あもんノート

ユークリッド幾何学、ニュートン力学から、相対論、宇宙論、量子論、場の量子論、素粒子論、そして超ひも理論まで、理論物理学を簡潔にかつ幅広く網羅したノートです。TOP へは下の URL をクリックして行けます。専用の画像掲示板で、ご意見、ご質問等も受け付けております。

http://amonphys.web.fc2.com/

目 次

第4章　解析力学

解析力学は一般に力学を数学的に見通しの良い形に整理したものです。最初にその一般論を紹介します。次にニュートン力学のラグランジアンを提示し、そこからニュートンの運動方程式が導出されることを確かめます。また、変分法を紹介し、その例題を2つ取り上げます。後半では無限自由度の系や場を含んだ系の解析力学を取り上げ、場の理論の準備とします。

4.1　汎関数と汎関数微分

まず数学の紹介です。

複数の独立変数 x_t $(t = 1, 2, \cdots)$ があったとき、その多変数関数 $f(x_1, x_2, \cdots)$ を $f(x)$ などと書くことはおなじみでしょう。このとき、偏微分：

$$\frac{\partial f(x)}{\partial x_t}$$

を考えることができます。

ではもし x_t の添字 t が、自然数でなく、実数に値をとるとしたらどうでしょう? 通常それは $x(t)$ と書かれ、t の関数とみなされますが、実数 t で特徴づけられる連続無限個の独立変数 $x(t)$ と考えてもいいでしょう。その多変数関数を $f[x]$ などと書いて、$x(t)$ の**汎関数**といいます。また、偏微分 $\partial f(x)/\partial x_t$ に相当するものを、

$$\frac{\delta f[x]}{\delta x(t)}$$

と書いて、**汎関数微分**といいます。

このとき、

$$\frac{\partial x_t}{\partial x_{t'}} = \delta_{tt'} \quad \text{に対応して} \quad \frac{\delta x(t)}{\delta x(t')} = \delta(t-t').$$

クロネッカーデルタの連続版がデルタ関数であるわけです。同時に $\sum_t \to \int dt$ というように和を積分として考えます。例えば、

$$df(x) = \sum_t \frac{\partial f(x)}{\partial x_t} dx_t \quad \text{に対応して} \quad \delta f[x] = \int dt \, \frac{\delta f[x]}{\delta x(t)} \delta x(t)$$

ということになります。

(余談) 特にハイレベルな理論物理学においては、このように離散変数と連続変数を同様に考えて扱うことが大事になってきます。

4.2 最小作用の原理

時間変数を t とし、複数の**力学変数**を一般に、

$$q_i = q_i(t) \quad (i = 1, 2, \cdots, N)$$

と書きます。N は力学変数の個数で、力学系の**自由度**と呼ばれます。力学変数の汎関数 $S[q]$ を考え、これを**作用汎関数**、あるいは単に**作用**と呼びます。作用が停留値性を持つという要請：

$$\delta S[q] = 0$$

は、**最小作用の原理**、あるいは単に**作用原理**と呼ばれます。

作用は通常 q_i とその時間微分 $\dot{q}_i$ の関数の時間積分で表されます。すなわち、

$$S[q] = \int dt\ L(q, \dot{q}).$$

このとき関数 $L = L(q, \dot{q})$ を**ラグランジアン**と呼びます。ラグランジアンを具体的に与えることで**力学系** (モデル、理論) が決定します。このような力学系の与え方を特に**ラグランジュ形式**といいます。

ラグランジアンの変分を作ってみると、

$$\begin{aligned}\delta L &= \frac{\partial L}{\partial q_i}\,\delta q_i + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\,\delta \dot{q}_i = \frac{\partial L}{\partial q_i}\,\delta q_i + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\,\frac{d}{dt}\,\delta q_i \\ &= \left(\frac{\partial L}{\partial q_i} - \frac{d}{dt}\,\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right)\delta q_i + \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\,\delta q_i\right).\end{aligned}$$

添字 i について縮約規則を用いています。時間で積分すれば、

$$\delta S[q] = \int dt \left(\frac{\partial L}{\partial q_i} - \frac{d}{dt}\,\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right)\delta q_i + \left[\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\,\delta q_i\right]_{t=-\infty}^{t=\infty}$$

ですが、無限過去と無限未来で $\delta q_i = 0$ を仮定すれば後ろの項は消えて、また $\delta q_i(t)$ は任意ですから、作用原理より、

$$\frac{\partial L}{\partial q_i} - \frac{d}{dt}\,\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} = 0$$

を得ます。これを**ラグランジュ方程式**といいます。この方程式から、力学変数の時間的振る舞いが決定されることになり、このような方程式を一般に**運動方程式**といいます。

ちなみに汎関数微分を用いるなら、$L = L(t) = L(q(t), \dot{q}(t))$ として、

$$\frac{\delta S[q]}{\delta q_i(t)} = \int dt' \, \frac{\delta L(t')}{\delta q_i(t)} = \int dt' \left(\frac{\partial L(t')}{\partial q_j(t')} \frac{\delta q_j(t')}{\delta q_i(t)} + \frac{\partial L(t')}{\partial \dot{q}_j(t')} \frac{\delta \dot{q}_j(t')}{\delta q_i(t)} \right)$$

$$= \int dt' \left(\frac{\partial L(t')}{\partial q_j(t')} \delta_{ji} \delta(t'-t) + \frac{\partial L(t')}{\partial \dot{q}_j(t')} \delta_{ji} \frac{d}{dt'} \delta(t'-t) \right) = \frac{\partial L(t)}{\partial q_i(t)} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L(t)}{\partial \dot{q}_i(t)}$$

なので、やはり作用原理からラグランジュ方程式が得られます。

(余談) 相対論や量子論など、ニュートン力学を超えより広い物理体系を考える場合、最小作用の原理を出発点 (第一義的) とすることが普通で、その方が色々と見通しが良くなります。そこでは作用汎関数が持つ対称性や単純さが理論の美しさの指標になります。

4.3 ネーターの定理

力学変数 q_i に関する無限小変換：

$$\delta q_i = \epsilon_a G_{ai}(q, \dot{q})$$

を考えます。ここで ϵ_a は無限小の変換パラメータ、G_{ai} は変換の**生成子**と呼ばれ、一般に q_i, $\dot{q}_i$ の関数です。もしこの変換において作用が不変なら、ラグランジアンの変分は少なくとも時間の全微分で与えられるはずなので、

$$\delta L = \epsilon_a \dot{X}_a(q, \dot{q})$$

とおきます。一方、前節の δL の式から、ラグランジュ方程式のもとで、

$$\delta L = \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \delta q_i \right).$$

以上、3 つの式から、

$$\dot{Q}_a = 0, \quad Q_a = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} G_{ai} - X_a$$

という保存則がわかり、**ネーターの定理**と呼ばれます。この定理はラグランジアンの対称性に対応して保存量が存在することをいっています。

例えば、ラグランジアンはあらわに時間変数を含まないので、時間並進変換：$t' = t - \epsilon$ に関して作用は不変です。このとき、

$$q_i'(t') = q_i(t) = q_i(t' + \epsilon)$$

に注意し、力学変数の無限小変換は、

$$\delta q_i(t) = q_i'(t) - q_i(t) = q_i(t + \epsilon) - q_i(t) = \epsilon \dot{q}_i(t).$$

同様に、ラグランジアンの無限小変換は $\delta L = \epsilon \dot{L}$ となるので、ネーターの定理より、

$$E = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\,\dot{q}_i - L$$

が保存します。作用の時間並進対称性に付随したこの保存量は、**エネルギー**と呼ばれます。

4.4　正準形式

力学変数 q_i に対して、

$$p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}$$

で定義される p_i をその**正準共役**と呼び、$q_i,\ p_i$ を**正準変数**と呼びます。正準変数が作る $2N$ 次元の空間 $\{(q,p)\}$ は**位相空間**と呼ばれます。

