \therefore \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \epsilon\Gamma(\epsilon) = 1.$$

すなわち $\Gamma(x)$ は $x \rightarrow 0$ において発散し、その留数は 1 です。

(余談) “ $x > 0$ ” のように定義域を不等式で表したときは、暗黙に x は実数と考えます。複素数には大小関係 (順序関係) がないことに注意。

2.14 n次元球の体積

ガウス積分およびガンマ関数の風変わりな応用として、 n 次元球の体積の問題があります。

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} dx_1 \int_{-\infty}^{\infty} dx_2 \cdots \int_{-\infty}^{\infty} dx_n e^{-(x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2)}$$

という n 重積分を考えると、ガウス積分の結果から、

$$I = \pi^{n/2}.$$

一方、半径 R の n 次元球の体積を、

$$V_n(R) = C_n R^n$$

とすると、半径 R の n 次元球面の表面積が、

$$S_n(R) = \frac{d}{dR} V_n(R) = n C_n R^{n-1}$$

となるはずなので、 I は、

$$\begin{aligned} I &= \int_0^\infty dr n C_n r^{n-1} e^{-r^2} = \frac{n C_n}{2} \int_0^\infty ds s^{n/2-1} e^{-s} \\ &= \frac{n C_n}{2} \Gamma\left(\frac{n}{2}\right) = C_n \Gamma\left(\frac{n}{2} + 1\right) \end{aligned}$$

と評価することもできます。2つの I の結果を比較して、

$$C_n = \frac{\pi^{n/2}}{\Gamma\left(\frac{n}{2} + 1\right)} \quad \therefore V_n(R) = \frac{\pi^{n/2} R^n}{\Gamma\left(\frac{n}{2} + 1\right)}.$$

$V_2(R) = \pi R^2$, $V_3(R) = (4/3) \pi R^3$ が得られることを確認してみてください。また、半径 R の4次元球の体積は $V_4(R) = (1/2) \pi^2 R^4$ となることがわかります。

(余談) 4次元デカルト座標 x_i ($i = 1, 2, 3, 4$) に対し、

$$\begin{aligned} x_1 &= r \cos \psi, & x_2 &= r \sin \psi \cos \theta, & x_3 &= r \sin \psi \sin \theta \cos \phi, & x_4 &= r \sin \psi \sin \theta \sin \phi \\ &(0 \leq r < \infty, & 0 \leq \psi < \pi, & 0 \leq \theta < \pi, & 0 \leq \phi < 2\pi) \end{aligned}$$

で4次元極座標を定義すると、これは原点を除き4次元ユークリッド空間の全領域を1対1に覆います。この極座標 $\xi_i = (r, \theta, \phi, \psi)_i$ におけるヤコビアン $\det \partial x / \partial \xi$ を計算すると、 $r^3 \sin^2 \psi \sin \theta$ となるので、半径 R の4次元球の体積は、

$$V_4(R) = \int_0^R dr r^3 \int_0^\pi d\psi \sin^2 \psi \int_0^\pi d\theta \sin \theta \int_0^{2\pi} d\phi = \frac{R^4}{4} \cdot \frac{\pi}{2} \cdot 2 \cdot 2\pi = \frac{1}{2} \pi^2 R^4.$$

これはもちろん上の結果と一致しています。

2.15 スターリングの式

ガンマ関数は、

$$\Gamma(x+1) = \int_0^\infty dx t^x e^{-t} = \int_0^\infty dx e^{-f(t)}, \quad f(t) = t - x \log t$$

と表せますが、この積分で特に効くのは $f(t)$ の最小値を与える t の近辺だけのはずなので、他の区間の積分を無視するという近似が考えられます(漸近展開)。 $f(t)$ は $t = x$ で最小値を持つことがわかり、 $f(t)$ を $t = x$ のまわりでテイラー展開すると、

$$f(t) = x - x \log x + \frac{1}{2x} (t-x)^2 + \dots$$

よって、

$$\begin{aligned}\Gamma(x+1) &\sim e^{-x+x\log x} \int_{x \text{ の周辺}} dt e^{-(t-x)^2/(2x)} \\ &\sim e^{-x+x\log x} \int_{-\infty}^{\infty} dt e^{-(t-x)^2/(2x)} = \sqrt{2\pi x} x^x e^{-x}\end{aligned}$$

