

あもんノート

ユークリッド幾何学、ニュートン力学から、相対論、宇宙論、量子論、場の量子論、素粒子論、そして超ひも理論まで、理論物理学を簡潔にかつ幅広く網羅したノートです。TOP へは下の URL をクリックして行けます。専用の画像掲示板で、ご意見、ご質問等も受け付けております。

<http://amonphys.web.fc2.com/>

目次

第 30 章	アノマリー	3
30.1	ネーターの定理の復習	3
30.2	アノマリー	4
30.3	ゲージ理論のアノマリー	5
30.4	標準模型におけるアノマリー相殺	7
30.5	レプトン数とバリオン数の破れ	9

第30章 アノマリー

古典論で成り立っていた方程式が量子論で成立しなくなる現象を一般にアノマリー(量子異常)といいます。この章ではまずアノマリーに関して一般的な議論を行い、次に素粒子標準模型への応用を示します。

30.1 ネーターの定理の復習

一般に4次元時空上の場 $\varphi_i(x)$ の作用(作用汎関数)を $S[\varphi]$ とし、ラグランジアン密度を $\mathcal{L} = \mathcal{L}(x) = \mathcal{L}(\varphi(x), \partial\varphi(x))$ とします:

$$S[\varphi] = \int d^4x \mathcal{L}(x).$$

いま、場 $\varphi_i(x)$ のある無限小変換:

$$\delta\varphi_i = \epsilon^a G_i^a$$

に対して作用が不変であるとする、この変換に対するラグランジアン密度 \mathcal{L} の変分は、少なくとも時空の全微分で与えられるはずで、

$$\delta\mathcal{L} = \epsilon^a \partial_\mu X^{a\mu}$$

と表せます。 ϵ^a は変換の無限小パラメータです。これらと、

$$\delta\mathcal{L} = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\varphi_i} \delta\varphi_i + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\partial_\mu\varphi_i} \delta\partial_\mu\varphi_i$$

から、

$$\partial_\mu X^{a\mu} = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\varphi_i} G_i^a + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\partial_\mu\varphi_i} \partial_\mu G_i^a$$

を得るでしょう。右辺第2項を部分積分すれば、

$$\partial_\mu X^{a\mu} = \left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\varphi_i} - \partial_\mu \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\partial_\mu\varphi_i} \right) G_i^a + \partial_\mu \left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\partial_\mu\varphi_i} G_i^a \right)$$

ですが、場の方程式(オイラー・ラグランジュ方程式)のもとで、これは、

$$\partial_\mu j^{a\mu} = 0, \quad j^{a\mu} = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\partial_\mu\varphi_i} G_i^a - X^{a\mu}$$

という保存則を与えます。これをネーターの定理といい、 $j^{a\mu}$ をネーターカレントというのでした。

ネーターの定理は古典論における定理ですが、量子論においても単純な系においては代数方程式として成立します。しかしこれが成立しなくなる系も存在します。このことをこれから見てゆこうというわけです。

30.2 アノマリー

場の無限小変換 $\delta\varphi_i(x) = \varphi'_i(x) - \varphi_i(x) = \epsilon^a G_i^a(x)$ に対して、無限小パラメータ ϵ^a を一般に時空の関数とみなします。すなわちローカル化された変換を考えます。このローカル変換に対し、場の経路積分 (汎関数積分) の測度 $\mathcal{D}\varphi = \prod_{i,x} d\varphi_i(x)$ が、

$$\mathcal{D}\varphi' = \mathcal{D}\varphi \exp\left(i \int d^4x \epsilon^a(x) \mathcal{A}^a(x)\right)$$

