

# あもんノート

ユークリッド幾何学、ニュートン力学から、相対論、宇宙論、量子論、場の量子論、素粒子論、そして超ひも理論まで、理論物理学を簡潔にかつ幅広く網羅したノートです。TOP へは下の URL をクリックして行けます。専用の画像掲示板で、ご意見、ご質問等も受け付けております。

<http://amonphys.web.fc2.com/>

# 目次

第5章	連続体力学	3
5.1	応力テンソル	3
5.2	弾性体と弾性率	4
5.3	一様等方弾性体	5
5.4	弾性体における波動	6
5.5	ヤング率とポアソン比	7
5.6	天井からはがれ落ちる弾性体	9
5.7	流体とナビエ・ストークス方程式	11
5.8	静止した流体と浮力	12
5.9	音波とマッハ数	13
5.10	ドップラー効果	14
5.11	完全流体とベルヌーイの定理	15
5.12	水面波	15
5.13	レイノルズ数と力学的相似則	18

# 第5章 連続体力学

物質の中でも弾性体と流体はそのニュートン力学的な取り扱いが比較的容易です。これらは連続体と総称されます。連続体の力学をここに簡単にまとめておきます。ただし、ユークリッド幾何学、応用数学、およびニュートン力学を既知と仮定します。

## 5.1 応力テンソル

物体の内部のある空間的領域  $V$  が、その境界面  $\partial V$  上の微小断面積  $d^2x_i$  を通じて受ける微小な力を考えましょう。それは微小断面積  $d^2x_i$  に比例するはずなので、一般に、

$$dF_j = d^2x_i T_{ij}$$

と書けます。このとき  $T_{ij}$  を応力、あるいは応力テンソルといいます。応力の単位は、

$$\text{Pa} = \text{N m}^{-2} = \text{kg m}^{-1} \text{s}^{-2}$$

となります。これをパスカルといいます。

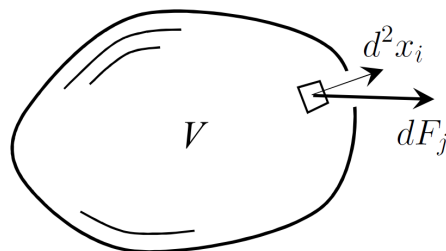


図 5.1: 応力テンソル

棒状の物体を左右に引張ったとき、引張った方向を  $x_1$  方向として、 $T_{11}$  が正になることに注意。すなわちここでは引張応力が正になるよう定義しています。符号を逆にし圧縮応力を正とする定義もよく見かけるので注意してください。

そうすると、物体のある領域  $V$  がその境界面  $\partial V$  から受ける力は、ガウスの定理を用いて、

$$F_j = \int_{\partial V} d^2x_i T_{ij} = \int_V d^3x \partial_i T_{ij}$$

と書けるので、 $\partial_i T_{ij}$  は物体内のある点が周囲の物質から受ける力の密度と考えることができます。

また、物体の領域  $V$  が受けるトルクを考えると、3次元レビ・チビタを  $\epsilon_{ijk}$  として、

$$\begin{aligned} N_i &= \int_{\partial V} \epsilon_{ijk} x_j dF_k = \int_{\partial V} \epsilon_{ijk} x_j d^2 x_l T_{lk} \\ &= \int_V d^3 x \partial_l (\epsilon_{ijk} x_j T_{lk}) = \int_V d^3 x (\epsilon_{ilk} T_{lk} + \epsilon_{ijk} x_j \partial_l T_{lk}). \end{aligned}$$

一方トルクは、力の密度が  $\partial_i T_{ij}$  であることから、

$$N_i = \int_V d^3 x \epsilon_{ijk} x_j \partial_l T_{lk}$$

と書くこともできます。これらと比較し、 $V$  が任意の領域であることに注意すると、 $\epsilon_{ilk} T_{lk} = 0$ . よって、

$$T_{ij} = T_{ji}$$

を得ます。すなわち応力テンソルは2つの添字について対称です。

## 5.2 弾性体と弾性率

物体の各部が本来の位置  $x_i$  から、

$$x'_i = x_i + u_i(x)$$

に移動したとき、 $u_i(x)$  を変位といいます。変位の勾配  $\partial_j u_i$  は十分小さいとしてその高次を無視すると、物体の各部の距離変化は、

$$\begin{aligned} dx'_i dx'_i - dx_i dx_i &= (dx_i + \partial_j u_i dx_j)(dx_i + \partial_k u_i dx_k) - dx_i dx_i \\ &= \partial_j u_i dx_j dx_i + \partial_k u_i dx_i dx_k = (\partial_i u_j + \partial_j u_i) dx_i dx_j \end{aligned}$$

と書けます。そこで、

$$\epsilon_{ij} = \frac{1}{2} (\partial_i u_j + \partial_j u_i)$$

で物体のひずみ(の場)を定義します。ひずみが物体の各部で0ならば、物体は変形していないことになります。すなわち変位  $u_i$  が存在しても、ひずみ  $\epsilon_{ij}$  が0ならば、物体は並進や回転をしているだけということです。

