あもんノート

　ユークリッド幾何学、ニュートン力学から、相対論、宇宙論、量子論、場の量子論、素粒子論、そして超ひも理論まで、理論物理学を簡潔にかつ幅広く網羅したノートです。TOP へは下の URL をクリックして行けます。専用の画像掲示板で、ご意見、ご質問等も受け付けております。

http://amonphys.web.fc2.com/

目 次

第24章　スカラー場と正則化

特殊相対論においては、4元ポテンシャル (ベクトル場) に加え、スカラー場を導入することもできます。電気力 (クーロン力) が同種斥力なのに対し、スカラー場の力は同種引力になります。このためスカラー場は、特殊相対論において荷電粒子が持つ特異性、いわゆる古典電磁気学の無限大の困難を解消するのに用いることができます。このことを見ていきましょう。

24.1　特殊相対論の復習

特殊相対論の作用は、

$$S_{sr} = -\sum_n \int d\tau_n \big(m_n + q_n u_n^\mu A_\mu(x_n) \big) - \frac{1}{4} \int d^4x \sqrt{\ } F_{\mu\nu} F^{\mu\nu}$$

でした。ここで m_n, q_n はそれぞれ n 番目の粒子の質量と電荷で、

$$u_n^\mu = dx_n^\mu / d\tau_n$$

は固有速度、

$$d\tau_n = \sqrt{g_{\mu\nu}(x_n) dx_n^\mu dx_n^\nu}$$

は固有時です。また、$\sqrt{\ } = \sqrt{-\det g(x)}$ であり、$g(x)$ は計量の行列を意味します。$A_\mu(x)$ は4元ポテンシャル (ベクトル場) で、

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$$

は電磁場 (電磁テンソル) です。

特にローレンツ座標においては、

$$\frac{\delta S_{sr}}{\delta x_n^\lambda(\lambda_n)} = \frac{d\tau_n}{d\lambda_n} g_{\lambda\mu} \left(m_n \frac{du_n^\mu}{d\tau_n} - q_n F^\mu{}_\nu(x_n) u_n^\nu \right)$$

と計算されるので、作用原理：$\delta S_{sr} / \delta x_n^\mu(\lambda_n) = 0$ より、

$$m_n \frac{du_n^\mu}{d\tau_n} = q_n F^\mu{}_\nu(x_n) u_n^\nu$$

を得ます。これは粒子の運動方程式です。また、$\delta S_{sr}/\delta A_\nu(x)=0$ より、

$$\partial_\mu F^{\mu\nu}(x)=\sum_n q_n\int dx_n^\nu\,\delta^4(x-x_n)$$

が得られ、これはマックスウェル方程式です。

一方、エネルギー運動量テンソルは、

$$T_{sr}^{\mu\nu}=-\frac{2}{\sqrt{}}\frac{\delta S_{sr}}{\delta g_{\mu\nu}}$$

により定義され、ローレンツ座標においては、

$$T_{sr}^{\mu\nu}=\sum_n m_n\int dx_n^\mu\,u_n^\nu\delta^4(x-x_n)+F^{\mu\lambda}F_\lambda{}^\nu+\frac{1}{4}\,g^{\mu\nu}F_{\rho\sigma}F^{\rho\sigma}$$

となります。これは保存カレントです。すなわち、

$$\partial_\mu T_{sr}^{\mu\nu}=0.$$

詳しくは特殊相対論の章を参照してください。

24.2 スカラー場の導入

$\phi(x)$ をスカラー場とし、特殊相対論の作用に、**スカラー場の作用**：

$$S_\phi=-\sum_n k_n\int d\tau_n\,\phi(x_n)+\frac{1}{2}\int d^4x\sqrt{}\,(g^{\mu\nu}\partial_\mu\phi\partial_\nu\phi-\mu^2\phi^2)$$

を追加します。k_n は粒子とスカラー場との結合定数で、電荷と同様な粒子の属性です。また、μ は定数で、正の実数とします。この作用は一般座標変換に対して不変なので、共変性 (一般相対性原理) が保持されます。