のように変化するとしましょう。このとき、

$$\begin{aligned} \int \mathcal{D}\varphi e^{iS[\varphi]} &= \int \mathcal{D}\varphi' e^{iS[\varphi']} \\ &= \int \mathcal{D}\varphi \exp\left(i \int d^4x \epsilon^a(x) \mathcal{A}^a(x)\right) \exp\left(iS[\varphi] + i \int d^4x \frac{\delta S[\varphi]}{\delta\varphi_i(x)} \epsilon^a(x) G_i^a(x)\right) \\ &= \int \mathcal{D}\varphi \exp\left(i \int d^4x \epsilon^a(x) \left(\frac{\delta S[\varphi]}{\delta\varphi_i(x)} G_i^a(x) + \mathcal{A}^a(x)\right)\right) e^{iS[\varphi]} \\ \therefore \int d^4x \epsilon^a(x) \int \mathcal{D}\varphi \left(\frac{\delta S[\varphi]}{\delta\varphi_i(x)} G_i^a(x) + \mathcal{A}^a(x)\right) e^{iS[\varphi]} &= 0 \end{aligned}$$

ですが、これが任意の無限小パラメータ $\epsilon^a(x)$ について成り立つので、グリーン関数の経路積分表式に注意し、

$$\left\langle \frac{\delta S[\varphi]}{\delta\varphi_i(x)} G_i^a(x) + \mathcal{A}^a(x) \right\rangle = 0$$

という恒等式を得ます。〈 〉 は真空期待値を意味します。

さて、もし作用が今考えているグローバル変換に対して不変なら、

$$\begin{aligned} \frac{\delta S[\varphi]}{\delta\varphi_i} G_i^a &= \left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\varphi_i} - \partial_\mu \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\partial_\mu\varphi_i}\right) G_i^a \\ &= \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\varphi_i} G_i^a + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\partial_\mu\varphi_i} \partial_\mu G_i^a - \partial_\mu \left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\partial_\mu\varphi_i} G_i^a\right) \\ &= \partial_\mu X^{a\mu} - \partial_\mu \left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\partial_\mu\varphi_i} G_i^a\right) = -\partial_\mu j^{a\mu} \end{aligned}$$

なので、上の恒等式は、

$$\partial_\mu \langle j^{a\mu}(x) \rangle = \langle \mathcal{A}^a(x) \rangle$$

を与えます。よって特に $\langle \mathcal{A}^a(x) \rangle \neq 0$ の場合、これはネーターの定理の破れ、すなわち 保存則の破れ を意味することになります。

一方、もし作用が今考えているローカル変換に対して不変なら、この変換に対し、

$$\delta S[\varphi] = \int d^4x \frac{\delta S[\varphi]}{\delta \varphi_i(x)} \epsilon^a(x) G_i^a(x) = 0$$

であり、これが任意の $\epsilon^a(x)$ に対して成り立つので、

$$\frac{\delta S[\varphi]}{\delta \varphi_i(x)} G_i^a(x) = 0.$$

よって上の恒等式は、

$$\langle \mathcal{A}^a(x) \rangle = 0$$

を与え、特に $\langle \mathcal{A}^a(x) \rangle \neq 0$ の場合、これは 量子論の矛盾 を意味することになります。

$\mathcal{A}^a(x)$ を考えている変換 (対称性) のアノマリーといいます。また、その真空期待値が 0 でない場合、この対称性がアノマリーを持つといいます。特にゲージ対称性などのローカル対称性がアノマリーを持つことは理論として致命的で、このようなアノマリーは特にローカルアノマリーと呼ばれます。

30.3 ゲージ理論のアノマリー

ここで $SU(N)$ ゲージ理論が持つアノマリーについて見てみましょう。

ラグランジアン密度は、

$$\mathcal{L} = \bar{\psi} i \gamma \cdot D \psi + \frac{1}{2g^2} \text{tr} (\bar{F}_{\mu\nu} \bar{F}^{\mu\nu}).$$

g は結合定数。 $\psi(x)$ は N 個の成分から成る、右手型もしくは左手型のディラック場とします。共変微分は $D_\mu = \partial_\mu + \bar{A}_\mu$ で与えられ、 $\bar{A}_\mu(x)$ は N 次正方行列のゲージ場です。場の強さ $\bar{F}_{\mu\nu}(x)$ は、

$$\bar{F}_{\mu\nu} = [D_\mu, D_\nu] = \partial_\mu \bar{A}_\nu - \partial_\nu \bar{A}_\mu + [\bar{A}_\mu, \bar{A}_\nu]$$