エネルギーを正準変数だけで書いた関数：

$$H(q,p) = p_i\dot{q}_i - L(q,\dot{q})$$

を**ハミルトニアン**と呼びます。このときラグランジュ方程式に注意して、

$$\frac{\partial H}{\partial q_i} = \left(\frac{\partial p_j}{\partial q_i}\right)_p \dot{q}_j + p_j\left(\frac{\partial \dot{q}_j}{\partial q_i}\right)_p - \frac{\partial L}{\partial q_j}\left(\frac{\partial q_j}{\partial q_i}\right)_p - \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}\left(\frac{\partial \dot{q}_j}{\partial q_i}\right)_p = -\frac{\partial L}{\partial q_i} = -\dot{p}_i,$$

$$\frac{\partial H}{\partial p_i} = \left(\frac{\partial p_j}{\partial p_i}\right)_q \dot{q}_j + p_j\left(\frac{\partial \dot{q}_j}{\partial p_i}\right)_q - \frac{\partial L}{\partial q_j}\left(\frac{\partial q_j}{\partial p_i}\right)_q - \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}\left(\frac{\partial \dot{q}_j}{\partial p_i}\right)_q = \dot{q}_i$$

ですから、まとめると、

$$\dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i,} \quad \dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q_i.}$$

これを**正準方程式**といいます。正準変数の時間発展はこれにより決定され、それはラグランジュ方程式と等価です。

正準変数を用い、運動方程式を時間の 1 階微分までに限定したこの力学の形式は、**正準形式**と呼ばれます。正準形式は数学的に美しく、特に形式的な議論に適しています。また、正準量子論の基礎として不可欠になります。

4.5　ニュートン力学のラグランジアン

ニュートン力学において、質点系 S の運動エネルギー K, ポテンシャルエネルギー U, 外部ポテンシャル U' は、それぞれ、

$$K = \sum_{a\in S}\frac{m_a}{2}\,\dot{x}^i_a\dot{x}^i_a, \quad U = \frac{1}{2}\sum_{a\in S}\sum_{b\in S}U_{ab}, \quad U' = \sum_{a\in S}\sum_{b\notin S}U_{ab}$$

でした。ここで x_a^i は a 番目の質点のデカルト座標、U_{ab} は力のポテンシャルで、対称性 $U_{ab}=U_{ba}$ を持つものとします (ニュートン力学の章を参照)。

そうすると、$a\in S$ において、

$$\frac{\partial K}{\partial \dot{x}_a^i}=\frac{\partial}{\partial \dot{x}_a^i}\sum_{b\in S}\frac{m_b}{2}\,\dot{x}_b^j\dot{x}_b^j=\sum_{b\in S}m_b\dot{x}_b^j\delta_{ij}\delta_{ab}=m_a\dot{x}_a^i$$

および、

$$\begin{aligned}\frac{\partial U}{\partial x_a^i}&=\frac{1}{2}\sum_{b\in S}\sum_{c\in S}\frac{\partial U_{bc}}{\partial x_a^i}=\frac{1}{2}\sum_{b\in S}\sum_{c\in S}\left(\delta_{ab}\frac{\partial U_{bc}}{\partial x_b^i}+\delta_{ac}\frac{\partial U_{bc}}{\partial x_c^i}\right)\\&=\frac{1}{2}\left(\sum_{c\in S}\frac{\partial U_{ac}}{\partial x_a^i}+\sum_{b\in S}\frac{\partial U_{ba}}{\partial x_a^i}\right)=\sum_{b\in S}\frac{\partial U_{ab}}{\partial x_a^i},\end{aligned}$$

$$\frac{\partial U'}{\partial x_a^i}=\sum_{b\in S}\sum_{c\notin S}\frac{\partial U_{bc}}{\partial x_a^i}=\sum_{b\in S}\sum_{c\notin S}\delta_{ab}\frac{\partial U_{bc}}{\partial x_b^i}=\sum_{c\notin S}\frac{\partial U_{ac}}{\partial x_a^i}$$

がわかります。よって、系 S のラグランジアンを、

$$L=K-U-U'$$

で定義すると、

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_a^i}=\frac{\partial K}{\partial \dot{x}_a^i}=m_a\dot{x}_a^i,\qquad \frac{\partial L}{\partial x_a^i}=-\frac{\partial U}{\partial x_a^i}-\frac{\partial U'}{\partial x_a^i}=-\sum_b\frac{\partial U_{ab}}{\partial x_a^i}$$

なので、ラグランジュ方程式：$\dfrac{\partial L}{\partial x_a^i}-\dfrac{d}{dt}\dfrac{\partial L}{\partial \dot{x}_a^i}=0$ は、

$$-\sum_b\frac{\partial U_{ab}}{\partial x_a^i}=m_a\ddot{x}_a^i$$

を与え、これは質点 a に関するニュートンの運動方程式です。すなわちニュートン力学のラグランジアンは、$L=K-U-U'$ で与えられるというわけです。

また、質点系 S のエネルギーは、

$$E=\sum_{a\in S}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_a^i}\,\dot{x}_a^i-L=\sum_{a\in S}m_a\dot{x}_a^i\dot{x}_a^i-L=2K-L=K+U+U'$$

と見積もられますが、これは確かにニュートン力学の外部ポテンシャルを含むエネルギーになっています。

4.6　孤立系のニュートン力学

考えている系がその外部と物理的に関与しない場合、すなわち孤立系の場合、ニュートン力学のラグランジアンは、

$$L = K - U = \frac{1}{2}\sum_a m_a |\dot{x}_a|^2 - \frac{1}{2}\sum_{ab} U_{ab}.$$

ここで $|A| = \sqrt{A\cdot A},\ \ A\cdot B = A_i B_i$ という記法を用いています。

例えば、力が万有引力とクーロン力の場合、

$$U_{ab} = -\frac{G\, m_a m_b}{|x_a - x_b|} + \frac{q_a q_b}{4\pi\epsilon_0 |x_a - x_b|}$$

であり、G は万有引力定数、ϵ_0 は真空の誘電率、q_a は a 番目の質点の電荷です。もし他に力があれば、U_{ab} にそのポテンシャルを追加すればよいわけです。

このときラグランジアン L は、並進変換：

$$\delta x_a^i = \epsilon_i = \epsilon_j \delta_{ji}$$

において不変なので、ネーターの定理から、

$$P_j = \sum_a \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_a^i}\,\delta_{ji} = \sum_a m_a \dot{x}_a^j$$

が保存することがわかります。これは系の運動量に他なりません。一方、ラグランジアン L は、回転変換：

$$\delta x_a^i = \epsilon_{ijk}\epsilon_j x_a^k$$

においても不変であり、そうするとやはりネーターの定理から、

$$J_j = \sum_a \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_a^i}\,\epsilon_{ijk} x_a^k = \sum_a m_a \dot{x}_a^i \epsilon_{ijk} x_a^k = \sum_a m_a \epsilon_{jki} x_a^k \dot{x}_a^i$$

が保存することがわかります。これは系の角運動量に他なりません。**運動量**と**角運動量**は、それぞれ空間における並進対称性、回転対称性に付随した保存量というわけです。