という近似式を得ます。これをスターリングの式といい、非常に精度のよい近似式として知られています。

x	$\Gamma(x+1)$	$\sqrt{2\pi x} x^x e^{-x}$	比
2	2	1.9190044	1.0422071
4	24	23.506175	1.0210083
6	720	710.07818	1.0139728
8	40320	39902.395	1.0104657
10	3628800	3598695.6	1.0083654

スターリングの式から、正の整数 n に対して、

$$\frac{\log n!}{n} \sim \log n - 1 - \frac{\log(2\pi n)}{2n}$$

ですが、 n が十分大きいときは最後の項を無視でき、

$$\log n! \sim n \log n - n$$

と評価されます。

2.16 二項分布と正規分布

1回の試行で事象 A が起こる確率が p であるとき、 n 回の試行で A が k 回起こる確率は、

$$\mathcal{B}(k; p, n) = {}_n C_k p^k (1-p)^{n-k}$$

と書けます。これを二項分布といいます。確率変数 k の期待値および分散は、それぞれ、

$$\langle k \rangle = np, \quad \langle (k - \langle k \rangle)^2 \rangle = np(1-p)$$

となることが確かめられます。ここで $\langle f(k) \rangle = \sum_{k=0}^n f(k) \mathcal{B}(k; p, n)$.

[証明] 二項定理 : $(a + b)^n = \sum_{k=0}^n {}_n C_k a^k b^{n-k}$ に注意して、

$$\begin{aligned} \langle k \rangle &= \sum_{k=0}^n k {}_n C_k p^k (1-p)^{n-k} = \frac{d}{dx} \sum_{k=0}^n {}_n C_k (px)^k (1-p)^{n-k} \Big|_{x=1} \\ &= \frac{d}{dx} (px + 1 - p)^n \Big|_{x=1} = np. \end{aligned}$$

また、

$$\begin{aligned} \langle k(k-1) \rangle &= \sum_{k=0}^n k(k-1) {}_n C_k p^k (1-p)^{n-k} = \frac{d^2}{dx^2} \sum_{k=0}^n {}_n C_k (px)^k (1-p)^{n-k} \Big|_{x=1} \\ &= \frac{d^2}{dx^2} (px + 1 - p)^n \Big|_{x=1} = n(n-1)p^2 \end{aligned}$$

から、

$$\begin{aligned} \langle (k - \langle k \rangle)^2 \rangle &= \langle k^2 \rangle - \langle k \rangle^2 = \langle k(k-1) \rangle + \langle k \rangle - \langle k \rangle^2 \\ &= n(n-1)p^2 + np - (np)^2 = np(1-p) \end{aligned}$$

を得ます。[証明終]

一方、

$$\mathcal{N}(x; \mu, \sigma) = \frac{1}{\sqrt{2\pi} \sigma} \exp\left(-\frac{(x - \mu)^2}{2\sigma^2}\right)$$

を正規分布あるいはガウス分布といい、これは確率分布関数として代表的なものです。

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx \mathcal{N}(x; \mu, \sigma) = 1$$

および、

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx x \mathcal{N}(x; \mu, \sigma) = \mu, \quad \int_{-\infty}^{\infty} dx (x - \mu)^2 \mathcal{N}(x; \mu, \sigma) = \sigma^2$$