で与えられます (詳しくは量子電磁気学の章参照)。 \mathcal{L} はゲージ変換、

$$\psi' = U\psi, \quad \bar{A}'_\mu = U\bar{A}_\mu U^{-1} - \partial_\mu U U^{-1}, \quad U = \exp(-ig\theta^a T^a)$$

に対して不変で、ここで $\theta^a(x)$ は変換のパラメータ、 T^a は $SU(N)$ の生成子で、トレースが 0 の N 次エルミート行列です。

ディラック場、およびそのディラック共役の無限小変換が、

$$\delta\psi = -ig\theta^a T^a \frac{1 + \epsilon\gamma_5}{2} \psi, \quad \delta\bar{\psi} = \bar{\psi} ig\theta^a T^a \frac{1 - \epsilon\gamma_5}{2}$$

と書けることに注意しましょう。ここで ϵ はディラック場が右手型のときは $+1$ 、左手型のときは -1 を与える符号因子です。そうすると、ディラック場の経路積分の測度は、

$$\begin{aligned} \mathcal{D}\bar{\psi}' \mathcal{D}\psi' &= \mathcal{D}\bar{\psi} \text{Det} \left(1 - ig\theta^a T^a \frac{1 - \epsilon\gamma_5}{2} \right) \mathcal{D}\psi \text{Det} \left(1 + ig\theta^a T^a \frac{1 + \epsilon\gamma_5}{2} \right) \\ &= \mathcal{D}\bar{\psi} \mathcal{D}\psi \text{Det} (1 + i\epsilon g\theta^a T^a \gamma_5) = \mathcal{D}\bar{\psi} \mathcal{D}\psi \exp \left(\text{Tr} (i\epsilon g\theta^a T^a \gamma_5) \right) \\ &= \mathcal{D}\bar{\psi} \mathcal{D}\psi \exp \left(\int d^4x i\epsilon g\theta^a(x) \text{tr} (T^a \gamma_5 \delta^4(0)) \right) \end{aligned}$$

のように変化し、また、ゲージ場の測度は変化しないことがわかるので、この変換のアノマリーは、形式的に、

$$\mathcal{A}^a = \epsilon g \text{tr} (T^a \gamma_5 \delta^4(0))$$

と書けます。ここで問題になるのは式中の $\delta^4(0)$ の評価です。もしこれがただの数なら、 T^a も γ_5 もトレースレスなので、アノマリーは 0 ということになります。しかし正則化のあり方によってはそうならない可能性もあります。

例えば、ゲージ不変な正則化として、

$$\delta^4(0) = \lim_{\Lambda \rightarrow \infty} \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} e^{-ik \cdot x} e^{-(\gamma \cdot D)^2 / \Lambda} e^{ik \cdot x}$$

を考えると、

$$(\gamma \cdot D)^2 = \gamma^\mu \gamma^\nu D_\mu D_\nu = \frac{1}{2} \gamma^\mu \gamma^\nu (\{D_\mu, D_\nu\} + [D_\mu, D_\nu]) = D^2 + \frac{1}{2} \gamma^\mu \gamma^\nu \bar{F}_{\mu\nu}$$

に注意して、

$$\begin{aligned} \delta^4(0) &= \lim_{\Lambda \rightarrow \infty} \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \exp \left(\frac{k^2}{\Lambda} \right) \exp \left(\frac{-\gamma^\mu \gamma^\nu \bar{F}_{\mu\nu}}{2\Lambda} \right) \\ &= \lim_{\Lambda \rightarrow \infty} \frac{-i\Lambda^2}{16\pi^2} \exp \left(\frac{-\gamma^\mu \gamma^\nu \bar{F}_{\mu\nu}}{2\Lambda} \right) \\ &= \lim_{\Lambda \rightarrow \infty} \left(-\frac{i\Lambda^2}{16\pi^2} + \frac{i\Lambda \gamma^\mu \gamma^\nu \bar{F}_{\mu\nu}}{32\pi^2} - \frac{i(\gamma^\mu \gamma^\nu \bar{F}_{\mu\nu})^2}{128\pi^2} \right) \end{aligned}$$