応力がひずみに比例するという仮定：

$$T_{ij} = E_{ijkl} \epsilon_{kl}$$

はフックの法則と呼ばれ、フックの法則を満たす物体を弾性体といいます。比例係数  $E_{ijkl}$  は弾性率と呼ばれます。剛体は変形しない物体だったので、これは弾性率が無限大の弾性体として特徴づけられます。応力テンソルとひずみが2つの添字について対称であることに注意すると、一般性を失うことなく、

$$E_{ijkl} = E_{jikl} = E_{ijlk}$$

を仮定できます。

ちなみに大気中にある弾性体を考える場合、通常、大気圧下の定常状態の1つを変位場の基準(本来の位置)にとります。そうするとフックの法則は線形であるため、物体の表面における大気圧の効果は無視してよいこととなります。大気圧の効果を変位場にくりこんでしまうわけです。

(余談) もし弾性体の内部に散逸がなく、すなわちひずみに対するポテンシャルエネルギーが存在すると仮定すると、弾性率に関してさらに、

$$E_{ijkl} = E_{klij}$$

という対称性が得られるため、3次対称行列の独立な成分は6個、6次対称行列の独立な成分が21個であることに注意して、弾性率  $E_{ijkl}$  の  $3^4 = 81$  個の成分のうち、独立なものは21個ということになります。上式の証明は以下の通りです。

[証明] 弾性体の仮想的な微小変形  $\delta u_i$  に対し、領域  $V$  が外部からされる仕事は、

$$\delta W = \int_{\partial V} \delta u_j dF_j = \int_{\partial V} \delta u_j d^2 x_i T_{ij} = \int_V d^3 x \partial_i (\delta u_j T_{ij}).$$

いま、系が定常的で、かつ応力以外の力(外力)がないとすると、釣り合いの条件から  $\partial_i T_{ij} = 0$  であることに注意して、

$$\delta W = \int_V d^3 x \delta \epsilon_{ij} T_{ij} = \int_V d^3 x \delta \epsilon_{ij} E_{ijkl} \epsilon_{kl}$$

となります。よって弾性体のポテンシャルエネルギー密度を  $A$  とすると、

$$\delta A = \delta \epsilon_{ij} E_{ijkl} \epsilon_{kl} \quad \therefore \frac{\delta^2 A}{\delta \epsilon_{ij} \delta \epsilon_{kl}} = E_{ijkl} \quad \therefore E_{ijkl} = E_{klij}. \quad [\text{証明終}]$$

### 5.3 一様等方弾性体

弾性体が一様で等方な場合、弾性率は定数のテンソルのはずなので、 $\lambda, \mu, \mu'$  を実数として、

$$E_{ijkl} = \lambda \delta_{ij} \delta_{kl} + \mu \delta_{ik} \delta_{jl} + \mu' \delta_{il} \delta_{jk}$$

のように書けますが、弾性率の対称性から  $\mu' = \mu$  がわかり、

$$E_{ijkl} = \lambda \delta_{ij} \delta_{kl} + \mu (\delta_{ik} \delta_{jl} + \delta_{il} \delta_{jk})$$

です。このとき  $\lambda, \mu$  をラメの定数といいます。一様等方弾性体の弾性率の独立な成分は2個というわけです。

このとき弾性体の応力は、 $T_{ij} = E_{ijkl}\epsilon_{kl}$  および  $\epsilon_{ij} = (1/2)(\partial_i u_j + \partial_j u_i)$  から、

$$T_{ij} = \lambda \delta_{ij} \partial \cdot u + \mu (\partial_i u_j + \partial_j u_i)$$

となることがわかります。ここで  $\partial \cdot u = \partial_i u_i$  です。

弾性体の運動方程式は、その質量密度を  $\rho$ , 応力以外の力(外力)の密度を  $f_j$  として、

$$\rho \ddot{u}_j = \partial_i T_{ij} + f_j.$$

あるいは上の応力の式を代入して、

$$\rho \ddot{u}_j = (\lambda + \mu) \partial_j \partial \cdot u + \mu \Delta u_j + f_j$$

と書かれます。 $\Delta = \partial \cdot \partial$  はラプラシアンです。

## 5.4 弾性体における波動

ここで弾性体の波動解(平面波解)について考えてみましょう：

$$u_j = a_j \sin(k \cdot x - \omega t).$$

ベクトル  $k_i$  を波数ベクトル、 $\omega$  を角振動数、 $a_i$  を振幅といいます。このとき波動の進む方向は  $k_i$  の方向と一致します。また、この波動の波長  $\lambda$ , 周期  $T$ , 振動数  $\nu$  は、それぞれ、

$$\lambda = \frac{2\pi}{|k|}, \quad T = \frac{2\pi}{\omega}, \quad \nu = \frac{1}{T} = \frac{\omega}{2\pi}$$

で与えられることになり(図5.2)、よって波動の進む速さ(位相速度の大きさ)は、

$$v = \frac{\lambda}{T} = \frac{\omega}{|k|}$$

で与えられます。

さて、外力の密度を0とすると、一様等方弾性体の運動方程式は、

$$\rho \ddot{u}_j = (\lambda + \mu) \partial_j \partial \cdot u + \mu \Delta u_j$$