が確かめられるので、パラメータ μ は期待値、 σ^2 は分散を意味します。 σ は分散の平方根で、標準偏差と呼ばれます (図 2.7)。

二項分布は、 $n, k, n - k$ が十分大きいとき、

$$\mathcal{B}(k; p, n) \sim \mathcal{N}\left(k; np, \sqrt{np(1-p)}\right)$$

と近似されます。

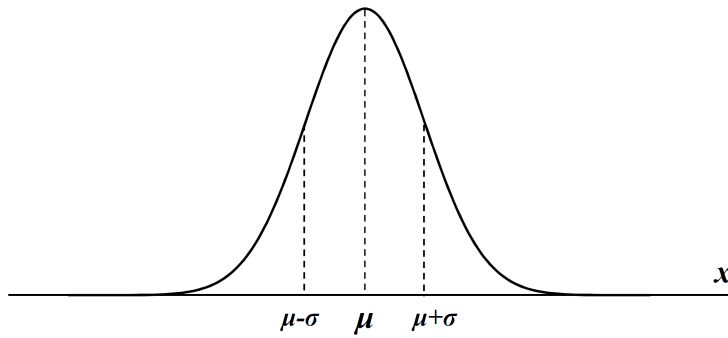


図 2.7: 正規分布

[証明] ${}_n C_k = \frac{n!}{k!(n-k)!}$ およびスターリングの式に注意すると、

$$\begin{aligned} \log \mathcal{B}(k; p, n) &\sim n \log n - n - k \log k + k - (n-k) \log(n-k) + (n-k) \\ &\quad + k \log p + (n-k) \log(1-p) \\ &= -k \log k - (n-k) \log(n-k) + k \log \frac{p}{1-p} + (\text{定数}) \end{aligned}$$

ですが、 $k = np + x$ で変数を x に変えると、

$$\begin{aligned} \log \mathcal{B}(k; p, n) &\sim -(np + x) \log \left(1 + \frac{x}{np} \right) \\ &\quad - (n(1-p) - x) \log \left(1 - \frac{x}{n(1-p)} \right) + (\text{定数}) \end{aligned}$$

と整理されます。ここで $\log(1+x) = x - (1/2)x^2 + \dots$ に注意すると、 $1/n$ の高次を無視して、

$$\log \mathcal{B}(k; p, n) \sim -\frac{x^2}{2np(1-p)} + (\text{定数}) \quad \therefore \mathcal{B}(k; p, n) \propto \exp \left(-\frac{(k-np)^2}{2np(1-p)} \right).$$

比例因子は全確率が 1 となることから定まり、与題を得ます。[証明終]

変数 x の確率分布が正規分布 $\mathcal{N}(x; \mu, \sigma)$ に従う場合、 $|x - \mu| < s\sigma$ が満たされる確率は、

$$\mathcal{M}(s) = \int_{\mu-s\sigma}^{\mu+s\sigma} dx \mathcal{N}(x; \mu, \sigma) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^s dt e^{-t^2/2} \sim \begin{cases} 0.6827 & (s = 1) \\ 0.9545 & (s = 2) \\ 0.9973 & (s = 3) \end{cases}$$

で与えられます。よって二項分布 $\mathcal{B}(k; p, n)$ において、特にいまの近似が適用できる場合、

$$|k - np| < s\sqrt{np(1-p)} \text{ が満たされる確率は } \mathcal{M}(s)$$

ということがわかり、これは統計学の基礎となる定理です。

[例題] 無作為に選んだ 1000 人に政党 A を支持するかどうか聞いたところ、350 人が支持すると答えた。政党 A の支持率を 5% の危険率で求めよ。

[解] 支持率 p , $n = 1000$, $k = 350$ に対し、およそ 95% の確率で、

$$|k - np| < 2\sqrt{np(1-p)} \quad \therefore |p - k/n| < 2\sqrt{p(1-p)/n}$$

ですが、右辺においては $p \sim k/n = 0.35$ と近似でき、 $|p - 0.35| < 0.0302$. よって政党 A の支持率は 5% の危険率で 32% ~ 38%. [解終]

2.17 デルタ関数

実数 x に対して、

$$\delta(x) = \mathcal{N}(x; 0, 0) = \lim_{\epsilon \rightarrow +0} \frac{1}{\sqrt{\pi\epsilon}} e^{-x^2/\epsilon^2}$$