と評価され、これを A^a の式に代入し、

$$\text{tr}(\gamma_5 \gamma^\mu \gamma^\nu) = 0, \quad \text{tr}(\gamma_5 \gamma^\mu \gamma^\nu \gamma^\rho \gamma^\sigma) = -4i \epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} \quad (\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} \text{ は 4 元レビ・チビタ})$$

に注意すると、

$$A^a = \frac{-\epsilon g}{32\pi^2} \epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} \text{tr}(T^a \bar{F}_{\mu\nu} \bar{F}_{\rho\sigma})$$

を得ます。

右手型もしくは左手型のディラック場 (ワイル場) がゲージ場と結合したゲージ理論 (その量子論) は、上式から生じるローカルアノマリーにより矛盾する可能性があります。ただしディラック場が複数ある場合は、それらのアノマリーへの寄与が相殺されることがあります。例えば、右手型と左手型が常に対になっていて、完全なディラック場を成しているなら、符号因子 ϵ の存在に注意して、アノマリーは正確に相殺されるでしょう。すなわち、ベクトル型のゲージ理論は安全といえますが、右手型と左手型がアンバランスなカイラルなゲージ理論の量子論は矛盾を引き起こす可能性があるわけです。一般に理論がカイラルであるために現れるアノマリーをカイラルアノマリーといいます。

(余談) カイラルアノマリーは、アドラー (1969)、ベル・ジャキフ (1969) によって最初に発見されましたが、ここで示したような経路積分の測度からの系統的な導出は藤川 (1979,1980) によるもので、藤川の方法 (Fujikawa method) と呼ばれます。

30.4 標準模型におけるアノマリー相殺

例えば、素粒子標準模型はカイラルなゲージ理論ですが、そのローカルアノマリーは綺麗に相殺され、矛盾を起こさないことが知られています。このことを証明しておきましょう。

標準模型のゲージ群は $U(1)_Y \times SU(2) \times SU(3)$ であり、カイラルな物質場は、

	l_L	l_R^u	l_R^d	q_L	q_R^u	q_R^d
ϵ	-1	1	1	-1	1	1
Y	-1/2	0	-1	1/6	2/3	-1/3
d_2	2	1	1	2	1	1
d_3	1	1	1	3	3	3

の6つでした。 Y は超電荷、 d_2 は $SU(2)$ の表現次元、 d_3 は $SU(3)$ の表現次元を意味します。各ゲージ変換のアノマリーは、

$$gT^a \rightarrow g'Y, \quad g \frac{\sigma^a}{2}, \quad g_c \frac{\lambda^i}{2}$$

という置換により得られるはずで、 $U(1)_Y$, $SU(2)$, $SU(3)$ の部分は、順に、

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_1 &= \sum_{\text{物質場}} \frac{-\epsilon}{32\pi^2} \epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} \text{tr} (g' Y \bar{F}_{\mu\nu} \bar{F}_{\rho\sigma}), \\ \mathcal{A}_2^a &= \sum_{\text{物質場}} \frac{-\epsilon}{32\pi^2} \epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} \text{tr} \left(g \frac{\sigma^a}{2} \bar{F}_{\mu\nu} \bar{F}_{\rho\sigma} \right) \quad (a = 1 \sim 3), \\ \mathcal{A}_3^i &= \sum_{\text{物質場}} \frac{-\epsilon}{32\pi^2} \epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} \text{tr} \left(g_c \frac{\lambda^i}{2} \bar{F}_{\mu\nu} \bar{F}_{\rho\sigma} \right) \quad (i = 1 \sim 8) \end{aligned}$$