ですが、これに上の波動解を代入すると、

$$\rho \omega^2 a_j = (\lambda + \mu) k_j k \cdot a + \mu k^2 a_j$$

を得るでしょう。このように波数ベクトル  $k_i$  と角振動数  $\omega$  の関係を与える式を、一般に分散関係といいます。

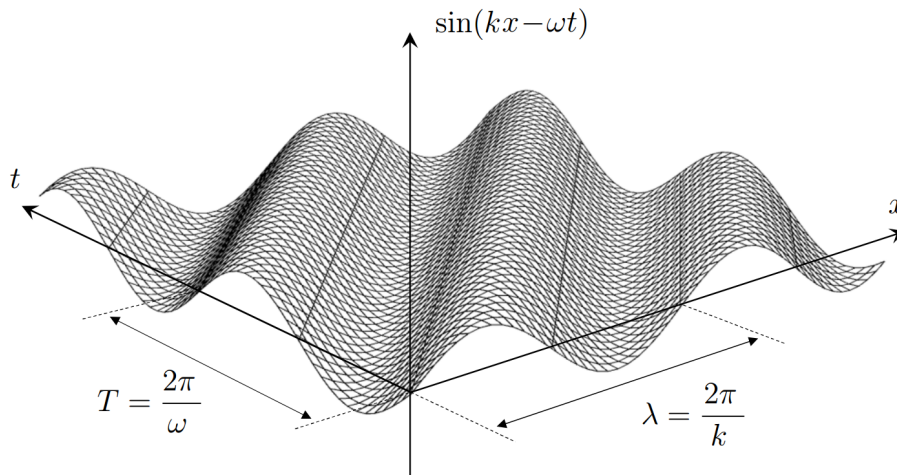


図 5.2: 波動

もしこの波動解が横波で、 $k \cdot a = 0$  なら、上の分散関係の式から  $\rho\omega^2 = \mu k^2$  を得るので、横波の速さは、

$$v_t = \frac{\omega}{|k|} = \sqrt{\frac{\mu}{\rho}}$$

と求まります。一方、 $k \cdot a \neq 0$  のときは、分散関係の式に  $k_j$  をかけ、 $k \cdot a$  で割ることにより、 $\rho\omega^2 = (\lambda + 2\mu)k^2$  を得ます。このとき  $a_j \propto k_j$  がわかるので、この波動解は縦波です。その速さは、

$$v_l = \frac{\omega}{|k|} = \sqrt{\frac{\lambda + 2\mu}{\rho}}$$

となります。一様等方弾性体には横波と縦波しか存在しないことがわかり、また、それぞれの波の速さがラメの定数で表されたわけです。

## 5.5 ヤング率とポアソン比

直方体状の弾性体があり、この弾性体のある辺に沿った方向にのみ外圧  $p$  をかけたとします。この辺の方向を  $x_1$  方向とします。また、外圧  $p$  は引張りを正とします(図 5.3)。

このとき弾性体の各方向の伸縮率を  $a_i$  として、

$$E = \frac{p}{a_1}, \quad \nu = -\frac{a_2}{a_1}$$

を、順に、ヤング率、ポアソン比といいます。これらは実験で容易に測ることができる弾性体の性質です。一様等方弾性体のヤング率とポアソン比を求めてみましょう。



図 5.3: ヤング率とポアソン比

まず、

$$u_1 = a_1 x_1 + b_1, \quad u_2 = a_2 x_2 + b_2, \quad u_3 = a_3 x_3 + b_3$$

という変位場を考えます。\$a\_i, b\_i\$ は定数です。特に \$a\_i\$ は \$x\_i\$ 方向の伸縮率を意味しています。応力の式：\$T\_{ij} = \lambda \delta\_{ij} \partial \cdot u + \mu (\partial\_i u\_j + \partial\_j u\_i)\$ に代入すると、

$$\begin{aligned} T_{11} &= (\lambda + 2\mu)a_1 + \lambda a_2 + \lambda a_3, \\ T_{22} &= \lambda a_1 + (\lambda + 2\mu)a_2 + \lambda a_3, \\ T_{33} &= \lambda a_1 + \lambda a_2 + (\lambda + 2\mu)a_3, \quad T_{ij} = 0 \quad (i \neq j) \end{aligned}$$

を得ます。これらは全て定数なので、考えている変位場は弾性体の運動方程式 (ただし \$f\_j = 0\$) の定常解になっています。境界条件から、

$$T_{11} = p, \quad T_{22} = T_{33} = 0$$

なので、

$$\begin{aligned} &\begin{pmatrix} \lambda + 2\mu & \lambda & \lambda \\ \lambda & \lambda + 2\mu & \lambda \\ \lambda & \lambda & \lambda + 2\mu \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\ \therefore \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} &= \frac{1}{4\mu^2(3\lambda + 2\mu)} \begin{pmatrix} 4\mu(\lambda + \mu) & * & * \\ -2\lambda\mu & * & * \\ -2\lambda\mu & * & * \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{p}{2\mu(3\lambda + 2\mu)} \begin{pmatrix} 2(\lambda + \mu) \\ -\lambda \\ -\lambda \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

すなわちヤング率とポアソン比は、それぞれ、

$$E = \frac{\mu(3\lambda + 2\mu)}{\lambda + \mu}, \quad \nu = \frac{\lambda}{2(\lambda + \mu)}$$