特にローレンツ座標においては、

$$\frac{\delta S_\phi}{\delta x_n^\lambda(\lambda_n)}=k_n\frac{d\tau_n}{d\lambda_n}\,g_{\lambda\mu}\left(\phi(x_n)\,\frac{du_n^\mu}{d\tau_n}+\partial_\nu\phi(x_n)u_n^\mu u_n^\nu-\partial^\mu\phi(x_n)\right)$$

が得られるので、粒子の運動方程式は、

$$\Big(m_n+k_n\phi(x_n)\Big)\,\frac{du^\mu}{d\tau_n}=q_nF^\mu{}_\nu(x_n)u_n^\nu+k_n\Big(\partial^\mu\phi(x_n)-\partial_\nu\phi(x_n)u_n^\mu u_n^\nu\Big)$$

と変更されることになります。また、$\delta S_\phi/\delta\phi(x)=0$ より、**スカラー場の方程式**として、

$$(\Box+\mu^2)\phi(x)=-\sum_n k_n\int d\tau_n\,\delta^4(x-x_n)$$

を得ます。マックスウェル方程式は変更ありません。

エネルギー運動量テンソルに対するスカラー場の寄与は、

$$
\begin{aligned}
T_\phi^{\mu\nu} &= -\frac{2}{\sqrt{}}\frac{\delta S_\phi}{\delta g_{\mu\nu}} \\
&= \sum_n k_n \int dx_n^\mu\, u_n^\nu \phi(x_n)\delta^4(x-x_n) + \partial^\mu\phi\partial^\nu\phi - \frac{1}{2}g^{\mu\nu}\big(\partial_\lambda\phi\partial^\lambda\phi - \mu^2\phi^2\big)
\end{aligned}
$$

と計算され、全体のエネルギー運動量テンソルは、$T^{\mu\nu} = T_{sr}^{\mu\nu} + T_\phi^{\mu\nu}$ で、これが保存カレントになります：$\partial_\mu T^{\mu\nu} = 0.$

24.3　定常的な場合

以下、ローレンツ座標 x^μ に対して、$x^0 = t,\ x^i = (\boldsymbol{r})_i$ という表記を用います。

マックスウェル方程式は、4 元ポテンシャルを用いて、

$$
\Box A^\mu(x) - \partial^\mu\partial_\nu A^\nu(x) = \sum_n q_n \frac{dx_n^\mu}{dt_n}\,\delta^3(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_n)\ \Big|_{t_n=t}
$$

と表せますが、特に定常性の仮定のもとでは、

$$
\triangle A^0(\boldsymbol{r}) = -\sum_n q_n\delta^3(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_n), \quad -\triangle\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r}) + \boldsymbol{\nabla}\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r}) = \boldsymbol{0}
$$

となります。右式は $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r}) = \boldsymbol{0}$ で満たされます。すなわち定常的な場合、ベクトルポテンシャルは $\boldsymbol{0}$ と仮定できます。また、スカラー場の方程式は、定常性の仮定のもとで、

$$
(\triangle - \mu^2)\phi(\boldsymbol{r}) = \sum_n k_n\delta^3(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_n)
$$

となります。

一方、系のエネルギーは、定常性の仮定のもとで、

$$
\begin{aligned}
P^0 &= \int d^3\boldsymbol{r}\, T^{00} = \int d^3\boldsymbol{r}\,(T_{sr}^{00} + T_\phi^{00}) \\
&= \sum_n m_n + \sum_n k_n\phi(\boldsymbol{r}_n) + \frac{1}{2}\int d^3\boldsymbol{r}\left(|\boldsymbol{\nabla}A^0|^2 + |\boldsymbol{\nabla}\phi|^2 + \mu^2\phi^2\right)
\end{aligned}
$$

と整理されるでしょう。空間積分の部分は、部分積分し、上に示した定常的な場合のマックスウェル方程式、およびスカラー場の方程式を用いれば、さらに簡単になり、結果、

$$
P^0 = \sum_n m_n + \frac{1}{2}\sum_n q_n A^0(\boldsymbol{r}_n) + \frac{1}{2}\sum_n k_n\phi(\boldsymbol{r}_n)
$$

となります。

24.4 湯川ポテンシャルと核力

ここで、電荷 q, スカラー場との結合定数が k の粒子がただ一つ原点に静止している系を考えてみましょう。このときスカラー場の方程式は、$(\triangle-\mu^2)\phi(\boldsymbol{r})=k\delta^3(\boldsymbol{r})$ ですが、特に遠方で 0 に漸近する解は、

$$\phi(\boldsymbol{r})=-\frac{k\,e^{-\mu|\boldsymbol{r}|}}{4\pi|\boldsymbol{r}|}$$