で与えられることとなります。一方、行列表記の場の強さ $\bar{F}_{\mu\nu}$ は、各物質場について、

$$\bar{F}_{\mu\nu} = ig' Y f_{\mu\nu} \left(+ig \frac{\sigma^a}{2} F_{\mu\nu}^a \right) \left(+ig_c \frac{\lambda^i}{2} \mathcal{F}_{\mu\nu}^i \right)$$

と評価され、括弧部分は物質場が $SU(2)$ や $SU(3)$ の基本表現のときに加えられると考えます (記号については素粒子論の章参照)。これを代入し、各アノマリーは、

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_1 &= \sum_{\text{物質場}} (\mathcal{A}_{111} + \mathcal{A}_{112} + \cdots + \mathcal{A}_{133}), \\ \mathcal{A}_2^a &= \sum_{\text{物質場}} (\mathcal{A}_{211}^a + \mathcal{A}_{212}^a + \cdots + \mathcal{A}_{233}^a), \\ \mathcal{A}_3^i &= \sum_{\text{物質場}} (\mathcal{A}_{311}^i + \mathcal{A}_{312}^i + \cdots + \mathcal{A}_{333}^i) \end{aligned}$$

のように展開されるでしょう。各項の後ろ2つの添字 1, 2, 3 は、それぞれ場の強さの $U(1)_Y$, $SU(2)$, $SU(3)$ からの寄与を拾ったことを意味します。

$$\text{tr} \sigma^a = 0, \quad \text{tr} \lambda^i = 0, \quad \text{tr} (\sigma^a \{\sigma^b, \sigma^c\}) = 2\delta_c^b \text{tr} \sigma^a = 0$$

に注意すると、項のいくつかは自明に 0 とわかり、残る項は、

$$\begin{aligned} &\sum_{\text{物質場}} \mathcal{A}_{111}, \quad \sum_{\text{物質場}} \mathcal{A}_{122}, \quad \sum_{\text{物質場}} \mathcal{A}_{133}, \\ &\sum_{\text{物質場}} \mathcal{A}_{212}^a = \sum_{\text{物質場}} \mathcal{A}_{221}^a, \quad \sum_{\text{物質場}} \mathcal{A}_{313}^i = \sum_{\text{物質場}} \mathcal{A}_{331}^i, \quad \sum_{\text{物質場}} \mathcal{A}_{333}^i \end{aligned}$$

です。しかしこれらも 0 になることが以下のように確かめられます。

$$\begin{aligned} \sum_{\text{物質場}} \mathcal{A}_{111} &\propto \sum_{\text{物質場}} \epsilon Y^3 d_2 d_3 = -(-1/2)^3 \cdot 2 + 0^3 + (-1)^3 \\ &\quad - (1/6)^3 \cdot 2 \cdot 3 + (2/3)^3 \cdot 3 + (-1/3)^3 \cdot 3 = 0, \end{aligned}$$

$$\sum_{\text{物質場}} \mathcal{A}_{122} \propto \sum_{d_2=2} \epsilon Y d_3 = -(-1/2) - (1/6) \cdot 3 = 0,$$

$$\sum_{\text{物質場}} \mathcal{A}_{133} \propto \sum_{d_3=3} \epsilon Y d_2 = -(1/6) \cdot 2 + (2/3) + (-1/3) = 0.$$

同様に $\sum_{\text{物質場}} \mathcal{A}_{212}^a = \sum_{\text{物質場}} \mathcal{A}_{221}^a = 0$, $\sum_{\text{物質場}} \mathcal{A}_{313}^i = \sum_{\text{物質場}} \mathcal{A}_{331}^i = 0$. さらに、

$$\sum_{\text{物質場}} \mathcal{A}_{333}^i \propto \sum_{d_3=3} \epsilon d_2 = -2 + 1 + 1 = 0.$$

レプトンとクォークが存在して、初めてローカルアノマリーが相殺されることに注意してください。レプトンだけの理論、あるいはクォークだけの理論では矛盾を起こしてしまうのです。また、レプトンやクォークの超電荷が少しでも異なれば、やはり矛盾を起こしてしまいます。このようなアノマリー相殺は偶然とは考えにくく、標準模型の背後にはレプトンとクォークを統一する何かしらの統一理論があると予想されます。