のようにラメの定数を用いて表されます。

(余談) 多くの場合、ヤング率とポアソン比は共に正であり、また、横波と縦波が存在します。このことからラメの定数は共に正とわかります。また、縦波が横波より速いことがわかるでしょう。地震においても、最初に到達するのは縦波 (P 波) で、その後しばらくして横波 (S 波) が来ることがよく知られています。ちなみにポアソン比が特に大きい物質はゴムで、押しつぶすと横に大きく膨らみます。そのポアソン比は 0.4 ~ 0.5 程度です。



## 5.6 天井からはがれ落ちる弾性体

ここで教育的で面白い例として、図5.4のように天井に張り付いた直方体状の一樣等方弾性体を考えてみましょう。ただし簡単のため、 $\lambda = 0$  (ポアソン比 0) とします。

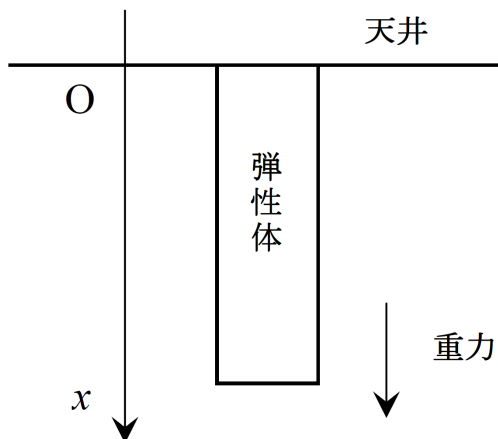


図 5.4: 天井に張り付いた弾性体

下方を  $x_1 = x$  方向とし、重力加速度を  $g$  とします。また、 $x$  方向の弾性体の自然長を  $L$  とします。このとき運動方程式は、

$$\rho \ddot{u}_j = \mu \partial_j \partial \cdot u + \mu \Delta u_j + f_j, \quad f_j = \rho g \delta_{1j}$$

ですが、これは  $u_1 = u = u(t, x)$ ,  $u_2 = u_3 = 0$  において、

$$\rho \ddot{u} = 2\mu u'' + \rho g \quad \therefore \ddot{u} = c^2 u'' + g.$$

を与えます。ダッシュは  $x$  微分を意味し、 $c = \sqrt{2\mu/\rho}$  は弾性体内部における縦波の速さ (弾性体中の音速) です。

特に定常状態では、

$$u'' = -\frac{g}{c^2} \quad \therefore u = -\frac{gx^2}{2c^2} + Ax + B \quad (A, B \text{ は定数})$$

ですが、 $x = 0$  で  $u = 0$  (固定端条件)。また、 $x = L$  では応力が存在しないはずなので  $u' = 0$  です (自由端条件)。これらから定数  $A, B$  が定まり、

$$u = \frac{gx}{2c^2} (2L - x)$$

が解です。定常状態では重力により弾性体の長さが  $gL^2/2c^2$  だけ伸びることがわかります。

次に、時刻  $t = 0$  に弾性体の上端が天井から瞬時にはがれた場合を考えます。このとき、 $0 \leq x \leq L$  では  $\{\cos(n\pi x/L) \mid n = 0, 1, 2, \dots\}$  が完全系を成すことに注意して、

$$u(t, x) = a(t) + \sum_{n=1}^{\infty} a_n(t) \cos \frac{n\pi x}{L}$$

とおくことができます。これを運動方程式  $\ddot{u} = c^2 u'' + g$  に代入すると、

$$\ddot{a}(t) = g, \quad \ddot{a}_n(t) = -\left(\frac{n\pi c}{L}\right)^2 a_n(t)$$

$$\therefore a(t) = \frac{gt^2}{2} + \alpha t + \beta, \quad a_n(t) = \alpha_n \cos \frac{n\pi ct}{L} + \beta_n \sin \frac{n\pi ct}{L}$$

ですが、 $\dot{u}(0, x) = 0$  から  $\alpha = 0, \beta_n = 0$  がわかるので、

$$u(t, x) = \frac{gt^2}{2} + \beta + \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n \cos \frac{n\pi ct}{L} \cos \frac{n\pi x}{L}$$

さらに  $u(0, x) = (gx/2c^2)(2L - x)$  から  $\beta, \alpha_n$  をフーリエ変換の手法で定めることができ、結果、

$$u(t, x) = \frac{gt^2}{2} + \frac{gL^2}{3c^2} - \frac{2gL^2}{\pi^2 c^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \cos \frac{n\pi ct}{L} \cos \frac{n\pi x}{L}$$

となるでしょう。この式は自由端条件： $u'(t, 0) = u'(t, L) = 0$  を自動的に満たしている、よってこれがはがれ落ちる弾性体の解です。

弾性体の下端の加速度を計算してみましょう：

$$\begin{aligned} \ddot{u}(t, L) &= g + 2g \sum_{n=1}^{\infty} \cos \frac{n\pi ct}{L} \cos(n\pi) = g + 2g \sum_{n=1}^{\infty} \cos \left( n\pi \frac{ct + L}{L} \right) \\ &= g + 2g \left( \pi \sum_{n \in \mathbf{Z}} \delta \left( \pi \frac{ct + L}{L} - 2n\pi \right) - \frac{1}{2} \right) = g \sum_{n \in \mathbf{Z}} \delta \left( \frac{ct + L}{2L} - n \right). \end{aligned}$$