となり、**湯川ポテンシャル**と呼ばれます (解析力学の章参照)。一方、マックスウェル方程式は、$\triangle A^0(\boldsymbol{r})=-q\delta^3(\boldsymbol{r})$ ですが、遠方で 0 に漸近する解は、

$$A^0(\boldsymbol{r})=\frac{q}{4\pi|\boldsymbol{r}|}$$

となり、**クーロンポテンシャル**と呼ばれます。(湯川ポテンシャルの式において、$\mu\to 0,\ k\to -q$ とおくことで得られます。)

これらの結果、および粒子に働く力が、定常近似で、$-q_n\boldsymbol{\nabla}A^0(\boldsymbol{r}_n)-k_n\boldsymbol{\nabla}\phi(\boldsymbol{r}_n)$ であることに注意すると、電磁力は同種斥力ですが、スカラー場による力は逆で、同種引力であるとわかります。また、スカラー場の力の及ぶ距離 (**到達距離**) が μ^{-1} 程度であることもわかるでしょう。μ の値が大きければ到達距離は短くなり、逆に小さければ到達距離は長くなります。$\mu=0$ のときは、電磁場と同様、到達距離は無限大ということになります。

例えば、陽子や中性子などの核子を原子核に閉じ込めている力は**核力**と呼ばれますが、この力は近似的にこのようなスカラー場で記述されます。このとき μ^{-1} はおよそ原子核のスケール $\sim$ fm $\sim$ (200MeV)$^{-1}$ で、それゆえ原子核はかようなサイズを持つというわけです。(量子化して現れる粒子が π 中間子です。)

一方、μ^{-1} の値が観測のスケールと比べずっと小さいとき、スカラー場の存在をあらわには認識できないという点に注意してください。つまり、本当は理論にスカラー場 $\phi(x)$ があるのだが、観測スケールにおいては無視してよい、という可能性が考えられるわけです。

24.5 荷電粒子のエネルギーと正則化

上記の系のエネルギーは、粒子の質量を m として、

$$P^0=m+\frac{q}{2}\,A^0(\boldsymbol{0})+\frac{k}{2}\,\phi(\boldsymbol{0})=m+\lim_{r\to 0}\left(\frac{q^2}{8\pi r}-\frac{k^2\,e^{-\mu r}}{8\pi r}\right)$$

ですが、もし理論にスカラー場がなく $k=0$ なら、これは発散してしまいます。理由は荷電粒子の周りの電磁場が無限の正のエネルギーを持つからで、このこと

は、2つの同種荷電粒子を同一点に持っていくために、無限のエネルギーを要することからも容易に想像されます。この問題を **電磁気学における無限大の困難** といいます。

しかしもし、$k = q$ の場合、あるいはもっといえば、電荷とスカラー場の結合定数が元来同じもの $(k_n = q_n)$ という場合は、上式は、

$$P^0 = m + \frac{q^2}{8\pi} \lim_{r \to 0} \frac{1 - e^{-\mu r}}{r} = m + \frac{q^2 \mu}{8\pi}$$

と評価され、ちゃんと極限値が存在します。すなわち、無限大の困難はないわけです。

例えば、電子などの実際の素粒子を考えると、スカラー場による力は観測されないので、μ^{-1} は観測されるスケールよりずっと小さいはずで、このため $q^2\mu/8\pi$ は非常に大きい値になります。しかしそれでも有限です。またこの場合、2つの同種荷電粒子を同一点に持っていくのに、有限のエネルギーで済みます。2つの荷電粒子を近づけてゆくと、μ^{-1} 程度の距離からスカラー場の引力が効いてきて、距離 0 の極限で電磁力とスカラー場の力がちょうど相殺するからです。

逆にこのような引力が存在しない理論は、荷電粒子がその内部に無限の反発力を有し、安定であり得ません。このことは、

<u>荷電粒子を含む電磁気学はそれ自身では満足な体系ではないこと</u>

を意味しています。このため、ここでは非常に到達距離の短い引力をスカラー場により導入したわけです。このような手法を一般に**正則化**(regularization) といい、正則化のために導入された場を**レギュレーター**といいます。