作用原理に従えば、ニュートン力学は、結局、

$$L = \frac{1}{2}\sum_a m_a |\dot{x}_a|^2 - \frac{1}{2}\sum_{ab} U_{ab}$$

に尽きるということが重要です。系の内部や外部、微視的や巨視的など、人間が実用上の都合で分離するから色々と複雑になりますが、理論自体はこのラグラン

ジアンで完全に尽くされています。第一義的なのは力ではなく、質点間のポテンシャル U_{ab} であることも、この形式により明確です。

上式の右辺初項は、**運動項**あるいは**自由項**と呼ばれ、第 2 項は、**ポテンシャル項**あるいは**相互作用項**と呼ばれます。相互作用というのは文字通り、互いに作用 (影響) を及ぼすことで、力よりも一般的な概念です。

4.7 二重振り子

ラグランジュ方程式の例題として、図 1 のような**二重振り子**を考えてみましょう。2 つの棒の長さを共に l とし、2 つのおもりの質量を共に m とします。おもりは十分小さいとし、また、摩擦は生じないものとします。重力加速度を g とします。

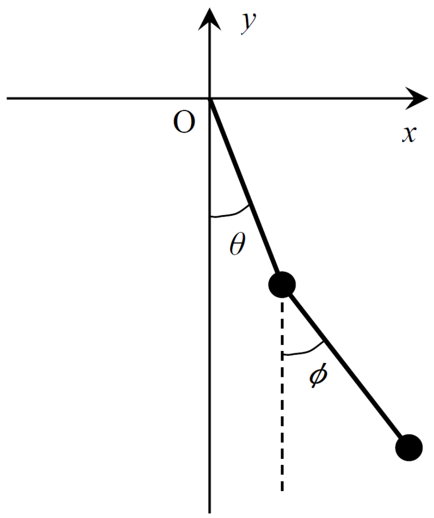

図 4.1: 二重振り子

2 つのおもりの位置ベクトルは、それぞれ、

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} l\sin\theta \\ -l\cos\theta \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} l\sin\theta + l\sin\phi \\ -l\cos\theta - l\cos\phi \end{pmatrix}$$

と表されるので、系のラグランジアンは、

$$\begin{aligned} L &= \frac{m}{2}(\dot{x}_1^2 + \dot{y}_1^2) + \frac{m}{2}(\dot{x}_2^2 + \dot{y}_2^2) - mgy_1 - mgy_2 \\ &= \frac{ml^2}{2}\left(2\dot{\theta}^2 + \dot{\phi}^2 + 2\cos(\theta - \phi)\,\dot{\theta}\dot{\phi}\right) + mgl\big(2\cos\theta + \cos\phi\big) \end{aligned}$$

と計算されます。いま、簡単のため、特に振れ幅が小さい場合を考え、$\theta \ll 1$, $\phi \ll 1$ とすると、ラグランジアンは、θ, ϕ の 3 次以上を無視し、

$$L = \frac{ml^2}{2}\left(2\dot{\theta}^2 + \dot{\phi}^2 + 2\dot{\theta}\dot{\phi}\right) + mgl\left(3 - \theta^2 - \frac{1}{2}\phi^2\right)$$

と近似され、そうすると、

$$\frac{\partial L}{\partial\dot\theta} = ml^2(2\dot\theta+\dot\phi), \quad \frac{\partial L}{\partial\dot\phi} = ml^2(\dot\theta+\dot\phi), \quad \frac{\partial L}{\partial\theta} = -2mgl\theta, \quad \frac{\partial L}{\partial\phi} = -mgl\phi$$

ですから、ラグランジュ方程式は、

$$\begin{cases} 2\ddot\theta+\ddot\phi+(2g/l)\theta=0 \\ \ddot\theta+\ddot\phi+(g/l)\phi=0 \end{cases} \qquad \therefore \begin{pmatrix} 2d_t^2+2g/l & d_t^2 \\ d_t^2 & d_t^2+g/l \end{pmatrix}\begin{pmatrix}\theta\\ \phi\end{pmatrix} = \mathbf{0}$$

と整理されます。ここで d_t は時間微分演算子です。これは定係数の線形微分方程式ですから、解として $\begin{pmatrix}\theta\\ \phi\end{pmatrix} = \boldsymbol{u}\cos(\omega t)$ を想定し、代入すると、

$$\begin{pmatrix} -2\omega^2+2g/l & -\omega^2 \\ -\omega^2 & -\omega^2+g/l \end{pmatrix}\boldsymbol{u} = \mathbf{0}.$$

$\boldsymbol{u}\neq\mathbf{0}$ から上式の行列の行列式は 0 であり、このことから、

$$\omega^2 = \left(2\pm\sqrt{2}\right)\frac{g}{l} \quad \text{このとき} \quad \boldsymbol{u}\propto\begin{pmatrix}1\\ \mp\sqrt{2}\end{pmatrix}$$

を得ます (複号同順)。よって線形性と時間並進不変性に注意すると、解として、

$$\begin{pmatrix}\theta\\ \phi\end{pmatrix} = A\begin{pmatrix}1\\ -\sqrt{2}\end{pmatrix}\cos(\omega_+t+\alpha)+B\begin{pmatrix}1\\ \sqrt{2}\end{pmatrix}\cos(\omega_-t+\beta)$$

を得ます。ここで $\omega_\pm = \sqrt{(2\pm\sqrt{2})\,g/l}.$ また、$A,\,B,\,\alpha,\,\beta$ は定数です。自由度 2 の 2 階微分方程式の解で、独立な積分定数が 4 つあるので、これは一般解といえます。前の項は 2 つのおもりが逆方向に振れる高振動数モード (くねくねと速く振動するモード)、後ろの項は 2 つのおもりが同じ方向に振れる低振動数モード (ゆったりと振動するモード) を意味します。振れ幅が小さい場合、一般解はこの 2 つのモードの線形結合とみなされるわけです。

力学系の自由度が 2 であるのに対し、保存量がエネルギーの 1 つしか見当たらないため、この系を保存則だけで解くことはできません。また、元々の力の概念から運動方程式を作るのも、実に骨の折れる作業です。こういった場合にラグランジュ方程式は、少なくとも計算上、有効なわけです。

4.8 変分法

未定の関数 $y=y(x)$ があって、その導関数を $y'(x)$ とします。定積分、

$$I[y] = \int_a^b dx\,F(y,y')$$

が、積分の境界 $x=a,\ x=b$ において固定された任意の変分 $\delta y(x)$ に関し停留値性を持つとき、すなわち $\delta I[y]=0$ のとき、

$$\frac{\partial F}{\partial y}-\frac{d}{dx}\frac{\partial F}{\partial y'}=0$$

が成り立ちます。またこのとき、

$$\frac{\partial F}{\partial y'}y'-F=\text{一定}$$

です。これを**変分法**といいます。導出はラグランジュ方程式のそれとまったく同じなので、説明の必要はないでしょう。変分法を用いないと解くことが難しい物理の問題がいくつか存在します。以下に有名な例題を2つ示します。

4.9 最速降下曲線

地上に摩擦のない滑り台があり、ある物体を初速 0 で点 O から出発させ滑らせ、点 A に到達するまでの時間を最小にしたいとします。このとき曲線 OA をどのように選べば良いでしょうか？

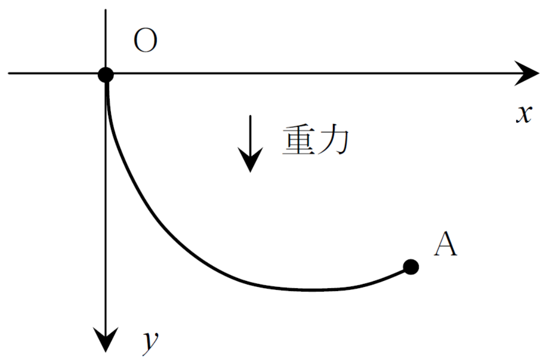

図 4.2: 曲線 OA

図 4.2 のように下方を y 方向として座標を設定します。滑らす物体の質量を m, 位置ベクトルを $\boldsymbol{r}=(x,y)$, 重力加速度を g とすると、エネルギー保存則から、

$$\frac{m}{2}|\dot{\boldsymbol{r}}|^2-mgy=0 \quad \therefore\ \frac{|d\boldsymbol{r}|}{dt}=\sqrt{2gy}.$$