途中で公式、

$$\sum_{n=1}^{\infty} \cos(nx) = \pi \sum_{n \in \mathbf{Z}} \delta(x - 2n\pi) - \frac{1}{2} \quad \text{および} \quad \delta(ax) = \frac{1}{|a|} \delta(x)$$

を用いました。 $\delta(x)$  はデルタ関数です (関数論と応用数学の章参照)。そうすると、下端の速度は、

$$\begin{aligned} \dot{u}(t, L) &= \int_0^t dt' \ddot{u}(t', L) = g \int_0^t dt' \sum_{n \in \mathbf{Z}} \delta \left( \frac{ct' + L}{2L} - n \right) \\ &= \frac{2gL}{c} \int_{1/2}^{(ct+L)/2L} ds \sum_{n \in \mathbf{Z}} \delta(s - n) = \frac{2gL}{c} \left[ \frac{ct + L}{2L} \right] \end{aligned}$$

と見積もられます。ここで  $[x]$  は  $x$  の最大整数 (ガウス記号) です。

下端は  $0 < t < L/c$  では静止したままで、 $t = L/c$  で急激に  $2gL/c$  の速度を持ち、その後、階段状に加速されることがわかります。上端が天井からはがれたことが弾性体中の縦波を通じ下端に伝わるまで、下端は静止しているわけです。また、この階段的加速を粗く見ると ( $ct \gg L$ )、下端を含め弾性体全体が加速度  $g$  で落ちているように見えることになります。

## 5.7 流体とナビエ・ストークス方程式

次に流体について考えます。

大気や水などの流体の状態は、流体の各部における質量密度  $\rho(t, x)$ 、および速度場  $v_i(t, x)$  によって表されます。いま、 $d^2x_i \rho v_i$  という量を考えると、これは断面積  $d^2x_i$  を単位時間あたりに通過する流体の質量なので、質量の保存から、

$$\frac{d}{dt} \int_V d^3x \rho = - \int_{\partial V} d^2x_i \rho v_i \quad \therefore \dot{\rho} + \partial_i(\rho v_i) = 0$$

を得ます。これを連続の式といいます。

次に流体の運動方程式を導くため、流体の運動量変化について考えてみましょう。 $p_i = \rho v_i$  が流体の運動量密度であることに注意すると、

$$P_i(t) = \int_V d^3x p_i(t, x)$$

は、領域  $V$  が時刻  $t$  に持つ運動量です。微小時間  $\delta t$  後、流体の各部  $x_i$  は  $x'_i = x_i + v_i \delta t$  に移動しますが、そうしてできる新しい領域を  $V'$  とします。そうすると、微小時間  $\delta t$  後の運動量は、

$$P_i(t + \delta t) = \int_{V'} d^3x' p_i(t + \delta t, x')$$

と表されます。この式の積分変数を  $x$  に置換する際、 $\frac{\partial x'_i}{\partial x_j} = \delta_{ij} + \partial_j v_i \delta t$  より、

$$\det \frac{\partial x'}{\partial x} = \epsilon_{ijk} (\delta_{i1} + \partial_1 v_i \delta t) (\delta_{j2} + \partial_2 v_j \delta t) (\delta_{k3} + \partial_3 v_k \delta t) = 1 + \partial \cdot v \delta t$$

であることに注意して、

$$\begin{aligned} P_i(t + \delta t) &= \int_V d^3x (1 + \partial \cdot v \delta t) (p_i + \dot{p}_i \delta t + \partial_j p_i v_j \delta t) \\ &= P_i(t) + \int_V d^3x (\dot{p}_i + \partial_j p_i v_j + p_i \partial \cdot v) \delta t = P_i(t) + \int_V d^3x (\rho \dot{v}_i + \rho v \cdot \partial v_i) \delta t. \end{aligned}$$

よって、 $\rho \dot{v}_i + \rho v \cdot \partial v_i$  が力の密度に等しいはずで、流体の応力を  $T_{ij}$ 、外力の密度を  $f_j$  として、

$$\rho \dot{v}_j + \rho v \cdot \partial v_j = \partial_i T_{ij} + f_j$$

が成り立ちます。これをナビエ・ストークス方程式といいます。

ただし流体の応力は、

$$T_{ij} = -p\delta_{ij} + \lambda\delta_{ij}\partial \cdot v + \mu(\partial_i v_j + \partial_j v_i)$$

で与えられ、 $p$  は流体の圧力、 $\mu, \lambda$  は粘性率で、多くの場合、

$$2\mu + 3\lambda = 0$$

という関係式が成り立ちます。これをストークスの関係式といいます。

ナビエ・ストークス方程式は非線形であるため、厳密解を得るのは非常に困難であり、多くの場合、線形近似や数値計算に頼ることになります。ナビエ・ストークス方程式の解の存在証明はミレニアム懸賞問題の1つになっています。