(余談) 量子電磁気学における正則化については、古くにはパウリ・ヴィラースの方法があり、これは作用の符合を逆にして引力化しなおかつ質量を持たせたベクトル場を、4元ポテンシャルとは別に導入することに対応しています。しかしこのような場は底なしのエネルギーを持つため、計算のための便宜上の場と考えられます。また、最近では次元正則化がよく用いられます。ここで示したスカラー場のレギュレーターは、あくまで古典論においてですが、もっと実在的な場と考えることができます。しかし一方、量子電磁気学において仮にこのようなスカラー場を導入しても、無限大の困難を解消することはできません。古典論と量子論では少し事情が異なるのです。

24.6 作用汎関数の一意性

レギュレーターとしてのスカラー場を含めた電磁気学 (特殊相対論) の作用を、改めて記しておきます。

$$\begin{aligned} S_{sr} + S_\phi = &-\sum_n \int d\tau_n \big(m_n + q_n \phi(x_n) + q_n u_n^\mu A_\mu(x_n) \big) \\ &+ \frac{1}{2} \int d^4x \surd \left(g^{\mu\nu} \partial_\mu \phi \partial_\nu \phi - \mu^2 \phi^2 \right) - \frac{1}{4} \int d^4x \surd F_{\mu\nu} F^{\mu\nu}. \end{aligned}$$

この理論には無限大の困難がなく、無矛盾と考えられます。そして、μ^{-1} より大きなスケールにおいては、スカラー場は無視され、通常の電磁気学に漸近します。スカラー場は、各粒子のごく近傍にまとわりついているというイメージです。

上の作用は、粒子、スカラー場、ベクトル場を含み、場に関して 2 次、すなわち場の方程式が線形で、かつ座標不変な、ほとんど唯一なモデルであることに注意してください。

例えば理論を拡張するとすれば、

$$\int d^4x \sqrt{} g^{\mu\nu} A_\mu A_\nu, \quad \int d^4x \sqrt{} \nabla_\mu A^\mu \nabla_\nu A^\nu, \quad \int d^4x \sqrt{} \nabla_\mu A^\nu \nabla_\nu A^\mu$$

のような項の追加が考えられますが、これらはゲージ不変性を壊してしまうので普通は加えません (*)。また、$\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma}$ を 4 次元レビ・チビタとして、

$$\int d^4x \, \epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} F_{\mu\nu} F_{\rho\sigma}$$

は、

$$\begin{aligned}\int d^4x' \, \epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} F'_{\mu\nu} F'_{\rho\sigma} &= \int d^4x \, \det \frac{\partial x'}{\partial x} \, \epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} \frac{\partial x^\alpha}{\partial x'^\mu} \frac{\partial x^\beta}{\partial x'^\nu} \frac{\partial x^\gamma}{\partial x'^\rho} \frac{\partial x^\delta}{\partial x'^\sigma} F_{\alpha\beta} F_{\gamma\delta} \\ &= \int d^4x \, \det \frac{\partial x'}{\partial x} \, \epsilon^{\alpha\beta\gamma\delta} \, \det \frac{\partial x}{\partial x'} F_{\alpha\beta} F_{\gamma\delta} = \int d^4x \, \epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} F_{\mu\nu} F_{\rho\sigma}\end{aligned}$$

なので座標不変で、かつゲージ不変ですが、実は被積分関数が、

$$\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} F_{\mu\nu} F_{\rho\sigma} = 4 \, \epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} \partial_\mu A_\nu \partial_\rho A_\sigma = \partial_\mu (4 \, \epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} A_\nu \partial_\rho A_\sigma)$$