一方、降下曲線を $y=y(x)$ とすると、

$$|d\boldsymbol{r}|=\sqrt{dx^2+dy^2}=dx\sqrt{1+y'^2}$$

ですから、これらから到達時間は、

$$T=\int_0^T dt=\int_0^d dx\sqrt{\frac{1+y'^2}{2gy}}$$

と表せます。d は点 A の x 座標です。この T を最小にしたいわけですから、$\delta T = 0$ であり、上式の被積分関数を F として、

$$\frac{\partial F}{\partial y'} y' - F = \frac{-1}{\sqrt{2gy(1+y'^2)}} = \text{一定} \quad \therefore \ \frac{dy}{dx} = \pm\sqrt{\frac{C-y}{y.}}$$

ここで C は定数です。この微分方程式は変数分離形で、以下のように積分されます：

$$x = \pm\int dy \sqrt{\frac{y}{C-y.}} \qquad \text{ここで、} y = C\sin^2\theta \text{ とおいて、}$$

$$x = \pm 2C \int d\theta \, \sin^2\theta = \pm C\int d\theta \left(1 - \cos(2\theta)\right) = \pm C\left(\theta - \frac{\sin(2\theta)}{2}\right) + D.$$

曲線が原点 O を通ることから積分定数 D は 0 と決まり、また、$\theta = \pm\phi/2$ とおけば、

$$x = R\left(\phi - \sin\phi\right), \qquad y = R\left(1 - \cos\phi\right)$$

と整理されます。ここで $R = C/2$ とおきました。この曲線は、半径 R の円が直線上を転がった場合に円周上の 1 点が描く軌跡になっていて、**サイクロイド**と呼ばれます。最速降下曲線は一般にサイクロイドになるわけです。定数 R は曲線が点 A を通るという条件で決まります。

4.10 懸垂曲線

次に、定まった 2 点を端点とし、密度が一様で十分に細いひもが垂れ下がり静止しているとき、ひもがどのような曲線を描くかを考えてみましょう。端点を O, A とし、やはり図 4.2 のように座標をとります。ひもの長さを L とすると、

$$L = \int_{\mathrm{O}}^{\mathrm{A}} |d\boldsymbol{r}| = \int_0^d dx \, \sqrt{1+y'^2}.$$

また、ひもの線密度を ρ とすると、ひものポテンシャルエネルギーは、

$$U = \int_{\mathrm{O}}^{\mathrm{A}} |d\boldsymbol{r}| \, (-\rho g y) = \int_0^d dx \, (-\rho g y)\sqrt{1+y'^2}$$

です。

曲線に対する変分を考えたとき、L が一定という条件のもとでは、U が停留値をとるはずですから、$\delta L = 0 \Rightarrow \delta U = 0$. この命題は、ある実数 λ が存在して $\delta U + \lambda \delta L = 0$ という命題と同値です (*)。すなわち、

$$\delta\int_0^d dx \, (-\rho g y + \lambda)\sqrt{1+y'^2} = 0$$

となります。被積分関数を F とおくと、

$$\frac{\partial F}{\partial y'}y' - F = \frac{\rho g y - \lambda}{\sqrt{1+y'^2}} = \text{一定}.$$

これは結局、$\sqrt{1+y'^2}$ が、y のある1次式に等しいということを意味しているので、

$$\sqrt{1+y'^2} = \alpha y + \beta$$

とおきます。α, β は定数です。そうすると、

$$\frac{dy}{dx} = \pm\sqrt{(\alpha y+\beta)^2 - 1} \quad \therefore\ x = \pm\int\frac{dy}{\sqrt{(\alpha y+\beta)^2-1.}}$$

この積分は、双曲線関数を用いて $\alpha y + \beta = \cosh\theta$ とおけば実行できて、

$$\alpha y + \beta = \cosh(\alpha x + \gamma)$$

を得ます。cosh が偶関数であることにより $\pm$ の不定性が消えました。γ は積分定数です。これを**懸垂曲線** (**カテナリー曲線**) といいます。α, β, γ は、ひもの長さが L ということと、O, A を通るという条件により決定されるべきものです。

(*注) 実数 a, b に対し、2つの命題、$b=0 \Rightarrow a=0$ および $\exists\lambda\in\mathbf{R}\,(a+\lambda b=0)$ は、$b=0$ のときは共に $a=0$ を意味し、$b\neq 0$ のときは共に真です。よってこれらは同値です。前提が偽の命題は結論が何であれ真になることに注意。この論理的置換により未定乗数 λ を導入し計算を行う手法は、**ラグランジュの未定乗数法**と呼ばれます。多くの初等的な教科書においては説明があまり明瞭でないため、λ が導入される理由をきちんと理解している人は少ないかもしれません。

4.11 無限連成振動子

ラグランジュ方程式の例題に戻ります。特にここでは、無限自由度を持つ相互作用系の例として、**無限連成振動子**のモデルを紹介します。

図 4.3: 無限連成振動子

図4.3のように無数にある質量 m の小球 (振動子) がばねで一直線上に繋がれていて、これら振動子はこの直線上のみを動くものとします。n 番目の振動子の基準点からの変位を ϕ_n とし、n 番目の振動子と $(n+1)$ 番目の振動子を繋ぐばねが、距離変化の2乗に比例したポテンシャルエネルギー、

$$\frac{k}{2}(\phi_{n+1}-\phi_n)^2 \quad (k>0)$$

を有するものとすると、系のラグランジアンは、

$$L = \sum_{n \in \mathbf{Z}} \left(\frac{m}{2} \dot{\phi}_n^2 - \frac{k}{2} (\phi_{n+1} - \phi_n)^2 \right)$$

で与えられます。ドットは時間微分です。

このとき、

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\phi}_n} = \frac{m}{2} \sum_{n' \in \mathbf{Z}} \frac{\partial \dot{\phi}_{n'}^2}{\partial \dot{\phi}_n} = \frac{m}{2} \sum_{n' \in \mathbf{Z}} 2\dot{\phi}_{n'} \delta_{n'n} = m\dot{\phi}_n$$

および、

$$\begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial \phi_n} &= -\frac{k}{2} \sum_{n' \in \mathbf{Z}} \frac{\partial}{\partial \phi_n} (\phi_{n'+1} - \phi_{n'})^2 \\ &= -\frac{k}{2} \sum_{n' \in \mathbf{Z}} 2(\phi_{n'+1} - \phi_{n'})(\delta_{n'+1,n} - \delta_{n'n}) \\ &= k(\phi_{n+1} + \phi_{n-1} - 2\phi_n). \end{aligned}$$

また、テイラー展開により一般に、

$$f(x+a) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} f^{(n)}(x) a^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \left(a \frac{d}{dx} \right)^n f(x) = \exp \left(a \frac{d}{dx} \right) f(x)$$

であることに注意すると、ラグランジュ方程式は、

$$m\ddot{\phi}_n = k(e^{\partial} + e^{-\partial} - 2)\phi_n, \qquad \partial = \frac{\partial}{\partial n}$$

あるいは少し整理して、

$$\ddot{\phi}_n = 4\omega_0^2 \sinh^2 \frac{\partial}{2} \phi_n, \qquad \omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