## 5.8 静止した流体と浮力

流体が静止していて、速度場  $v_i$  が恒等的に 0 であるとき、ナビエ・ストークス方程式は、

$$-\partial_j p + f_j = 0$$

を与えます。いま、上方を  $x_3$  方向とすると、重力による外力の密度は  $f_j = -\rho g \delta_{3j}$  と書けるので ( $g$  は重力加速度)、

$$\partial_j p = -\rho g \delta_{3j}$$

です。よって例えば、 $x_3 = 0$  の平面で  $p = p_0$  とすれば、質量密度  $\rho$  がほとんど一定であると仮定して、

$$p = p_0 - \rho g x_3$$

が解になります。これは例えば水槽に入った水が静止しているとき、深さに比例して圧力(水圧)が増すことを意味しています。

次に静止した流体中の静止した物体について考えてみましょう(図5.5)。物体が占める3次元領域を  $V$  とします。このとき物体が周囲の流体から受ける力は、流体の応力分布が  $V$  も流体で満たされている場合と同じであることに注意して、

$$F_j = \int_{\partial V} d^2 x_i T_{ij} = \int_V d^3 x \partial_i T_{ij} = - \int_V d^3 x f_j = \int_V d^3 x \rho g \delta_{3j}$$

のように見積もられます。これを浮力といいます。浮力は上方に働き、その大きさは“物体が排斥した流体の重さ”に等しいことがわかります。これをアルキメデスの原理といいます。

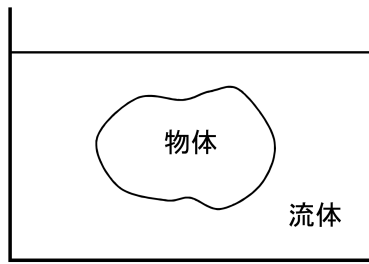


図 5.5: 流体中の物体

## 5.9 音波とマッハ数

流体の粘性および外力を無視でき、さらに速度場が十分小さくその2次の項を無視できるものとする(線形近似)、ナビエ・ストークス方程式は

$$\rho \dot{v}_j = -\partial_j p$$

です。流体の状態方程式を  $p = f(\rho)$  とすれば、

$$\rho \dot{v}_j = -f'(\rho) \partial_j \rho.$$

一方、連続の式は、

$$\dot{\rho} + \partial_i(\rho v_i) = 0$$

でした。

いま、 $x_1$  方向に振動し進む波動：

$$\rho = \rho_0 + \varepsilon \sin(kx_1 - \omega t), \quad v_1 = u \sin(kx_1 - \omega t), \quad v_2 = v_3 = 0$$

を考え、これを上2式に代入すると、振幅  $\varepsilon$ ,  $u$  は十分小さいとし、その2次以上を無視する近似で、

$$\begin{cases} \rho_0 u \omega = f'(\rho_0) \varepsilon k \\ \varepsilon \omega = \rho_0 u k \end{cases} \quad \therefore \omega = \sqrt{f'(\rho_0)} k$$

を得ます。よってこの波の進む速さは、

$$c = \frac{\omega}{k} = \sqrt{f'(\rho_0)}$$

で与えられることとなります。この波動を考えている流体の音波といい、その速さ  $c$  を音速といいます。

また、流体中を流体に対して速さ  $V$  で運動する物体がある場合、 $M = V/c$  をその物体のマッハ数といいます。例えばマッハ1は、流体中をその流体の音速と同じ速さで運動することを意味します。

(余談) 例えば流体の状態方程式が  $p \propto \rho^\gamma$  で与えられる場合、流体の静止時の質量密度を  $\rho_0$ , 圧力を  $p_0$  として、 $p = f(\rho) = p_0(\rho/\rho_0)^\gamma$  です。よってこの流体の音速は、

$$c = \sqrt{f'(\rho_0)} = \sqrt{\frac{\gamma p_0}{\rho_0}}$$

で与えられます。特に2原子分子の理想気体においては  $\gamma \sim 7/5$  であることが統計力学からわかり、圧力  $1 \text{ atm} \sim 1.013 \times 10^5 \text{ Pa}$ , 温度  $0^\circ\text{C}$  の大気(主に窒素と酸素の混合気体)の質量密度はおよそ  $1.293 \text{ kg/m}^3$  であることが知られているので、 $1 \text{ atm}, 0^\circ\text{C}$  の大気における音速は  $c \sim 331 \text{ m/s}$  と見積もられ、これは実験値とよく合っています。

## 5.10 ドップラー効果

波数ベクトル  $k_i$  の音波を考えると、質量密度の式は、

$$\rho = \rho_0 + \varepsilon \sin(k \cdot x - \omega t), \quad \omega = c|k|.$$

ここで  $\omega$  は音波の角振動数、 $c$  は音速を意味します。この音波を、流体に対して速度  $V_i$  で運動する別の座標系  $x'_i$  で見ると、ガリレイ変換:  $x'_i = x_i - V_i t$  に注意して、

$$\begin{aligned} \rho &= \rho_0 + \varepsilon \sin(k \cdot (x' + Vt) - \omega t) \\ &= \rho_0 + \varepsilon \sin(k \cdot x' - (\omega - k \cdot V)t). \end{aligned}$$

よって新しい系における角振動数は、

$$\omega' = \omega - k \cdot V = \left(1 - \frac{e \cdot V}{c}\right) \omega$$

となります。ここで  $e_i = k_i/|k|$  は波数ベクトル  $k_i$  の方向ベクトルで、音波の進む方向の単位ベクトルを意味します。

また、音源が流体に対して速度  $V_i$  で運動している場合は、音源の角振動数を  $\omega'$  として、流体の静止系における音波の角振動数は、上式から逆に、

$$\omega = \left(1 - \frac{e \cdot V}{c}\right)^{-1} \omega'$$

で与えられることとなります。

このように、観測者あるいは音源が流体に対して運動していることにより、音波の角振動数(あるいは振動数  $\nu = \omega/2\pi$ )が変化する現象を、ドップラー効果といいます。大気中の音のドップラー効果は、日常的にも、救急車のサイレン、電車に乗っている時に聞く踏切の音などで経験していることでしょう。