というように時空の全微分になっているので、その時空積分はストークスの定理から遠方の境界に押し付けられ、0 とみなされます。

(*注) 場の量子論では最初の式がベクトル場の質量項、2 番目の式が共変ゲージ固定項に相当します。

24.7 運動する粒子が作るスカラー場

レギュレーターとしてのスカラー場の方程式は、

$$(\Box + \mu^2)\phi(x) = -\sum_n q_n \int d\tau_n \, \delta^4(x - x_n)$$

です。これを解くため、

$$(\Box + \mu^2) G(x; \mu) = \delta^4(x)$$

という偏微分方程式を考えます。$G(x;\mu)$ は**クライン・ゴルドン演算子** $(\Box+\mu^2)$ の逆 (主要解) を意味します。フーリエ展開により、

$$
\begin{aligned}
G(x;\mu) &= \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4}\,\frac{1}{-k^2+\mu^2}\;e^{-ik\cdot x}\\
&= \int \frac{d\omega}{2\pi}\;e^{-i\omega t}\int \frac{d^3\boldsymbol{k}}{(2\pi)^3}\,\frac{1}{|\boldsymbol{k}|^2+\mu^2-\omega^2}\;e^{i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}}\\
&= \int \frac{d\omega}{2\pi}\;e^{-i\omega t}\;\frac{e^{-\sqrt{\mu^2-\omega^2}\,|\boldsymbol{r}|}}{4\pi|\boldsymbol{r}|.}
\end{aligned}
$$

ただし $\omega>\mu$ のとき $\sqrt{\mu^2-\omega^2}$ は $i\sqrt{\omega^2-\mu^2}$ を意味するものします。$\boldsymbol{k}$ 積分の実行に関しては解析力学の章を参照してください。

よって、一般に運動する粒子が作るスカラー場は、

$$
\begin{aligned}
\phi(x) &= \int d^4x'\,G(x-x';\mu)\sum_n(-q_n)\int d\tau_n\,\delta^4(x'-x_n)\\
&= \sum_n(-q_n)\int d\tau_n\,G(x-x_n;\mu)\\
&= \sum_n\frac{-q_n}{4\pi}\int d\tau_n\int\frac{d\omega}{2\pi}\;e^{-i\omega(t-t_n)}\;\frac{e^{-\sqrt{\mu^2-\omega^2}\,|\boldsymbol{R}_n|}}{|\boldsymbol{R}_n|.}
\end{aligned}
$$

ここで $\boldsymbol{R}_n=\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_n$ です。指数関数をテイラー展開すれば、

$$
\begin{aligned}
\phi(x) &= \sum_n\frac{-q_n}{4\pi}\int d\tau_n\int\frac{d\omega}{2\pi}\;e^{-i\omega(t-t_n)}\;\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-\mu)^k}{k!}\,|\boldsymbol{R}_n|^{k-1}\left(1-\frac{\omega^2}{\mu^2}\right)^{k/2}\\
&= \sum_n\frac{-q_n}{4\pi}\int dt_n\sqrt{1-|\boldsymbol{v}_n|^2}\int\frac{d\omega}{2\pi}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-\mu)^k}{k!}\,|\boldsymbol{R}_n|^{k-1}\left(1+\frac{1}{\mu^2}\frac{d^2}{dt_n^2}\right)^{k/2}e^{-i\omega(t-t_n)}.
\end{aligned}
$$

ここで $\boldsymbol{v}_n=d\boldsymbol{r}_n/dt_n$ は n 番目の粒子の座標速度です。t_n について部分積分し、ω と t_n の積分を順に実行すれば、

$$
\phi(x)=\sum_n\frac{-q_n}{4\pi}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-\mu)^k}{k!}\left(1+\frac{1}{\mu^2}\frac{d^2}{dt_n^2}\right)^{k/2}|\boldsymbol{R}_n|^{k-1}\sqrt{1-|\boldsymbol{v}_n|^2}\;\Big|_{t_n=t}
$$

を得ます。

k が奇数の部分においては、微分演算子 $(1+\mu^{-2}d^2/dt_n^2)^{k/2}$ は無限に続く級数で与えられることに注意してください。このような級数の収束性は一般に良いとは限りませんが、少なくとも粒子の近傍 ($\boldsymbol{R}_n\sim\boldsymbol{0}$) を考える限りにおいては性質の良い級数になると考えられます。

24.8 運動方程式のくりこみ

粒子の速度が光速に比べて十分遅い場合 (非相対論的近似) を考えると、$\boldsymbol{v}_n$ の 2 次以上を無視して、

$$\frac{d}{dt_n}|\boldsymbol{R}_n| = \frac{d\boldsymbol{r}_n}{dt_n}\cdot\boldsymbol{\nabla}_n|\boldsymbol{R}_n| = -\frac{\boldsymbol{R}_n\cdot\boldsymbol{v}_n}{|\boldsymbol{R}_n|,} \qquad \frac{d^2}{dt_n^2}|\boldsymbol{R}_n| = -\frac{\boldsymbol{R}_n\cdot\dot{\boldsymbol{v}}_n}{|\boldsymbol{R}_n|.}$$