となります。これが運動方程式です。

$n \in \mathbf{Z},\ p \in (-\pi, \pi)$ において $\{e^{ipn}\}$ が完全系であることに注意すると (関数論と応用数学の章参照)、一般性を失うことなく、

$$\phi_n(t) = \int_{-\pi}^{\pi} dp \, c(p,t) \, e^{ipn}$$

とおくことができますが、これを運動方程式に入れると、

$$\ddot{c}(p,t) = -4\omega_0^2 \sin^2(p/2) \, c(p,t)$$

を得ます。よって $\omega(p) = 2\omega_0 |\sin(p/2)|$ とおけば、解は、

$$c(p,t) = a(p) \, e^{-i\omega(p)t} + b(p) \, e^{i\omega(p)t}$$

と表され、これを $\phi_n(t)$ の式に戻すと、

$$\phi_n(t) = \int_{-\pi}^{\pi} dp \left(a(p)\, e^{ipn - i\omega(p)t} + b(-p)\, e^{-ipn + i\omega(p)t} \right).$$

後ろの項では積分変数 p を符号を逆にして再定義しました。$\phi_n(t)$ が実数であることから $b(-p) = a^*(p)$ がわかるので、結局、一般解は、

$$\phi_n(t) = \int_{-\pi}^{\pi} dp \left(a(p)\, e^{ipn - i\omega(p)t} + a^*(p)\, e^{-ipn + i\omega(p)t} \right), \quad \omega(p) = 2\omega_0 \left| \sin \frac{p}{2} \right|$$

です。ここから、

$$\sum_{n\in\mathbf{Z}} \phi_n(0) e^{-ipn} = 2\pi \big(a(p) + a^*(-p) \big),$$

$$\sum_{n\in\mathbf{Z}} \dot{\phi}_n(0) e^{-ipn} = -2\pi i\, \omega(p) \big(a(p) - a^*(-p) \big)$$

が確かめられるので、これらを $a(p)$ について解くと、

$$a(p) = \frac{1}{4\pi} \sum_{n\in\mathbf{Z}} \left(\phi_n(0) + \frac{i}{\omega(p)}\, \dot{\phi}_n(0) \right) e^{-ipn}.$$

$a(p)$ はこの式により、系の初期条件から決定されるわけです。

例えば $t=0$ で、全ての振動子の変位が 0 で、かつ、0 番目の振動子だけが速度 v を持ち、他が静止していたとすると、$\phi_n(0) = 0,\ \dot{\phi}_n(0) = v\delta_{n0}$ ですから、

$$a(p) = \frac{iv}{4\pi\omega(p).}$$

これを一般解に代入して、

$$\phi_n(t) = \frac{v}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} dp \, \frac{\sin\big(\omega(p)t - pn\big)}{\omega(p)}$$

を得ます。特に 0 番目の振動子の時刻 t における変位は、

$$\phi_0(t) = \frac{v}{2\omega_0}\, F(2\omega_0 t), \qquad F(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} dp \, \frac{\sin\big(x \sin(p/2)\big)}{\sin(p/2)}$$

です。$F(\infty) = 1$ が以下のように確かめられるので、十分時間が経過した後、0 番目の振動子は $v/2\omega_0$ だけ移動し静止することがわかります。$t=0$ で 0 番目の振動子が持っていた運動エネルギーは、無限にある他の振動子へと順に伝わり散逸してしまいます。これは無限自由度の系の、有限自由度の系にはない特徴です。

[$F(\infty) = 1$ の証明] 積分変数を $q = x\sin(p/2)$ に置換すると、

$$F(x) = \frac{2}{\pi} \int_0^{x} dq \, \frac{\sin q}{q\sqrt{1 - (q/x)^2}}$$

となりますが、$1/\sqrt{1-(q/x)^2}$ を q/x でマクローリン展開し、

$$\int_0^\infty dq\,\frac{\sin q}{q} = \frac{\pi}{2}, \qquad \lim_{x\to\infty}\frac{1}{x^{n+1}}\int_0^x dq\,q^n \sin q = 0 \quad (n=1,2,\cdots)$$

に注意すれば与題を得ます。ここで前式は**ディリクレ積分**と呼ばれる有名な式で、例えば複素関数 $f(z)=e^{iz}/z$ の図 4.4 の経路上の積分がコーシーの定理から 0 であることから確かめられるでしょう。一方、後式は積分部を部分積分することにより確かめられます。[証明終]

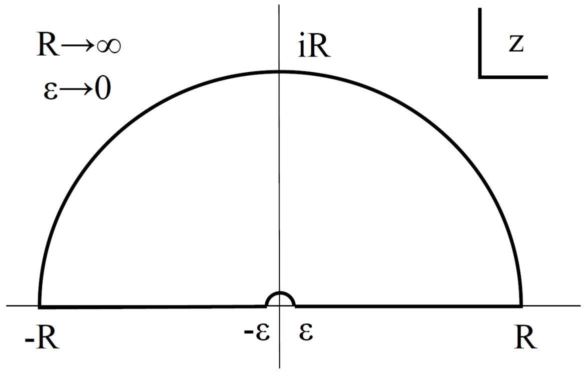

図 4.4: 積分経路

4.12 ひもの固有振動

次に連続体の簡単な例として、ギターの弦のように両端が固定された**ひも**について考えてみましょう。

ひもの上のパラメータを λ とし、$\lambda=0,\pi$ をひもの両端とします。また、ひもの各位置の 3 次元デカルト座標を $x_i=x_i(\lambda)$ としましょう。これが力学変数であり、$i\in\{1,2,3\}$, $\lambda\in(0,\pi)\subset\mathbf{R}$ で特徴づけられるため、この系は “連続無限自由度” を持ちます (図 4.5)。

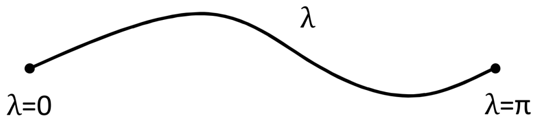

図 4.5: 両端が固定されたひも

パラメータ λ に関するひもの線密度 ρ が一様であるとすると、ひもの全質量は $m=\pi\rho$ であり、ひもの運動エネルギーは、

$$K=\int_0^\pi \frac{\rho d\lambda}{2}\,|\dot{x}|^2 = \frac{m}{2\pi}\int_0^\pi d\lambda\,|\dot{x}|^2$$

と書けます。また、ひものポテンシャルエネルギー(弾性エネルギー)は、これがひもの長さに比例すると仮定すると、

$$U = T \int_{\text{ひも}} |dx| = T \int_0^{\pi} d\lambda \, |\partial_\lambda x|$$

です。比例定数 T はひもの**張力**を意味することになります(*)。∂_λ はパラメーター λ による微分演算子です。結果、系のラグランジアンは、

$$L = K - U = \int_0^{\pi} d\lambda \left(\frac{m}{2\pi} |\dot{x}|^2 - T \, |\partial_\lambda x| \right)$$

ということになります。

汎関数微分により、

$$\begin{aligned} \frac{\delta L}{\delta \dot{x}_i(\lambda)} &= \frac{m}{2\pi} \int_0^{\pi} d\lambda' \, 2\dot{x}_j(\lambda') \, \frac{\delta \dot{x}_j(\lambda')}{\delta \dot{x}_i(\lambda)} \\ &= \frac{m}{\pi} \int_0^{\pi} d\lambda' \, \dot{x}_j(\lambda') \, \delta_{ji} \delta(\lambda' - \lambda) = \frac{m}{\pi} \, \dot{x}_i(\lambda), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\delta L}{\delta x_i(\lambda)} &= -T \int_0^{\pi} d\lambda' \, \frac{1}{2|\partial_{\lambda'} x(\lambda')|} \; 2\partial_{\lambda'} x_j(\lambda') \, \frac{\delta \partial_{\lambda'} x_j(\lambda')}{\delta x_i(\lambda)} \\ &= -T \int_0^{\pi} d\lambda' \, \frac{\partial_{\lambda'} x_j(\lambda')}{|\partial_{\lambda'} x(\lambda')|} \; \partial_{\lambda'} \delta_{ji} \delta(\lambda' - \lambda) = T \, \partial_\lambda \, \frac{\partial_\lambda x_i(\lambda)}{|\partial_\lambda x(\lambda)|} \end{aligned}$$