## 5.11 完全流体とベルヌーイの定理

$\rho$  が一定の流体を非圧縮性流体といいます。さらに粘性が無視できる流体を完全流体といいます<sup>(\*)</sup>。このときナビエ・ストークス方程式は、

$$\rho \dot{v}_i + \rho v \cdot \partial v_i = -\partial_i p + f_i$$

となり、これをオイラー方程式といいます。

特に定常的な (速度場が時間に依存しない) 完全流体を考えると、オイラー方程式は、

$$\rho v \cdot \partial v_i = -\partial_i p + f_i$$

ですが、外力の密度が、

$$f_i = -\partial_i \phi$$

のように外部ポテンシャルの密度  $\phi$  を用いて表される場合、

$$\rho v \cdot \partial v_i + \partial_i p + \partial_i \phi = 0$$

となります。この式に  $v_i$  をかけ、 $v \cdot \partial v^2 = 2v_i v \cdot \partial v_i$  に注意すると、

$$v \cdot \partial \left( \frac{1}{2} \rho v^2 + p + \phi \right) = 0$$

を得ます。この式は流体の流線にそって括弧内の量が不変であることを意味していて、ベルヌーイの定理と呼ばれます。ベルヌーイの定理は完全流体におけるエネルギー保存則を意味しています。

(\*注) 実際の流体には必ず粘性があるため、粘性率  $\mu$  を 0 とおいてしまうのは実は乱暴です。完全流体の理論にはこのことに伴ったパラドックスがいくつか存在します。

## 5.12 水面波

ここではオイラー方程式の近似解の例として、水面波を取り上げておきます。

完全流体の速度場  $v_i$  が十分小さいと考え、その 2 次の項を無視すると、連続の式とオイラー方程式は、それぞれ、

$$\partial \cdot v = 0, \quad \rho \dot{v}_i = -\partial_i p - \rho g \partial_i x_3$$

となります。ただし外力は重力だけとし、上方を  $x_3$  方向としました。 $g$  は重力加速度です。さらに、速度場  $v_i(t, x)$  の回転 ( $\epsilon_{ijk} \partial_j v_k$ ) が 0 で、速度場のポテンシャル  $\Phi(t, x)$  が存在すると仮定すれば、

$$v_i = \partial_i \Phi$$

であり、連続の式とオイラー方程式は、それぞれ、

$$\Delta\Phi = 0, \quad \partial_i \left( \dot{\Phi} + \frac{p}{\rho} + gx_3 \right) = 0$$

となります。前式は一般にラプラス方程式と呼ばれる式です。

ここで図5.6のように座標を設定し、振幅が極めて小さな水面波(さざ波)を考えてみることにしましょう。水面の式を  $x_3 = \eta(t, x_1)$  とし、 $\eta \ll h$  を仮定します。 $h$  は水深です。

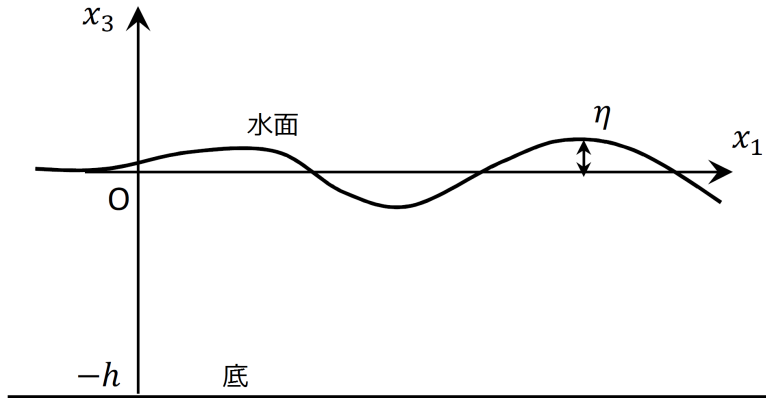


図 5.6: 水面波

底においては  $v_3 = 0$  なので、

$$\partial_3 \Phi \Big|_{x_3=-h} = 0 \quad (1)$$

です。

また、 $\dot{\Phi} + (p/\rho) + gx_3$  という量は空間座標に依存しませんが、特に遠方で定常的になっているとすれば、遠方の水面においてこれは  $p_0/\rho$  となります。ここで  $p_0$  は大気圧です。よって流体の各部において  $\dot{\Phi} + (p/\rho) + gx_3 = p_0/\rho$  が成り立ち、この式を水面に適用すると、

$$\dot{\Phi} \Big|_{x_3=\eta} + g\eta = 0 \quad (2)$$

です。

一方、水面にある水の粒子は微小時間  $\delta t$  後にも水面にあるはずですが、その微小変位を図5.7のように考えると、 $v_3 \Big|_{x_3=\eta} = \dot{\eta} + (\partial_1 \eta)v_1$  という関係式がわかり、後ろの項を高次の微小量として無視すると、