ここで $\dot{\boldsymbol{v}}_n = d\boldsymbol{v}_n/dt_n$ です。これに注意すると、スカラー場の方程式の解は、やはり $\boldsymbol{v}_n$ の 2 次以上を無視して、

$$\phi(x) = \sum_n \phi_n(x),$$

$$\phi_n(x) = \frac{-q_n}{4\pi}\left(\frac{1}{|\boldsymbol{R}_n|} - \mu + \frac{\mu^2|\boldsymbol{R}_n|}{2} - \frac{\boldsymbol{R}_n\cdot\dot{\boldsymbol{v}}_n}{2|\boldsymbol{R}_n|} - \frac{\mu^3|\boldsymbol{R}_n|^2}{6} + \frac{\mu\boldsymbol{R}_n\cdot\dot{\boldsymbol{v}}_n}{2} + \cdots\right)\bigg|_{t_n=t}$$

のように展開されます。ここで $\phi_n(x)$ は n 番目の粒子が周囲に作るスカラー場を意味していますが、特に粒子自身の位置において、

$$\phi_n(x_n) = -\frac{q_n}{4\pi|\mathbf{0}|} + \frac{q_n\mu}{4\pi,} \qquad \boldsymbol{\nabla}\phi_n(x_n) = \frac{q_n\dot{\boldsymbol{v}}_n}{8\pi|\mathbf{0}|} - \frac{q_n\mu\dot{\boldsymbol{v}}_n}{8\pi}$$

と評価されます。$\phi_n(x)$ の式の省略されている項 $\cdots$ はこれらに寄与しません。このことは例えば次元解析からわかるでしょう。$|\mathbf{0}|$ は $\lim_{\boldsymbol{r}\to\boldsymbol{r}_n}|\boldsymbol{R}_n|$ の意味であり、すなわち上の 2 式はどちらも発散することがわかります。

一方、n 番目の粒子の運動方程式は、非相対論的近似において、

$$(m_n + q_n\phi)\dot{\boldsymbol{v}}_n = q_n\boldsymbol{E} + q_n\boldsymbol{v}_n\times\boldsymbol{B} - q_n\boldsymbol{\nabla}\phi$$

ですが、粒子自身の位置における電場が、

$$\boldsymbol{E}_n(x_n) = -\frac{q_n\dot{\boldsymbol{v}}_n}{8\pi|\mathbf{0}|} + \frac{q_n\ddot{\boldsymbol{v}}_n}{6\pi}$$

であり、やはり発散することを思い出しましょう (電磁気学の章参照)。これら無限大は、運動方程式において正確に相殺され、次のようなくりこまれた運動方程式を得ます。

$$\left(m_n^{(r)} + q_n\phi^{(n)}\right)\dot{\boldsymbol{v}}_n = q_n\boldsymbol{E}^{(n)} + q_n\boldsymbol{v}_n\times\boldsymbol{B} - q_n\boldsymbol{\nabla}\phi^{(n)} + \frac{q_n^2\ddot{\boldsymbol{v}}_n}{6\pi.}$$

ここで、

$$\phi^{(n)} = \phi - \phi_n, \qquad \boldsymbol{E}^{(n)} = \boldsymbol{E} - \boldsymbol{E}_n$$

は自身の寄与を除いた場です。また、

$$m_n^{(r)} = m_n + \frac{q_n^2\mu}{8\pi}$$

は、くりこまれた質量であり、これはちょうど1粒子の静止系におけるエネルギー(有効質量) と一致しています。一方、$q_n^2\ddot{\boldsymbol{v}}_n/6\pi$ はローレンツ摩擦力で、これは通常の電磁気学と同じで、変更がないわけです。

(余談) ここの内容は私独自の研究によるものです。荷電粒子を含む電磁気学の理論的な無矛盾性のために、特に数理的な意味で非常に重要であるにもかかわらず、ほとんど知られていないと思われます。

索引