であることに注意すれば、ラグランジュ方程式: $\dfrac{\delta L}{\delta x_i(\lambda)} - \dfrac{d}{dt} \dfrac{\delta L}{\delta \dot{x}_i(\lambda)} = 0$ は、

$$\ddot{x}_i = \frac{\pi T}{m} \, \partial_\lambda \, \frac{\partial_\lambda x_i}{|\partial_\lambda x|}$$

を与えます。これがひもの運動方程式です。この偏微分方程式は非線形であるため、一般解を求めるのは困難です。しかし振幅の小さな振動を意味する近似解を求めることは、以下のように容易です。

いま、ひもの両端を、デカルト座標の原点および $(l, 0, 0)$ とすると、

$$x_i(\lambda) = \big(l\lambda/\pi, \, a(t) \sin(n\lambda), \, 0 \big)_i$$

は任意の正の整数 n において境界条件を満たします。これを運動方程式に代入すると、$a(t) \ll l$ の仮定のもとで、

$$\ddot{a}(t) = -\, \frac{n^2 \pi^2 T}{ml} \, a(t)$$

を得るでしょう。この 2 階微分方程式の一般解は、

$$a(t) = \varepsilon \sin(\omega_n t + \alpha), \quad \omega_n = n\pi\sqrt{\frac{T}{ml}}$$

であり、ここで ε, α は積分定数です。まとめると、$\varepsilon \ll l$ のもとで、

$$x_i(\lambda) = \big(l\lambda/\pi,\, \varepsilon \sin(n\lambda)\sin(\omega_n t + \alpha),\, 0\big)_i$$

が運動方程式の近似解になっていて、その振動数 (周波数) は、

$$\nu_n = \frac{\omega_n}{2\pi} = \frac{n}{2}\sqrt{\frac{T}{ml}} \quad (n = 1, 2, \cdots)$$

で与えられます。これをひもの**固有振動数**といいます。図 4.6 に解の様子を示します。実線と点線は共にひもが最大に振れた状態で、点線は実線の 1/2 周期後の状態を意味します。

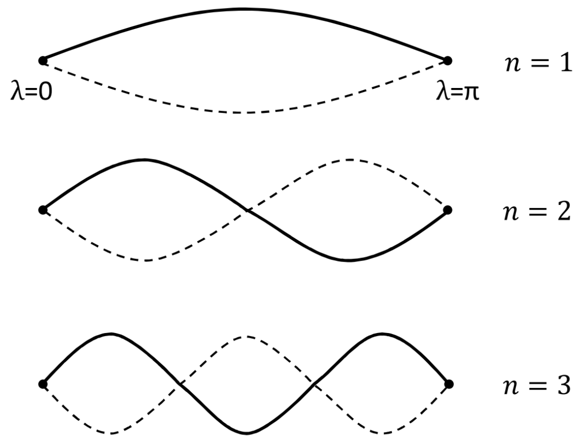

図 4.6: ひもの固有振動

ギターのような弦楽器においては、$n = 1$ のモードが発する音を**基音**といい、$n = 2, 3 \cdots$ のモードが発する音を**倍音**といいます。弦楽器の弦が発する音は、基音を主としたこれらモードの音の重ね合わせであり、それゆえ聴いて心地よいと考えられるわけです。単一周波数の音は「ブー」とか「ピー」といったブザーのような音であることに注意。

(*注) 張力が一定のひもというのは実際にはほとんどないでしょうが、ひもをある程度引っ張り、長さをあまり変えないという最低次の近似のもとではおおよそ正しいと考えられます。ちなみに相対論的にもっともらしいひもを考えると、それは非相対論的近似のもとで張力が一定になること、すなわち長さに比例したポテンシャルエネルギーを有することが知られています (南部・後藤のひも理論)。

4.13 ラプラシアンの逆

3次元デカルト座標を x_i とし、x_i による偏微分を $\partial_i = \partial/\partial x_i$ としたとき、ラプラシアンは、

$$\Delta = \partial_i \partial_i = \left(\frac{\partial}{\partial x_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial}{\partial x_2}\right)^2 + \left(\frac{\partial}{\partial x_3}\right)^2$$

でした(ユークリッド幾何学の章参照)。ここでは、

$$(\Delta - \mu^2)F(x) = \delta^3(x)$$

という偏微分方程式を考えてみましょう。ただし μ は正の定数で、

$$\delta^3(x) = \delta(x_1)\delta(x_2)\delta(x_3)$$

は3次元のデルタ関数です。このとき $F(x)$ は演算子 $(\Delta - \mu^2)$ の**主要解**、あるいは**逆**と呼ばれます。逆と呼ばれるのは、2変数関数を行列とみなす観点において、行列 $(\Delta - \mu^2)\delta^3(x - x')$ の逆行列が $F(x - x')$ になっているからです。このことは以下のように確かめられます。

$$\int d^3x' \left((\Delta - \mu^2)\delta^3(x - x')\right)F(x' - x'') = \int d^3x' \left((\Delta' - \mu^2)\delta^3(x - x')\right)F(x' - x'')$$
$$= \int d^3x'\, \delta^3(x - x')(\Delta' - \mu^2)F(x' - x'') = (\Delta - \mu^2)F(x - x'') = \delta^3(x - x'').$$

ここで Δ' は x'_i に関するラプラシアンを意味します。

$(\Delta - \mu^2)F(x) = \delta^3(x)$ の解は、3次元のデルタ関数が、

$$\delta^3(x) = \int \frac{dk_1}{2\pi}\, e^{ik_1x_1} \int \frac{dk_2}{2\pi}\, e^{ik_2x_2} \int \frac{dk_3}{2\pi}\, e^{ik_3x_3} = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3}\, e^{ik\cdot x}$$

と書けることに注意して、

$$F(x) = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3}\, \frac{-1}{|k|^2 + \mu^2}\, e^{ik\cdot x}$$

と表すことができますが、この積分は実行できます。x_i の方向を北極として k 空間の積分を3次元極座標 (κ, θ, ϕ) で表せば、

$$F(x) = \frac{-1}{(2\pi)^3} \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^{\pi} d\theta \int_0^{\infty} d\kappa\, \kappa^2 \sin\theta\, \frac{1}{\kappa^2 + \mu^2}\, e^{i\kappa|x|\cos\theta}$$
$$= \frac{i}{4\pi^2|x|} \int_0^{\infty} d\kappa\, \frac{\kappa}{\kappa^2 + \mu^2}\, (e^{i\kappa|x|} - e^{-i\kappa|x|}).$$

$e^{-i\kappa|x|}$ の項を含む方の積分は、積分変数 κ の符号を逆にして再定義し、

$$F(x) = \frac{i}{4\pi^2|x|} \int_{-\infty}^{\infty} d\kappa\, \frac{\kappa}{\kappa^2 + \mu^2}\, e^{i\kappa|x|}$$