でデルタ関数を定義します。このとき、

$$\delta(x) = 0 \quad (x \neq 0), \quad \delta(0) \rightarrow \infty.$$

デルタ関数は $x = 0$ で無限に尖った関数です。

デルタ関数は明らかに偶関数です：

$$\delta(-x) = \delta(x).$$

また、0 でない実数 a に対して、

$$\delta(ax) = \frac{1}{|a|} \delta(x)$$

が確かめられるでしょう。

0 以上の整数 n に対して、 $\int_{-\infty}^{\infty} dx x^n \delta(x)$ という積分を考えてみると、 n が奇数のときは奇関数の積分となるため明らかに 0 で、偶数のときは、

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx x^n \delta(x) = \lim_{\epsilon \rightarrow +0} 2 \int_0^{\infty} dx x^n \frac{1}{\sqrt{\pi\epsilon}} e^{-x^2/\epsilon^2} = \lim_{\epsilon \rightarrow +0} \frac{\epsilon^n}{\sqrt{\pi}} \Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)$$

と評価されます。よって、

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx x^n \delta(x) = \delta_{n0}$$

を得ます。ここで δ_{nm} はクロネッカーデルタです。この性質を用いると、任意の微分可能な関数 $f(x)$, 任意の実数 y に対して、

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{\infty} dx f(x)\delta(x-y) &= \int_{-\infty}^{\infty} dx \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(y)}{n!} (x-y)^n \delta(x-y) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(y)}{n!} \delta_{n0} = f(y)\end{aligned}$$

がわかります。この式はクロネッカーデルタの性質：

$$\sum_n f_n \delta_{nm} = f_m$$

の連続変数版と捉えることができ、すなわちデルタ関数 $\delta(x-y)$ はクロネッカーデルタ δ_{nm} の連続版とみなせます。

次の積分表示があります：

$$\delta(x) = \lim_{\epsilon \rightarrow +0} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dk}{2\pi} e^{ikx - \epsilon^2 k^2}.$$

これは指数関数の中を k に関して平方完成し、ガウス積分として実行すれば確かめられるでしょう。形式的に $\epsilon \rightarrow +0$ の極限をとれば、

$$\delta(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dk}{2\pi} e^{ikx}$$

と表現されることになります。

2.18 フーリエ変換

実数 k, x に対して、

$$\phi_k(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{ikx}$$

で定義される関数は、規格直交性および完全性：

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx \phi_k^*(x) \phi_{k'}(x) = \delta(k-k'), \quad \int_{-\infty}^{\infty} dk \phi_k(x) \phi_k^*(x') = \delta(x-x')$$

を満たします^(*)。このため、

$$\tilde{f}(k) = \int_{-\infty}^{\infty} dx \phi_k^*(x) f(x)$$

により、関数 $f(x)$ のフーリエ変換を定義すると、

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} dk \tilde{f}(k) \phi_k(x) &= \int_{-\infty}^{\infty} dk \phi_k(x) \int_{-\infty}^{\infty} dx' \phi_k^*(x') f(x') \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} dx' \delta(x-x') f(x') = f(x). \end{aligned}$$

すなわち、もとの関数は、

$$f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} dk \tilde{f}(k) \phi_k(x)$$

と展開されることがわかります。

このとき、

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx |f(x)|^2 = \int_{-\infty}^{\infty} dk |\tilde{f}(k)|^2$$

が確かめられますが、これをパーセバルの等式といいます。

(*注) 複素ベクトルの系 \mathbf{v}_k ($k = 1, 2, \dots$) に対し、規格直交性は、

$$\mathbf{v}_k^\dagger \mathbf{v}_{k'} = \delta_{kk'} \quad \therefore \sum_x (\mathbf{v}_k)_x (\mathbf{v}_{k'})_x = \delta_{kk'}.$$

完全性は、

$$\sum_k \mathbf{v}_k \mathbf{v}_k^\dagger = \delta \quad \therefore \sum_k (\mathbf{v}_k)_x (\mathbf{v}_k^*)_{x'} = \delta_{xx'}$$

ですが、関数における規格直交性および完全性はこれの連続版と捉えることができます。完全性は任意のベクトルがその系 (基底) によって展開できることを意味し、実際上式が成り立つなら、任意のベクトル \mathbf{a} は、

$$\mathbf{a} = \delta \mathbf{a} = \sum_k \mathbf{v}_k \mathbf{v}_k^\dagger \mathbf{a} = \sum_k c_k \mathbf{v}_k, \quad c_k = \mathbf{v}_k^\dagger \mathbf{a}$$