$$\partial_3 \Phi \Big|_{x_3=\eta} = \dot{\eta} \quad (3)$$

が成り立ちます。



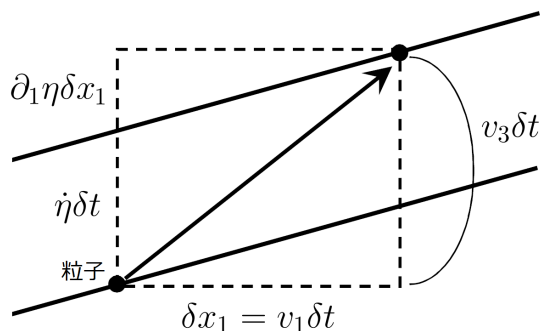


図 5.7: 水面における粒子の移動

(1) ~ (3) が流体の境界条件で、この境界条件のもとでラプラス方程式  $\Delta\Phi = 0$  を解こうというわけです。

いま、 $x_1$  方向の波動解を考え、速度ポテンシャルを、

$$\Phi = F(x_3) \sin(kx_1 - \omega t)$$

とおいてみましょう。 $k$  は波数、 $\omega$  は角振動数を意味します。そうすると、ラプラス方程式  $\Delta\Phi = 0$  は  $F''(x_3) = k^2 F(x_3)$  を与え、また (1) は  $F'(-h) = 0$  を与えます。よって解は、積分定数を  $A$  として、

$$F(x_3) = A \cosh(k(x_3 + h))$$

であり、これを  $\Phi$  の式に戻して、

$$\Phi = A \cosh(k(x_3 + h)) \sin(kx_1 - \omega t)$$

となります。これと (2)(3) から、 $\eta \ll h$  に注意して、

$$\eta = C \cos(kx_1 - \omega t), \quad C = \frac{A\omega}{g} \cosh(kh), \quad \omega^2 = gk \tanh(kh)$$

が得られるでしょう。速度場の回転が 0 という仮定はかなり強い仮定ですが、それでも幸運にも全ての境界条件を満たす近似解が見つかったというわけです。

最後の式は分散関係であり、ここから水面波の速さは、

$$v_p = \frac{\omega}{k} = \sqrt{\frac{g \tanh(kh)}{k}}$$

で与えられることがわかります。特に水深が十分にあり、 $kh \gg 1$  のときは、 $v_p \sim \sqrt{g/k}$  であり、このとき波長の長い波ほど速く進むことがわかります。また、一定の波長の波を考え、水深を変化させた場合は、浅い場合ほど波の速さが遅くなることも確かめられるでしょう。

## 5.13 レイノルズ数と力学的相似則

章の最後に、少し現象論的になりますが、一般に粘性のある流体中に物体がある場合について触れておきます。

流速が十分に遅い場合、流体は規則正しい流れを作りますが、流速が速い場合、物体との境界層がはがれて渦などを生じ、流体の流れは複雑化します。前者を層流、後者を乱流といいます。いま、流体中の物体のスケールを  $l$  とします。このとき物体が流体から受ける力は、層流においては粘性によるため  $\mu lv$  に比例しますが、乱流においては流体の運動量を変化させる反作用として考えられるため、 $\rho l^2 v^2$  に比例します。前者を粘性抵抗、後者を慣性抵抗といいます。

粘性抵抗と慣性抵抗の比として与えられる無次元量：

$$Re = \frac{\rho l v}{\mu}$$

をレイノルズ数といいます。レイノルズ数が同じである2つの流体の流れは相似になると考えられ、これを力学的相似則と呼びます。力学的相似則は流体模型の作成の際に重要になります。

ちなみに、層流と乱流の境は、物体の表面の滑らかさにも依りますが、十分滑らかな場合でおおよそ  $Re \sim 10^3$  付近になります。滑らかでない場合はもっと小さなレイノルズ数で乱流の傾向が強くなります。

(余談) もし小さな人間がいたら、その小さな人にとって水は我々よりねっとりしたものに感じられます。このことはレイノルズ数の式からも読み取れるはずですが、このことを無視していた映画が、例えば「ミクロの決死圏」や「ミクロキッズ」。ちゃんと考慮していた映画が「借りぐらしのアリエッティ」です。

# 索引

<hr/>	
あ	
圧力	12
アルキメデスの原理	12
一様等方弾性体	5
オイラー方程式	15
応力	3
応力テンソル	3
音速	13
音波	13
<hr/>	
か	
ガウス記号	11
角振動数	6
慣性抵抗	18
完全流体	15
<hr/>	
さ	
振幅	6
水面波	15
ストークスの関係式	12
線形近似	13
層流	18
<hr/>	
た	
縦波	7
弾性体	5
弾性率	5
ドップラー効果	14
<hr/>	
な	
ナビエ・ストークス方程式	12
粘性抵抗	18
粘性率	12
<hr/>	
は	
波数ベクトル	6
パスカル	3
波動解	6
非圧縮性流体	15
ひずみ	4
フックの法則	5
浮力	12
分散関係	6
平面波解	6
ベルヌーイの定理	15
変位	4
ポアソン比	7
<hr/>	
ま	
マッハ数	13
<hr/>	
や	
ヤング率	7
横波	7
<hr/>	
ら	
ラプラス方程式	16
ラメの定数	6
乱流	18
力学的相似則	18
流体	11
レイノルズ数	18
連続体	3
連続の式	11