となります。ここで κ を複素数に拡張すると、上半円における積分が消えるので、$\kappa = i\mu$ における留数を拾って、

$$F(x) = -\frac{1}{4\pi|x|}\, e^{-\mu|x|}$$

を得ます。これが $(\Delta - \mu^2)$ の逆で、**湯川ポテンシャル**と呼ばれます。

特に $\mu = 0$ とすれば、ラプラシアン Δ の逆が、

$$F(x) = -\frac{1}{4\pi|x|}$$

で与えられることがわかります：$\Delta F(x) = \delta^3(x)$. これを**クーロンポテンシャル**といいます。

4.14 重力ポテンシャルと重力場

ニュートン力学は、特に相互作用が重力だけとした場合、

$$L = \frac{1}{2}\sum_a m_a|\dot{x}_a|^2 - \sum_a m_a\phi(x_a) - \frac{1}{8\pi G}\int d^3x\, |\partial\phi(x)|^2$$

という場を含むラグランジアンで表すことができます。スカラー場 $\phi(x)$ は**重力ポテンシャル**と呼ばれます。

このとき、

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_a^i} = m_a\dot{x}_a^i, \qquad \frac{\partial L}{\partial x_a^i} = -m_a\partial_i\phi(x_a)$$

ですから、質点 a の運動方程式 (ラグランジュ方程式) は、

$$\ddot{x}_a^i = -\partial_i\phi(x_a)$$

となります。これは質点 a に作用する重力が $-m_a\partial_i\phi(x_a)$ で与えられることを意味しています。ベクトル場 $-\partial_i\phi(x)$ を**重力場**といいます。重力場は重力ポテンシャルの勾配の逆符号で与えられるわけです。

一方、$\delta L/\delta\dot{\phi}(x) = 0$ および、

$$\begin{aligned}\frac{\delta L}{\delta\phi(x)} &= -\sum_a m_a\delta^3(x_a - x) - \frac{1}{8\pi G}\int d^3x'\, 2\partial'_i\phi(x')\partial'_i\delta^3(x'-x) \\ &= -\sum_a m_a\delta^3(x - x_a) + \frac{1}{4\pi G}\,\Delta\phi(x)\end{aligned}$$

ですから、重力ポテンシャルの運動方程式 (場の方程式) は、

$$\Delta\phi(x) = 4\pi G\rho(x), \qquad \rho(x) = \sum_a m_a\delta^3(x - x_a)$$

となります。これは**ポアソン方程式**と呼ばれます。$\rho(x)$ は質量密度を意味しています。ポアソン方程式は物質の質量が重力場を生み出すことを意味しています。

ラプラシアンの逆を用いると、ポアソン方程式は次のように解けてしまいます。

$$\begin{aligned}\phi(x) &= \int d^3x'\, F(x-x')\, 4\pi G\rho(x') \\ &= \int d^3x'\, \frac{-1}{4\pi|x-x'|}\; 4\pi G \sum_a m_a \delta^3(x'-x_a) \\ &= -G\sum_a \frac{m_a}{|x-x_a|.}\end{aligned}$$

ラグランジアンに時間微分項がなく独立な力学的自由度を持たない場は、一般に**補助場**と呼ばれ、**遠隔作用** (遠方に瞬時に伝わる力) を表すことになります。上式をラグランジアン L に代入し、重力ポテンシャルを消去すれば、

$$\begin{aligned}\int d^3x\, |\partial\phi(x)|^2 &= -\int d^3x\, \phi(x)\Delta\phi(x) \\ &= -\int d^3x\, \phi(x)\, 4\pi G \sum_a m_a \delta^3(x-x_a) \\ &= -4\pi G \sum_a m_a \phi(x_a)\end{aligned}$$

に注意して、

$$L = \frac{1}{2}\sum_a m_a |\dot{x}_a|^2 + \frac{1}{2}\sum_{ab} \frac{G\, m_a m_b}{|x_a - x_b|}$$

を得るでしょう。これは先に紹介したニュートン力学のラグランジアンに他なりません。

重力のポテンシャルエネルギーが、

$$U_g = -\frac{1}{2}\sum_{ab} \frac{G\, m_a m_b}{|x_a - x_b|} = \frac{1}{2}\sum_a m_a \phi(x_a) = -\frac{1}{8\pi G}\int d^3x\, |\partial\phi(x)|^2$$

であり、負定値であるのに対し、**重力場のエネルギー**と呼ぶべきものは、元のラグランジアンからわかるように、

$$E_\phi = \frac{1}{8\pi G}\int d^3x\, |\partial\phi(x)|^2$$

であり、これは正定値になることに注意してください。重力場のエネルギーに、相互作用のエネルギー $E_I = \sum_a m_a \phi(x_a)$ を加えたものが重力のポテンシャルエネルギー U_g になるわけです。

(余談) 物質が場を生み出し、その場から物質が力を受けるとする相互作用の考え方は、後の物理学において特に重要になります。このような場は**力場**と総称されます。ニュートン力学では重力やクーロン力は遠隔作用で、遠方に瞬時に伝わると考えるわけですが、相対論では伝達に時間を要することになります。このような相互作用は、遠隔作用に対して、**近接作用**などと呼ばれます。また、重力場のエネルギーに関するここでの考え方はあまり知られていないと思われますが、このことを正しく認識していないと、後々一般相対論でエネルギーを考える際に混乱することになってしまうでしょう。

4.15 星が作る重力ポテンシャル

球対称な系を考えると、重力ポテンシャル ϕ は $r = |x| = \sqrt{x\cdot x}$ だけの関数と考えられます。

$$\partial_i r = \partial_i \sqrt{x\cdot x} = \frac{2x_j\delta_{ij}}{2\sqrt{x\cdot x}} = \frac{x_i}{r}$$

に注意すると、

$$\partial_i\phi(r) = \phi'(r)\,\partial_i r = \phi'(r)\,\frac{x_i}{r.}$$

さらに、

$$\begin{aligned}
\Delta\phi(r) = \partial_i\partial_i\phi(r) &= \partial_i\left(\phi'(r)\,\frac{x_i}{r}\right)\\
&= \phi''(r)\,\partial_i r\,\frac{x_i}{r} + \phi'(r)\,\frac{\delta_{ii}}{r} + \phi'(r)\left(-\frac{x_i}{r^2}\right)\partial_i r\\
&= \phi''(r) + \frac{3}{r}\,\phi'(r) - \frac{1}{r}\,\phi'(r) = \phi''(r) + \frac{2}{r}\,\phi'(r)
\end{aligned}$$

を得るので、ポアソン方程式 : $\triangle\phi = 4\pi G\rho$ は、

$$\phi''(r) + \frac{2}{r}\,\phi'(r) = 4\pi G\rho(r) \qquad \therefore\ \frac{d}{dr}\left(r^2\phi'(r)\right) = 4\pi G r^2\rho(r)$$

となります。これを積分して、

$$\phi'(r) = \frac{G\mathcal{M}(r)}{r^2,} \qquad \mathcal{M}(r) = 4\pi\int_0^r dr'\,r'^2\rho(r')$$

を得ます。$\mathcal{M}(r)$ は原点を中心とした半径 r の球体内部における総質量を意味しています。

いま、座標の原点に、半径 R, 質量 M の星がある場合を考えると、星の外部 $(r > R)$ においては $\mathcal{M}(r) = M$ なので、

$$\phi'(r) = \frac{GM}{r^2} \qquad \therefore\ \phi(r) = -\frac{GM}{r.}$$

積分定数は $\phi(\infty) = 0$ により定めました。この結果は、星が球対称である限りは正しく、星内部の質量分布に依らずに定まっていることに注意してください。

星の外部にある質点に作用する重力は、質点の質量を m として、

$$-m\partial_i\phi(r) = -m\phi'(r)\partial_i r = -m\,\frac{GM}{r^2}\,\frac{x_i}{r} = -\,\frac{GMmx_i}{r^3}$$