と展開されます。

2.19 有限区間のフーリエ変換

整数全体の集合を \mathbf{Z} と書きます。実数 x に対して、

$$D(x) = \frac{1}{2\pi} \sum_{n \in \mathbf{Z}} e^{inx}$$

という関数を考えると、

$$\int_{-\pi}^{\pi} dx D(x) = 1, \quad D(x + 2\pi) = D(x)$$

が簡単にわかります。また、少しテクニカルですが、

$$\begin{aligned} 2\pi D(x) &= 1 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \cos(nx) = 1 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(nx) \sin(x/2)}{\sin(x/2)} \\ &= 1 + \lim_{\Lambda \rightarrow \infty} \sum_{n=1}^{\Lambda} \frac{\sin((n+1/2)x) - \sin((n-1/2)x)}{\sin(x/2)} \\ &= \lim_{\Lambda \rightarrow \infty} \frac{\sin((\Lambda+1/2)x)}{\sin(x/2)} \end{aligned}$$

と展開され、これは $x = 2\pi n$ ($n \in \mathbf{Z}$) に特異性を持ち、他で無限に高周波な関数であることがわかります。すなわち超関数論的(*)に、

$$D(x) = 0 \quad (x \neq 2\pi n).$$

以上の事柄から、

$$D(x) = \sum_{n \in \mathbf{Z}} \delta(x - 2\pi n)$$

とみなせます。また、

$$\sum_{n=1}^{\infty} \cos(nx) = \pi \sum_{n \in \mathbf{Z}} \delta(x - 2\pi n) - \frac{1}{2}$$

という公式を得ます。

そうすると、 $n \in \mathbf{Z}$ および $x \in (-\pi, \pi)$ に対して、

$$\phi_n(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{inx}$$

で定義される関数は、規格直交性および完全性：

$$\int_{-\pi}^{\pi} dx \phi_n^*(x) \phi_{n'}(x) = \delta_{nn'}, \quad \sum_{n \in \mathbf{Z}} \phi_n(x) \phi_n^*(x') = \delta(x - x')$$

を満たすことがわかります。このため、

$$\tilde{f}_n = \int_{-\pi}^{\pi} dx \phi_n^*(x) f(x)$$

で関数 $f(x)$ のフーリエ変換(フーリエ係数)を定義すると、もとの関数は、

$$f(x) = \sum_{n \in \mathbf{Z}} \tilde{f}_n \phi_n(x)$$

と展開されます。このとき、

$$\int_{-\pi}^{\pi} dx |f(x)|^2 = \sum_{n \in \mathbf{Z}} |\tilde{f}_n|^2$$

が確かめられ、やはりパーセバルの等式と呼ばれます。

こちらのパーセバルの等式は右辺が級数のため、級数に関する面白い式を生じることがあります。例えば $f(x) = x$ とすると、フーリエ係数は、

$$\tilde{f}_n = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\pi}^{\pi} dx x e^{-inx} = \begin{cases} \frac{i\sqrt{2\pi}(-1)^n}{n} & (n \neq 0) \\ 0 & (n = 0) \end{cases}$$

と計算されますが、これをパーセバルの等式に入れると、

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$$

を得ます。これは初等的には評価の難しい級数です(バーゼル問題)。

ちなみに、 $n = 1, 2, \dots$ に対し、ユニタリ変換、

$$\begin{pmatrix} \phi'_n(x) \\ \phi'_{-n}(x) \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -i & i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \phi_n(x) \\ \phi_{-n}(x) \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \begin{pmatrix} \cos(nx) \\ \sin(nx) \end{pmatrix}$$

を行っても規格直交性は保たれます。よって、

$$\phi'_0(x) = \phi_0(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}$$

として、 $\{\phi'_n(x) | n \in \mathbf{Z}\}$ もまた $x \in (-\pi, \pi)$ における完全規格直交系です。こちらの系は実関数を展開するときに便利です。