30.5 レプトン数とバリオン数の破れ

標準模型はレプトンに関するグローバル位相変換、

$$l_L' = e^{-i\theta} l_L, \quad l_R^u' = e^{-i\theta} l_R^u, \quad l_R^d' = e^{-i\theta} l_R^d$$

に対して不変で、この不変性に伴う保存量がいわゆるレプトン数です。この変換のアノマリーは、カイラルアノマリーの式で $gT^a \rightarrow 1$ とし、レプトンに関する寄与だけを拾うことで得られるはずで、

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_l &= \sum_{\text{レプトン}} \frac{-\epsilon}{32\pi^2} \epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} \text{tr} (\bar{F}_{\mu\nu} \bar{F}_{\rho\sigma}) \\ &= \frac{n_f}{32\pi^2} \epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} \text{tr} \left(ig' \frac{-1}{2} f_{\mu\nu} + ig \frac{\sigma^a}{2} F_{\mu\nu}^a \right) \left(ig' \frac{-1}{2} f_{\rho\sigma} + ig \frac{\sigma^b}{2} F_{\rho\sigma}^b \right) \\ &\quad + \frac{-n_f}{32\pi^2} \epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} \left(ig'(-1) f_{\mu\nu} \right) \left(ig'(-1) f_{\rho\sigma} \right) \\ &= \frac{n_f g'^2}{64\pi^2} \epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} f_{\mu\nu} f_{\rho\sigma} - \frac{n_f g^2}{64\pi^2} \epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} F_{\mu\nu}^a F_{\rho\sigma}^a \end{aligned}$$

と計算されます。 n_f は世代数で、通常の標準模型では $n_f = 3$ です。

同様に標準模型はクォークに関するグローバル位相変換、

$$q_L' = e^{-i\theta/3} q_L, \quad q_R^u' = e^{-i\theta/3} q_R^u, \quad q_R^d' = e^{-i\theta/3} q_R^d$$

に対して不変で、この不変性に伴う保存量がいわゆるバリオン数です。その anomalies は $gT^a \rightarrow 1/3$ とし、クォークの寄与だけを捨てることで得られるはずで、上と同様な計算で、

$$A_b = \sum_{\text{クォーク}} \frac{-\epsilon}{96\pi^2} \epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} \text{tr}(\bar{F}_{\mu\nu} \bar{F}_{\rho\sigma}) = \frac{n_f g'^2}{64\pi^2} \epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} f_{\mu\nu} f_{\rho\sigma} - \frac{n_f g^2}{64\pi^2} \epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} F_{\mu\nu}^a F_{\rho\sigma}^a$$

となるでしょう。

よって、レプトン数の 4 元カレントを j_l^μ 、バリオン数の 4 元カレントを j_b^μ とすると、少なくとも真空期待値において、

$$\partial_\mu j_l^\mu = \partial_\mu j_b^\mu = \frac{n_f g'^2}{64\pi^2} \epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} f_{\mu\nu} f_{\rho\sigma} - \frac{n_f g^2}{64\pi^2} \epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} F_{\mu\nu}^a F_{\rho\sigma}^a$$

が成り立つはずで、この式は標準模型におけるレプトン数およびバリオン数の破れを示唆しています^(*)。ただしこれら保存則が破れる場合でも、(レプトン数 - バリオン数) は厳密に保存します。

(*注) バリオン数の破れの可能性はインスタントンやスファレロンと呼ばれるトポロジカルな解の経路により実際にあり得ると考えられています。ただしその遷移確率はエントロピー (状態数) 的な制約により非常に小さくなるだろうと予想されています。

索引

あ	
アノマリー	3, 5
インスタントン	10
か	
カイラル	7
カイラルアノマリー	7
さ	
スファレロン	10
な	
ネーターカレント	4
ネーターの定理	4
は	
バリオン数	10
藤川の方法	7
保存則	4
ら	
量子異常	3
レプトン数	9
ローカルアノマリー	5