ということになります。このことはニュートン力学の章でもより直接的な方法で確かめました。

一方、星の内部 $(r<R)$ の重力ポテンシャルは質量分布がわからないと定まりませんが、ここでは仮に密度が一定だとし、$\rho(r)=\rho_0\ (r<R)$ とおきます。これは非圧縮性の物質でできた星を意味します。このとき、

$$\mathcal{M}(r) = 4\pi\rho_0\int_0^r dr'\,r'^2 = \frac{4}{3}\,\pi\rho_0 r^3, \qquad M=\mathcal{M}(R)=\frac{4}{3}\,\pi\rho_0 R^3$$

に注意して、

$$\phi'(r) = \frac{4}{3}\,\pi G\rho_0 r = \frac{GM}{R^3}\,r \qquad \therefore\ \phi(r) = \frac{GM}{2R^3}\,r^2 + C$$

を得ます。C は積分定数ですが、星の表面 $r=R$ で外部解と連結するとすれば、$C=-3GM/(2R)$ と定まります。

結果をまとめると、

$$\phi(r) = \begin{cases} -\,\dfrac{GM}{r} & (r>R) \\[2ex] \dfrac{GM}{2R^3}\,(r^2-3R^2) & (r<R). \end{cases}$$

グラフを図 4.7 に示します。

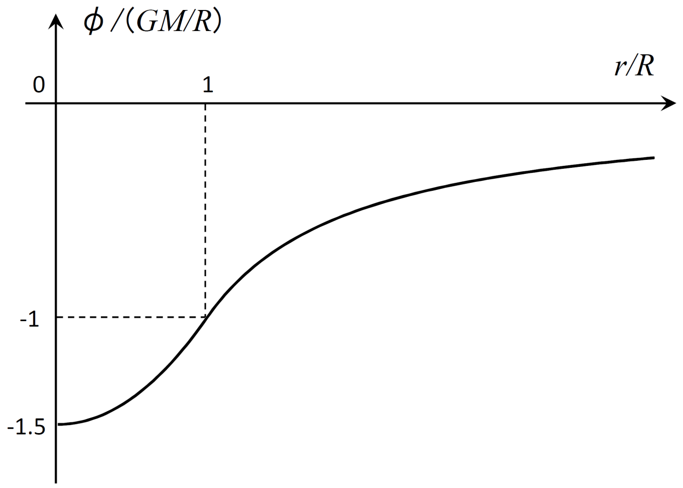

図 4.7: 星が作る重力ポテンシャル

密度が一様な星の重力場のエネルギーは、

$$
\begin{aligned}
E_\phi &= \frac{1}{8\pi G}\int d^3x\,|\partial\phi(x)|^2 = \frac{1}{8\pi G}\int_0^\infty dr\,4\pi r^2\,\phi'(r)^2 \\
&= \frac{1}{2G}\int_0^R dr\,r^2\left(\frac{GMr}{R^3}\right)^2 + \frac{1}{2G}\int_R^\infty dr\,r^2\left(\frac{GM}{r^2}\right)^2 \\
&= \frac{GM^2}{10R} + \frac{GM^2}{2R} = \frac{3GM^2}{5R}
\end{aligned}
$$

と見積もられ、星が持つ重力のポテンシャルエネルギーはこれと符号が逆で、

$$
U_g = -\frac{3GM^2}{5R}
$$

となります。あるいはこれは、

$$
U_g = \frac{1}{2}\sum_a m_a\phi(x_a) = \frac{1}{2}\int d^3x\,\rho(x)\phi(x)
$$

により計算しても、当然、同じ結果になります。

(余談) 質点が重力相互作用あるいはクーロン相互作用する系では、系のポテンシャルエネルギーは、通常、無限大ですが、ここでは連続近似を行ったためにポテンシャルエネルギーが有限になっています。**連続近似**というのは、質点が連続的に無数に存在し、各々の質点の質量や電荷が 0 とみなされる近似です。ここでは星の内部で $\rho(r) = \rho_0 < \infty$ と仮定したことがこれに相当します。一般に連続体では自己エネルギーの発散が抑制されます。

4.16 低次元のラプラシアンとその逆

章の最後に、補足的かつ発展的な内容になりますが、1 次元および 2 次元におけるラプラシアンの逆について簡単に触れておきます。

まず 1 次元の場合、ラプラシアンは、

$$
\Delta = \left(\frac{d}{dx}\right)^2
$$

であり、μ を正の実数として、$(\Delta - \mu^2)$ の逆は、

$$
F_1(x) = \int_{-\infty}^{\infty}\frac{dk}{2\pi}\;\frac{-1}{k^2+\mu^2}\;e^{ikx} = \frac{-1}{2\mu}\;e^{-\mu|x|}
$$

です。積分の際、$x > 0$ のときは上半円の複素積分が消えるので $k = i\mu$ の、$x < 0$ のときは下半円の積分が消えるので $k = -i\mu$ の留数を拾いました。特に $\mu \to 0$ のときは、定数の発散項を除いて、

$$
F_1(x) = \frac{1}{2}\,|x|
$$

となります。これが $\Delta = (d/dx)^2$ の逆です：$(d/dx)^2 F_1(x) = \delta(x)$.

一方、2次元の場合、ラプラシアンは、

$$\Delta = \left(\frac{\partial}{\partial x_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial}{\partial x_2}\right)^2$$

であり、このとき $(\Delta - \mu^2)$ の逆は留数定理では計算できず、

$$\begin{aligned}
F_2(x) &= \int \frac{d^2k}{(2\pi)^2}\,\frac{-1}{|k|^2+\mu^2}\,e^{ik\cdot x} = -\int_0^\infty ds \int \frac{d^2k}{(2\pi)^2}\,e^{ik\cdot x-(|k|^2+\mu^2)s} \\
&= -\int_0^\infty ds \int \frac{d^2k}{(2\pi)^2}\,e^{-s|k-ix/(2s)|^2-|x|^2/(4s)-\mu^2 s} = \frac{-1}{4\pi}\int_0^\infty \frac{ds}{s}\,e^{-|x|^2/(4s)-\mu^2 s}
\end{aligned}$$

と評価されます。k 積分はガウス積分として実行しました。$s = (|x|/2\mu)\,e^\theta$ で積分変数を θ に置換すれば、

$$F_2(x) = \frac{-1}{2\pi}\int_0^\infty d\theta\; e^{-\mu|x|\cosh\theta}$$

と表すこともできます。これは**ベッセル関数**の一種です。$\mu \to 0$ においては、

$$\begin{aligned}
F_2(x) &= \frac{-1}{4\pi}\int_0^\infty \frac{ds}{s}\,e^{-|x|^2/(4s)} = \frac{-1}{4\pi}\lim_{\epsilon\to 0}\int_0^\infty dt\,t^{\epsilon-1}\,e^{-|x|^2 t/4} \\
&= \frac{-1}{4\pi}\lim_{\epsilon\to 0}\left(\frac{4}{|x|^2}\right)^\epsilon \Gamma(\epsilon).
\end{aligned}$$

途中、積分変数 s を $t = 1/s$ に置換しました。ガンマ関数の性質から $\Gamma(\epsilon) = \Gamma(1+\epsilon)/\epsilon = \epsilon^{-1} + \cdots$. また、$y^\epsilon = e^{\epsilon \log y} = 1 + \epsilon \log y + \cdots$ に注意すると、やはり定数の発散項を除いて、

$$F_2(x) = \frac{1}{2\pi}\,\log|x|$$

を得るでしょう。これが2次元ラプラシアンの逆です。

(余談) ラプラシアンの逆を求めるだけならもっと簡単な方法もあるでしょうが、電磁気学 (相対論) では結局 $(\Delta - \mu^2)$ の逆が必要になります。二度手間を防ぐためにもここで紹介したような系統的な理解をしておいた方が良いでしょう。

索引