また、 $x \in (0, \pi)$ においては、仮想的に偶関数もしくは奇関数であることを仮定して、

$$\{\cos(nx) | n = 0, 1, 2, \dots\} \quad \text{および} \quad \{\sin(nx) | n = 1, 2, \dots\}$$

がそれぞれ完全系とみなせることになります。

[例題] 定義域 $0 < x < L$ における任意の関数 $f(x)$ は、

$$\left\{ \cos \frac{\pi nx}{L} \mid n = 0, 1, 2, \dots \right\} \quad \text{あるいは} \quad \left\{ \sin \frac{\pi nx}{L} \mid n = 1, 2, \dots \right\}$$

でフーリエ展開できるはずである。それぞれの場合においてフーリエ係数を与える式を求めよ。

[解] $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cos \frac{\pi n x}{L}$ とすると、 $n' = 0, 1, 2, \dots$ に対して、

$$\begin{aligned} \int_0^L dx f(x) \cos \frac{\pi n' x}{L} &= \sum_{n=0}^{\infty} a_n \int_0^L dx \cos \frac{\pi n x}{L} \cos \frac{\pi n' x}{L} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} a_n \int_0^L dx \frac{1}{2} \left(\cos \frac{\pi(n-n')x}{L} + \cos \frac{\pi(n+n')x}{L} \right) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} a_n \frac{L}{2} (\delta_{nn'} + \delta_{nn'} \delta_{n'0}) = \frac{L}{2} (1 + \delta_{n'0}) a_{n'} \\ \therefore a_n &= \frac{2}{(1 + \delta_{n0})L} \int_0^L dx f(x) \cos \frac{\pi n x}{L}. \end{aligned}$$

一方、 $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin \frac{\pi n x}{L}$ とした場合は、同様な計算により、

$$b_n = \frac{2}{L} \int_0^L dx f(x) \sin \frac{\pi n x}{L}$$

を得ます。[解終]

(*注) 区間 (a, b) で連続な任意の関数 ϕ に対して $\int_a^b dx \phi(x) f(x) = 0$ のとき、区間 (a, b) で $f(x) = 0$ であることを容認 (仮定) する数学は、超関数論と呼ばれます。超関数論は通常解析学を拡張したやや荒っぽい数学と考えられますが、理論物理学では広く用いられます。

索引

<hr/>	
あ	
n 次元球の体積	21
エルミート共役	12
エルミート行列	12
オイラーの式	5
<hr/>	
か	
ガウス積分	20
ガウス分布	24
カオス	20
関数論	3
完全性	27
ガンマ関数	21
規格直交性	27
期待値	23
極	9
極形式	5
虚数単位	4
虚部	5
グルサの公式	9
コーシーの積分定理	9
コーシーの定理	8
コーシー・リーマン方程式	7
固有値	13
固有ベクトル	13
固有方程式	13
<hr/>	
さ	
三角関数	6
指数関数	3, 5, 14
自然対数の底	3
実部	5
初等関数	4
スターリングの式	23
正規分布	24
斉次	18
正則	7
漸近展開	22
線形	18
双曲線関数	4
<hr/>	
た	
対角化	14
対角行列	14
対数関数	3, 6
多価	6
超関数論	31
調和関数	7
定係数線形微分方程式	17
テイラー展開	8
デルタ関数	26
導関数	7
同次形	17
特性方程式	18
トレース	15
<hr/>	
な	
内積	12
二項分布	23
ネイピア数	3
ノルム	5, 12
<hr/>	
は	
パーセバルの等式	28, 30
バーゼル問題	30
非斉次項	18
非線形物理	20
微分可能	7
微分方程式	16
標準偏差	24
フーリエ係数	29
フーリエ変換	28, 29
複素関数	4
複素共役	12
複素数	4
複素積分	8
複素微分	6
複素平面	5
分散	23
べき	6
偏角	5
変数分離形	16
<hr/>	
ま	
マクローリン展開	8

や

ユニタリ行列	12
ユニタリ変換	12
4次元極座標	22

ら

留数	10
留数定理	10
連続	6